Digitized by Google

XXXIII
F
1

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
F
1
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

CAROLI RENALDINII

ARS ANALYTICA MATHEMATVM

Digitized by Google

CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ
PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

ET IN PISANA ACADEMIA PHILOSOPHIAE ORDINARII INTERPRETIS

ARS ANALYTICA MATHEMATVM

IN TRES PARTES DISTRIBVTA,

QVARVM

Prima, Veterum Analyſtarum,

Secunda, Recentiorum Doctrinam locupletatam complectitur; atque adeo de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica ediſſerit.

Tertiã, Demum in maiorem Artis illuſtrationem Theoremata, ac Problemata reſoluta exhibet.

EIDEM SERENISSIMO

PARS PRIMA.



FLORENTIÆ,
Ex Typographia Ioſephi Cocchini ad inſigne Stellę, MDCLXV.
SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

SERENISSIMO

COSMO MAGNO

ETRVRIÆ PRINCIPI

CAROLVS RENALDINIVS F. P.

DIES non euulſit ex animo, Sereniſsime Princeps, me iam dudum literis, tecum ſuppliciter egiſſe, quòd id eſſet humanitatis tuæ, vt mihi clementer ignoſceres, ſi quæ à me tibi conſecrata minus digna, tam excelſo, tam glorioſo nomine conſpiceres, cùm alteri á te vix accommodata viderentur. Quandoquidem præſtantiſsimum Tractationis argumentum inter Sacratiora Matheſeos arcana, ſuauiores Muſarum delicias, poſtremum locum haud ſibi vendicabat. At ſub excelſi tui Nominis fulgore Commentarijs eadem de re longè quidem vberioribus in lucem nunc prodeuntibus, mihi iterum eſt idem agendum, non ſine fiducia tamen id ſucceſſurum ex voto. Siquidem vt olim pręſentiens in poſterum te Mineruæ Templum inuiſurum, ſępenumero augurabar; Maioribus enim non abſimilis procliuem animum ad literas nactus, non minus quàm ad arma tractanda videbaris. Ita bono id omine me feciſſe tunc demum intelligo, cùm amænum literarum otium à te ſummos Imperatores, atq; adeo Proauos mirum in modum imitante foueri, ac innutriri luculenter conſpicio; ſiquidem omne literatorum genus, munificentiſsima quadam opitulatione ſuſtentas. Quamobrem haud rarò mihi venit in mentem

pluſquam

Digitized by Google

pluſquam Heroica, non ementita Indoles tibi Diuinitùs elargita. Eo autem lubentiùs iterum ad te ſupplex accedo, quo mihi compertum, ac exploratum eſt, animo nunquam à ſtudijs bonarum Artium abducto, quinimo ad ea quotidie magis incitato plurimùm in iiſdem te profeciſſe; Quamobrem hæc in delicijs habeas, ac in oculis feras neceſſe eſt. Non inepte proinde vaticinans aliquando futurum dicebam, vt ſtudia literarum coleres, Philoſophorum Licæa frequentares, incomparabili gloria. Singulari tamen, vt prudentia polles, ita quidem animum, ad ea, quæ ſunt Principis ſtudia adieciſti, ſedulò nimirum operam nauando Mathematicis Diſciplinis, ea non neglecta, quæ præſtantiſsima Naturæ myſteria perſcrutatur, atque demum elegantiſsimis moribus animum conformandum aſſumens, eum ſic exornatum, ac perpolitum reddidiſti, vt in his egregiè Socratem imitatus, eundem omnium conſenſione, communiq; calculo ſuperaſſe iudiceris. Cùm autem benigno ſidere contigerit, vt ijs laboribus à te ſtrenuè ſuſceptis adeſſem, quibus nimirum veritatum Theſaurus aperitur: eodem itidem fortunato datum eſt, vt nihil tàm operoſum, tàm arduum, tàm difficultatibus implicatum foret, in quod mentis penè Diuinæ aciem non figeres, & ingenij ſumma perſpicacitate me vix innuente non aſſequereris. Quapropter haud ego fallor, & me fide dignum exiſtimo, nulli magis, quàm tibi ſi dixero á præſtantiſsimarum Artium cultoribus conſecrandos labores. Sub auſpicijs enim immortalis, ac auguſtiſsimi Nominis tui, prodeuntes in lucem, tantum auctoritatis, atque decoris conſequuntur, quantum cuiq; licet in optatis habere. Erat igitur cur hæ Mathematicæ lucubrationes tibi forent inſcriptæ; præſertim autem, quia vt benignis auribus aliquando hæc excepiſti, ita ſperandum, vt nunc eadem clementiſsimis oculis vſurpes. Suſcipe igitur, vt ſoles, hilari animo, ſerena fronte, quæ nunc a me oblata tibi munera, vides; vt inde animo erecto longè quidem alacriùs, in ea, quæ grandiora ſuperſunt, gratia conſequendæ veritatis incumbam. Vale. Florentiæ Anno à Virginis partu MDCLXV.

TOTIVS

TOTIVS OPERIS
PRÆFATIO.

ET plauſibile multùm, & rationi magnopere conſentaneum mihi ſemper eſt viſum conſilium, etſi quibuſdam è veteribus Philoſophantium improbatum, eorum ſcilicet, quibus haud æq; numeris abſolui parentis Naturæ opera videbantur. Quo facilè Animum induxi, vt crederẽ, ſcitè admodum pronunciatum aliquando fuiſſe, Artes, ac Diſciplinas è bonorum, ac honorabilium numero, non æquè tamen eſſe perfectas, pro vt res ipſę, in quibus humanæ intelligentiæ ſe ſe exercet honeſtiſſimus labor, plus, minuſue perfectionis fuerint exeuntes primùm in lucem ſupremi quidem Artificis beneficientia ſumma, conſecutæ; quod tanti Numinis maieſtatem vtique decebat, vt Vniuerſi concinnitas, elegantia, ac pulcritudo, quæ ex rebus genere diuerſis, multitudine infinitis, præſtantia ſingularibus efflorеſcit, vndequaq; perſpecta redderetur, ac proinde vis eius ineffabilis mirũ quidẽ in modũ eluceret. Quamobrẽ ſi cuiuſcumq; Artis honeſtas, dignitas, atq; præſtantia, ex Argumenti nobilitate deſumenda iudicetur; non multum laudis profectò Mathematicæ ſibi hinc poterunt aſciſcere, cum à pleriſque diſciplinarum, rei conſideratæ, ac introſpectę nobilitate ſumma, dignitate maxima, præſtantia ſingulari, longè, latèque ſuperentur. Quo exploratum cuique ſit, mentis perſpicientiam, non inde ſolum, verum etiam ex eleganti, firmoq; demonſtrandi genere, laudem vberrimam adipiſci.

Naturæ opera non ſunt æq; perfecta.

Artes, ac Diſciplinæ haud æque perfectæ ſunt.

Mathematicæ Diſciplinæ rei conſideratæ dignitate à plurimis ſuperantur.

Nemini propterea ſit operoſum ſuſpicere, quas diximus diſciplinas, vtpote præ cęteris gradum ſupremum dignitatis conſecutas, vt facilè dixeris, nullã eſſe, quæ firmitate, certitudineque diſſerendi, cum ijs poſſit, de nobilitate contendere.

Quòd ſi humanus Animus eſt ex Diuina mente excerptus, ei veritatem in primis conſentaneam, tanquàm illud, quo nutritur, ac reficitur pabulum, fatearis neceſſe eſt; & ſi cogitare ipſius creditur vita; quæ nam iucundior vita, ſi cogitatio omnis habuerit cum veritate commercium? Quamobrem ex honeſtiſſimis diſciplinis, nulla futura magìs eſt illi accõmodata, quàm, quæ præ alijs veritatem ipſam aſſequitur, quæq; in perſcrutandis eiuſdem latebris cę-

Cogitatio, ac ſtudium animi pabulum eſt.

Digitized by Google

teras omnino vincit, ac ſuperat. In Mathematicas diſciplinas proinde firma, certaque ratione comparatas,æquum eſt,omnes ingenij neruos intendere.

Ars Analytica in magno pretio apud veteres extitit.

** Analyticen.*

Sacratiora tamen Naturæ, cum & ingenij alacritatem, & temporis diuturnitatem, & laborum tolerantiam expoſcant, neminem admiratio ſubeat, quòd apud Greciæ ſapientes Ars fuerit ſummis honoribus exculta, quæ in his diſciplinis viam ad veritatem conſequendam præſcribit. Hanc autem ἀναλυτικὴν, dixere, cuius præſidio deſtituti, nil ſperandum putarunt.

** Analyſeos atq; ſyntheſeos*

Pap. lib. 7. collectionum Mathem. ad initium locus ἀναλυόμενος quid.

Quo nihil antiquius ijs fuiſſe accepimus, quàm Artē inſtituere de ἀναλύσεως, atque συνθέσεως ratione diſputantem, vt facilè Problematibus reſoluendis occurrerent; Erat enim, teſte Pappo, Locus ἀναλυόμενος, hoc eſt reſolutus, propria quædam materia, poſt communium Elementorum conſtitutionem, ijs parata; qui in Geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem, inueniendi problemata, quæ ipſis proponuntur; atque huius tantummodo vtilitatis gratia inuenta eſt. Veteres tamen nimis anguſtos fines Analyticę præſcripſerunt. Quapropter interdictum erat, hos tranſiliendo, per vaſtiſſimum Mathematicæ contemplationis Oceanum vagari. Hęc tamē Herculeas columnas quodam modo prætergreſſa, velut ſui iuris, vbique veritatem inquirit, ac prius humiliora proſecuta; nunc duabus alis, vtriuſq; nimirum, & Numeroſæ, & Specioſæ ſuffulta ad ſublimiora, euecta generoſæ Aquilæ inſtar in Sole veritatis audax mentis obtutum figere non paueſcit.

Nihil à principio perfectū.

Cum enim nihil à principio complexionem omnium numerorū obtineat; propterea longo temporis tractu plurimum incrementi ſuſcepit, vt nunc veluti plena maieſtatis aſſurgens, nihil ſit tàm arduum, quod perficiendum non aſſumat.

Multis autem ab hinc Annis hanc verſare diligenter ſtuduimus, operamque dedimus, vt eò tandem ipſam perduceremus, quò videbatur opus, vt quantum ingenij tenuitas pateretur, abſoluta demum prodiret in lucem.

Multi Mathemat. ſciūt, pauci autem Matheſin.

At quanti facienda ſit, vel ex eo facilè quiſq; iudicium feret, quòd vt ait ille, Mathematica quidem multi ſciunt, Matheſin verò pauci; Quandoquidem non idem eſt aliquas propoſitiones cognoſcere, & ex ijs alias ſatis obuias elicere, caſu potius, quàm artificioſa diſſerendi ratione, non idem eſt inquam, ac ipſius Artis naturam introſpicere, & eius inſtructum, ac eruditum eſſe præceptis, quibus Theoremata, ac Problemata innumera excogitandi, demonſtrandique facilitas compareture. Ab vniuerſalibus igitur huius Artis pręceptis inſtructus, nihil eſt tàm difficile, nihil tàm operoſum, nihil tàm arduum, quod ſuperare ſua non poſſit induſtria.

Si verò noſtrę ſunt partes, maioribus gratias immortales agere, quòd Artis adeò Diuinæ prima rudimenta tradiderint; cuiq; facilè perſuaſum erit, plurimam apud illos gratiam eſſe nos inituros, quòd in eius cultu non parum laboris pertulerimus, vt in poſterum Mathematicę diſciplinæ huius Artis opitulatione ditiores, ac locupletiores futuræ ſint. Pręſertim verò, quòd vigilijs nō pepercimus, vt à primis Elementis exordientes, ad pręclariſſima, perueniremus, ne deſiderandum quicquam ſupereſſet.

Alij etiam hanc prouinciam aggreſſi ſunt.

Tametſi verò alij etiam hanc prouinciam ſuſceperint, vt ex argumenti nouitate nullus ferè ſit nobis locus ad conſeqnendam gloriam. Tamen

publicam

publicam materiem ſic tractare conari ſimus, vt quodammodopriuati iuris facta videatur. Vnde rerum æquus æſtimator aduertet, nos ne dum oneris multum, laboris, moleſtiæque plurimum in aliorum præceptionibus colligendis ſuſtinuiſſe, ſed etiam in ijs illuſtrandis, & in plurimis alijs proprio marte parandis, haud mediocriter inſudaſſe. Siquidem Numeroſam ipsã à qua ſumus exorſi, quantum in nobis ſuit, demonſtrationibus firmiſſimis munire conantes eò perduximus, quò veteres haud potuiſſe nemo ibit inficias. Quod etiam in Specioſa tentauimus, vt quæ à primis cunabulis infans, & quaſi balbutiens, nunc adulta, magna, quæ prius alioqui non poterat, expeditè, facilèque perficiat.

Vt verò planè conſtet quanta ſit eius vis, quanta eius vtilitas, non alienum ab inſtituto duximus, Theoremata, ac Problemata reſoluta in medium afferre, vt præſtantiſſima Matheſeos pars noſtris conatibus, quaſi vt ità dixerim, abſolueretur. Quamobrem nonnihil ſpei nobis blanditur Mathematicarum diſciplinarum plures ſuturos eſſe cultores; niſi ardua difficultas pleroſque remoretur, impedimentoque ſit, quominùs in hanc Matheſeos partem libenter incumbant, atque præclaris huiuſmodi ſtudijs operam nauent. In eo propterea nobis eſt inſudandum, vt hanc Artem innumeris difficultatibus implicatam clarè, perſpicuèque tradidiſſe videamur. *Huius Artis difficultas.*

Vniuerſi Operis Argumentum. *Operis Argumentum.*

Prior eius pars Denominatos numeros contemplatur, ac proinde, quam Veteres Magnam Artem dixerunt, cumulatè declarat.

Pars altera verò eandem Artem, prout ſpeciebus, Logiſticen inſtituit ſuam, abundè, copioſèq; tradit.

Præſertim autem de Analyſeos, atq; Syntheſeos ratione diſputat. Vnde Methodum excogitandi, demonſtrandiq; Therremata Problemataq; docet, ac explicat.

Tertia deniq; Theoremata, ac Problemata in Artis illuſtrationem reſoluta exhibet.

IN PRIMAM OPERIS PARTEM

PRÆFATIO.

Mathematicarũ dignitas.

OMNIVM cuiuſcunq; ordinis diſciplinarum, ſi quæ præclaris, egregijſq; laudibus efferenda Sapientum omnium conſilio iudicetur, ſi quæ eſt, cuius nomen honeſtiſſimum, commendatiſſimumq; nobis par ſit ad Sydera vſq; tollere, ea profectò Matheſis eſt, quæ cæteris ſi non rei conſideratæ dignitate, ſaltem demonſtrationum firmitate, perſpicuitateq; mirum in modum antecellit. Vnam tamen ſi excipias, quæ id contemplandum aſſumit, cuius præſtantiam, atque excellentiam, nullis finibus contineri, luce eſt meridiana ſplendidius. Et certè, neque lubentiùs, quàm huic præſtantiſſimæ, neque liberiùs, quàm huic vtiliſſimæ laudantis operam impendi decet. Huius tamen innumeris laudibus hìc ſilentio inuolutis cum ſapientiſſimo Socrate ſat erit vnum illud adnotaſſe. Illos, qui præcipuo quodã naturæ munere ſunt ad Matheſin accõmodati ad omne diſciplinæ genus acutiores apparere, qui verò hebetiori ſunt ingenio, hac vna eruditos nihil etiam amplius vtilitatis aſſequentes ſe ipſis ingenioſiores effici ſolere; quæ namque dicebat ipſe, difficiliorem, addiſcenti, cogitantiq; laborem, curamq; ingerat, non facilè vllam ex rationalibus, honeſtiſq; diſciplinis præter hanc inuenies; quod autem difficile, ac arduum, illud idem præclarũ aſſerebat eloquentiſſimus Tullius. Matheſeos autem illa pars illuſtris, cæteris dignitate præſtans, celebris, atq; ſummopere commendanda, nomine Algebra nuncupata, quæ ſi rem inſpicias, quam ſua contemplatione perſequitur, ſecretiora naturæ myſteria perſcrutatur; & quaſi ſolerti labore, illius dum arcana rimatur: eadem ſumma fælicitate, non citra mortalium admirationem, præter omnem ſpem conſequitur.

Socratis dictum.

Algebra Mathematicarũ præſtantiſſima pars.

Hæc illa, quæ de natura celebriora myſteria auarè occultante, quaſi victoriam reportans, atq; triumphans: iurè, ac meritò poteſt gloriari. Hoc planè mirandum, quòd illa reluctante, quæ in veritatis theſauris clauduntur: quæq; ibi deliteſcentia, nulli conſequi licet; & ſi cæteras Matheſeos partes diligenter percurras, vni huic obuiam occurrunt. In hoc fortaſſe deficiens iſta videbitur; quòd etiam ſi numeros tàm excelſa contemplatione perſequatur, non omnibus ſit numeris abſoluta; quòd ampliſſimarum, ac innumerarum ſuarum laudum præconia minimè valeat, ad numerorum calculum redigere. Sed caue, ne te iniquum iudicem præbeas; hoc enim neſcio quid redolet ſublimitatis, ac eius præſtantiam arguit. Hæc autem non quadam probabilitate conijciens, ſed certiſſimis, euidentiſſimiſq; demonſtrationibus ſuffulta, ſua promit oracula; non minùs, quàm quæuis alia, quæ certitudine, ac perſpicuitate, cæteris omnibus creditur anteire. Verùm

enim

enim verò, ſi præſtantiſsimam hanc, quòd ſublimia myſteria recludat, occultiſsimas cauſas perſcrutetur; atq; adeo maxima tractet, certitudine ſumma, & ineffabili quadam perſpicuitate ſectetur: inuitus etiam fatearis, & æquo animo feras oportet, vt ad eius laudem immortalem hoc etiam decoris, quaſi coronis accedat; nimirum eam ſic inter cæteras eminere;

Quantùm lenta ſolent inter viburna cupreſſi.

Contende, ſi potes, amabò, vt aliam inuenias, quæ ex Matheſeos theſauro deprompta in ijs, quæ inter mortales vſu venire ſolent, non ſolùm maiori pompa triumphi, in debellanda mortalium ignoratia; ſed vtilitate maiori commendabilior videatur; Quid igitur mirum, ſi Græcia docta ſcientiarum mater, & altrix ſe hanc peperiſſe glorietur? Quid mirum ſi Palladi hoc tantummodo beneficio ſe deuinctam profiteatur? Nullum præclarius nimirum ei acceptum referens, quàm hoc ſplendidiſsimum animi decus. Multoq; minus peritiores Arabes nobis admirationem ingerent, quòd hanc quam maximè celebrarint; quandoquidem hae vna Problematibus innumeris facientes ſatis: eitra puluerem AEnigmata propoſita fæliciter enodantes, proprij nominis laudes ad ſydera ſuſtulerunt. Quo cum ingenij fertilitate ſe ſuperari à Græcis minimè paterentur; aduertentes magnum, atq; veracem eſſe ſolertiæ teſtem huius eximiæ contemplationis inuentum, quaſi Mineruæ portentum, non ijs acceptum, ſed ſibi referendum eſſe maluerunt. Hæc planè illuſtria ſunt, titaliſq; præclariſsimis decora: quæ etiam à ſagaciſsimis viris admirationem extorqueant. Longè tamen ſublimiora, quæ recentiorum perſpicacitate nouæ huius nominis Artis comparatæ iure, meritòq; debentur. Nihil in illius laudibus tàm excelſum, quod in hac longe ſublimius non ſit; nihil in illa tàm illuſtre ſplendeſcit, quod in hac præclarius non eniteat. Humanus animus hac vna ſic exornatus videtur, vt cæterarum diſciplinarum ornamenta in eo, quaſi deliteſcant huius obruta radijs. Nemini cælum ſyderibus exornatum, & ſculptum intueri licet, dum ingenti ſplendore Solis vndequaq; perfunditur. Si quis Dedalæo ingenio Matheſeos immenſum æquor conſcendere auderet, vehiq; pleniſsimis velis, quaſi archipirata profiteretur; hac deſtitutus, vtpote lumine viduatus, mea ſententia deſiperet; mihiq; videretur ille, de quo Lyricus ad hominis audaciam deteſtandam elegantiſsimè cecinit.

Græci ſe hanc adinueniſſe profitentur.

Arabes hanc Matheſeos partem, quam maximè celebrarunt.

Cum Græcis de eius inuentione certârit.

Noua Algebra maximè cómendabilis.

Horatius lib. 1. Ode 3.

Illi robur, & æs triplex
Circa pectus erat, qui fragilem truci
Commiſſit pelago ratem
Primus, nec timuit præcipitem Affricum.

Is adeo magnos difficultatum ſcopulos offenderet; vt

Vix durare carinæ
Poſſent imperioſius
Æquor.

Vtq; tibi longè magis conſtet huius Artis præſtantia, hominem illum animo, ſi placet, aduerte minus excelſa numerorum contemplatione contentum, requiſitum, vt vel ad humanam neceſsitatem in ijs, quæ inter mortales vſu venire ſolent: vel ad ſolius veritatis indagationem Problema, vel Theorema explicet, parum etſi difficultatibus inuolutum: illum enim perſpicies, vndiq; vexatum anguſtijs, huc illuc curſitantem, vt vnius, vel alterius, melioris notæ monumenta verſans, quod in optatis habet aſſequatur. At verò, vt ſumma ſpe animatus varia, diuerſaq; volumina adit, & conſulit: ſic exanimatus eadem abijcit, quòd ſe in caſſum laboraſſe cognoſcat; conſpicies illum

Eius dignitas magis declaratur, & vtilitas explicatur.

mæſtè

Vtilitas eius comprobatur.

in eſtè cogitantem, mærore contabeſcentem, tædioq; affectum ſic, vt nihil ſupra. Non ſecus ac iter aggreſſus, cum occidente Sole, vel nullus eſt color rebus, ad diuerſorium peruenire non licuit: deuius, tenebris horrendis deterritus progredi nequit, inſcius quid agat, ſpe tantum futuræ lucis ad optatum locum ſe peruenturum ſiſtit. Ita quidem ille, cuiuſdam demonſtrationis aggreſſus iter; lumine veritatis, quod ex elementis Matheſeos tenue quidem affulget, omnino deſtitutus, tenebris inuolutus gradum ſiſtet, quo ſe vertat ignorans non niſi huius Diſciplinæ, tanquam nouæ radiantis præſidio lucis iter proſequuturus. Ferax adeo campus Matheſis eſt, quo certè non feracior alter: at in latebris veritas conſtituta non obuia occurrit. Hæc autem venatrix eſt; quæ ſagaci quodã, vt ita dicam, odoratu cuncta indagat, rimatur, perquirit, aſſequitur. Veritas adeo iacet occulta, vt Sapiens ille in profundiſſimo puteo, ſibi eam eſſe perſuaſerit; inde minimè exire, niſi videlicet Saturni, hoc eſt diuturni temporis vi extrahatur. Sed hoc inuito Matheſeos iſta pars veritatem abſconditam, quàm citiſſimè extrahit.

Cæteræ Matheſeos partes commendantur.

Geometria.

Cæteræ quoque Matheſeos partes digniſſimæ ſunt, vt ſummis laudibus efferantur. Geometria quidem ſuis gloriari poteſt. Hæc illa, qua præditum eſſe oportebat adeuntem Platonis academiam. Hæc illa, quæ admirandis operibus mortales delectat, eorundem conſulit vtilitati, ampla nimirum terrarum ſpatia, Turrium, atque Montium celſitudines, profunditates abyſſi, Maria, Terras, Cælos, vniuerſum Orbem ſedulò dimetitur.

Aſtronomia.

Nec Aſtronomia deſtituitur præconijs ſuis, vtpote illa, quæ duabus alis Geometria, & Arithmetica ſuffulta Cælum conſcendit, illius, Syderumq; perennem conuerſionem, ortum, occaſum, ſua contemplatione perſequens immanem illorum cupiditatem explet, qui animi ſublimioris impulſu in illa fulgentiſſima lumina rapiuntur.

Muſice.

Muſice quoque iucundiſſima, & vtiliſſima tractat: Quid Melodia ſuauius? Quid humano generi vtilius? Dorius quandoquidem concentus prudentiæ largitor eſt, & caſtitatis effector. Phrygius pugnas excitat, votumque furoris inflammat. AEolius animi tempeſtates tranquillat, ſomnumque placatis affert. Lydius intellectum obtuſis acuit, & terreno deſiderio grauatis cæleſtium appetentiam inducit animorum formator eximius. Magna hæc profectò ſunt, de quibus Modulatrix diſciplina ſuam tractationem inſtituit.

Mechanice.

Quid verò non operoſum, non mirandum Mechanice præſtat? Hæc etiam inuita Natura ingentia pondera ſurſum euolare facit. Hæc machinamenta molitur, quibus mortalibus, prodigioſa quidem Dedaleis operibus, & Archimedeis atteſtantibus patrare licet. Cæteræ omnes laudibus ſunt quidem cumulatiſſimæ.

Arithmetica cæteris præfertur.

Sed nulla maioribus, quàm Arithmetica, quàm præcipua eius pars, quæ conſueuit Algebra nuncupari, quàm denique hæc noua excogitata. Vniuerſæ Arithmeticæ gloriam, & vtilitatem prætermitto; cum eam neminem latere mihi perſuaſum habeam.

Eius æſtimatio apud Romanos.

Vna tamen ſufficeret Romanos olim ſagaciſſimos, atque ſeueriſſimos in liberis educandis, in nulla alia diſciplina paſſos eſſe pueros, quàm in hac ſe iugiter exercere.

Algebra præſtantiſſima Arithmeticæ pars.

Neque hìc proſequar laudũ ampliſſimarum præconia ſuperius adumbrata veteri, quæ debentur Algebræ.

Noua celebratur, vtpote veteri præſtantior.

Noua tantum ſibi gloriæ vendicauit, vt Matheſeos vniuerſæ ditiſſimum theſaurum, nulla expeditius, vel fælicius, quàm hæc, quaſi clauis in Cæleſti quadam officina elaborata gratia communis mortalium vtilitatis, etiam reluctante Natura poſsit aperire. Celebris igitur iurè credita Matheſeos pars, quæ plura fæliciter occultata detegit, quàm aliæ ſuſcipiant detegenda; plura explicat, & abſolutiſſimè tractat, quàm aliæ delibent; & quidem genere maxima, occultatione cauſarum difficillima, conſecutionum implicatione laborioſiſſima, multiplicitate combinationum implicatiſſima, atque demum temporis

diuturni-

diuturnitate longiſsima. Hæc analyſi quandoquidem inſtituta ſua, eò progreditur ad veritatem indagandam, quò alteri minimè licet peruenire. Per analyſeos veſtigia huic demonſtrare conceditur, quod alijs omninò denegatur: adeo nimirum, vt veritas nullos fines agnoſcens, ab hac vna finibus coerceri patiatur; quo non immeritò dicerem Palladem è cætu literatorum, nullum maius habere vectigal, quàm illud, quod huius diſciplinæ cultor labore exigit ſuo: ac proinde non mirandum, ſi verticem extollens pronunciauerit,

Nullum non Problema ſoluere.

Vieta ad calcem Iſagoges.

Vtramq; nos autem explicandum: nouis inuentis, firmiſq; demonſtrationibus muniendam ſuſcepimus; nam etiam quicunq; ſunt habiti mortalium Sapientiſsimi, multa ſciſſe dicuntur, non omnia, neq; comtemplationibus ſuis maiores noſtri veritatis omnia veſtigia detexerunt. Veritas enim omnibus patet, nondum eſt occupata: multum etiam ex illa futuris relictum eſt; vt Moralis aſſerebat, eoſq; docendo ſterilis non euaſit, vt nobis nihil ſui poſsit impertiri.

Seneca.

Ad hanc autem diſciplinam, quod attinet, ſi quid ſibi velit nomen eius inquiras, ſcito illud Arabicum eſſe reſtaurationem ſignificans, ſic appellata, quòd reſtauratione paſſim vtatur: non à nomine Gebra appelatione deſumpta, quaſi ab auctore ſuo; quem potius credendum opinor Diophantum Alexandrinum initio librorum ad Dionyſium ſibi huius diſciplinæ gloriam inuentionis deferentem, atque teſtantem ad ſuam vſq; tempeſtatem in tenebris latitaſſe, inquit enim. Quod negotium, vt videtur fortaſſe difficilius (quippè ignotum adhuc) cum animi incipientium ad bonam de re dextrè conficiendam, ſpem concipiendam nequaquam ſint procliues. *Varia eſt quoq; nomina ſortita; quandoquidem Almucabula nuncupari conſueuit, quòd oppoſitione inter duo extrema vtatur nomine illo ſignificata. Ars etiam dicitur magna, quod cæteris Arithmeticæ partibus dignitate longè antecellat; Regula verò Radicis, vel cenſus, ſeu quadrati ſolet nuncupari, quod in enodandis Aenigmatibus, Radicibus, & Quadratis vtatur. Nos autem Itali Regula* della Coſa, *conſueuimus appellare; cum Radicem quæſitam* Coſa, *nuncupemus.*

Nomen huius artis explicatur.

Vateris Algebræ inuitor.

Diophantus Alexãdrinus in proœmio.

Varia nomina ſortita eſt Almucabula dicitur.

Ars magna

Regula rei, vel cenſus dici conſueuit.

Nouæ autem huius inuentorem Franciſcum Vietam extitiſſe ambiget nemo; Diophantæa proinde, vt nuncupabitur illa, ſic etiam hæc Vietæa dicetur Illa, quod numerorum characteres adhibeat Numeroſa ſolet appellari; hæc autem quod Alphabeti formas: ſpecieſq; frequentet ſpecioſa nuncupabitur.

Noua Algebra inuentor.

Vetus cur numeroſa dicatur.

Noua cur ſpecioſa.

At verò deſumentes initium à Numeroſa, tanquam à vetuſtiori, Specioſæ etiam fundamento, noſtram tractationem aggrediemur. Nominibus autem explicatis, ſi quis quæreret, quid ipſa ſit, fiet voti compos, ni fallor, hac intellecta definitione. Algebra ſcientia eſt, quæ ex datis magnitudinibus æqualitatis beneficio magnitudinem ignotam adinueniens, explicans, atq; demonſtrans Problemata non ſoluta ſoluit; malè ſoluta reijcit; atq; Theorematum veritatem inquirit. *Quæ quidem definitio ſatis videtur, ni fallor, huius facultatis naturam explicare, quemadmodum facilè conſtabit ijs, qui in hoc puluere fuerint, etſi mediocriter verſati.*

Algebra definitio.

At verò in vtraq; Algebra laboribus exantlatis, & vtriuſq; artis explicatione abſoluta, ad iucundiſsimum, vtiliſsimumque tractatum de Methodo, tàm noua, quàm antiqua Reſolutionis, & Compoſitionis Mathematicæ faciemus gradum: in quo vnicuique maximam vtriuſque Algebræ vtilitatem licebit intueri, animaduertenti

Noua, & exactior Operis diuiſio, ac ordo.

tenti magna facilitate, nullo negotio ea Problemata reſolui: Aenigmatibus fieri ſatis, quæ Matheſeos profeſſoribus plurimum negotij faceſſunt. Huic autem contemplationi veteris Algebræ vſum ad Geometricè Problemata reſoluenda non inutiliter annectemus: vnde conſtabit veterem Logiſticen, non tàm anguſtis finibus coerceri; quemadmodum nonnullis videbatur; eos enim longè ampliores in Aenigmatibus enodandis oſtendemus, quorundam Problematum exemplo, quæ quidem huius Artis, tàm veteris, quàm nouæ præſidio deſtituta prorſus videbantur. His autem ea, quæ conſtructione operaria non egent, ſubijciemus, poſtremum locum arti, methodoque deprehendendi, & impoſſibilitatem, & vanitatem Problematum relinquentes (quod etiam in Numeroſa tetigimus) qua quidem contemplatione huius celebris, peneque Diuinæ Matheſeos partis extrema perſequemur.

CAROLI

Digitized by Google

CAROLI RENALDINII
ALGEBRA VETVS.
ANALYTICES
PARS PRIMA.
De Numeris Denominatis, ſiue Poteſtatibus.

CAPVT PRIMVM.

Numeri, quos propriè Algebra ſpeculatur.

ETSI ferè omnes, qui diſciplinam hanc tractandam ſuſceperunt, triplex numerorum genus contemplentur; nihilominus ſi rem ipſam introſpicere diligenter placet, comperiemus vnicum eſſe in hac Arte tractandum, vtpote illi peculiare, & proprium: quandoquidem duo reliqua, nimirum irrationalium, ſiue ſurdorum ſimplicium, & compoſitorum, potiùs ad vulgarem Arithmeticam pertinent, quos ibi nos latè proſecuti ſumus. Ad hanc igitur partem illud propriè genus numerorum attinet, qui in quauis Geometrica progreſſione ab vnitate ſumunt initium; qui quidem varia ſunt nomina ſortiti; propterea quod quibusdam placuit eos Quantitates, Species, Dignitateſque nuncupare. Maluerunt alij numeros eoſdem Coſſicos, itemque Figuratos, atque Denominatos appellare. Franciſcus autem Vieta Mathematicus præſtantiſſimus Diophantum Alexandrinum imitatus, Poteſtates eos nuncupauit. Cum autem noſtri conſilij ſit nedum Vietæam, ſed etiam Diophantæam Algebram pertractare, propterea hoſce numeros contemplabimur, primò quidem eorum nomina, & characteres explicantes, ad eorundem Algorithmos deinceps progreſſuri.

In propoſita igitur quacunque Geometrica progreſſione initium deducente ab Vnitate, Primus terminus, hoc eſt vnitas, ſimplicem, ac abſolutum repræſentat numerum. Cæterùm *Progreſſio Geometrica eſt ſeries plurium numerorum ſe in eadem proportione ſuperantium.* Vt eſt e. g. hæc numerorum ſeries 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. Vel hæc 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. Prima progreditur per proportionem duplam, adeo vt quilibet numerus duplo maior ſit eo numero, qui eum proximè antecedit. Secunda verò per proportionem triplam.

Progreſſio Geometrica quid.

Vtraque autem harum progreſſionum ab 1, incipit, poteſt, autem inſtitui progreſſio Geometrica initium non deſumendo ab 1, ſed à quouis numero; vt ſi eſſet hæc numerorum ſeries 3, 6, 12, 24, &c. vel 5, 10, 20, &c.

Sed eò redeat vnde huc flexit oratio. In qualibet Geometrica progreſſione ſumente initium ab Vnitate, Primus terminus, hoc eſt vnitas numerum abſolutum, ac ſimplicem repræſentat. Secundus autem terminus vnitatem ſequens Radix omnium ſequentium terminorum dicitur: hic enim eſt Radix tertij termini; cum ex eius multiplicatione in ſe ipſum procreetur tertius; & ex multiplicatione eiuſdem ſecundi in tertium procreetur quartus; & ex multiplicatione eiuſdem ſecundi in quartum

producatur quintus, & ſic deinceps. Hæc eſt enim numerorum continuè ab vnitate proportionalium natura. Si enim fuerint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales; conſtat ex demonſtratis ad 10. Propoſitionem Octaui lib. Elementorum; ſecundum ab Vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc tertium fieri quartum, ex eodem autem in hunc quartum produci quintum,

Demonſtratio Euclidæa.

& ita deinceps. Demonſtratur enim ibi, ex eo quia C, D, E, A, ſunt continuè proportionales ab vnitate; D, tertium numerum ab vnitate fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E. Cum enim ſit, vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad E, & E, ad A, æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A; At verò vnitas metitur ipſum C, per C, ergo C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. Proinde C, ſeipſum multipli-

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.

E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.

D, 9. I, 18. G, 36.

C, 3. F, 6.

1.

Vnitas.

cans fecit D, multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A, ob id erit ſecundus ab vnitate ex numeris continuè proportionalibus radix omnium ſequentium, &c.

Huiuſmodi numeri quomodo dicatur.

Hi porrò numeri cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis, Denominati, Coſſici, & Dignitates Algebricæ nuncupantur. Characteres autem, & nomina horum terminorum non eadem ſunt apud omnes; proinde iuxta duplicem viam, Diophantæam vnam, ac Vietæam alteram in medium afferemus.

Nomina, & Characteres iuxta quoſdam Analyſtas.

N. Numerus ſimplex, & abſolutus.

** Arithmos, Nominum, & characterum deſignatio.*

1. ℞. *Radix, Latus, Italicè verò* Coſa, *Latinè Res, &* Αριθμὸς *ſecundum Diophantum; Ab aliquibus verò Tantum appellatur, & ſolet hoc pacto deſignari, nimirum co.* 2.
2. *Q. Quadr. Zenſus, Cenſus, Potentia. Hanc autem Poteſtatem aliqui ſic deſignant ce.* 4.
3. *C. Cubus aliqui eum ita deſignant cu.* 8.
4. *QQ. Quadrato-quadratus, Biquadratus, Cenſicenſus, Zenſizenſus, Potentia potentia, & hoc pacto depingitur ce, ce.* 16.
5. *SS. Primus relatus, Solidus primus, Surdeſolidus, Surſolidus, Superſolidus, & à quibuſdam ſic deſignatur Rel. P.* 32.
6. *QC. Quadrato-cubus, Cenſi-cubus, Zenſi-cubus, Potentia cubi, Cubi-Zenſus, Quadrati-cubus, Cubi-quadratus; & hanc Poteſtatem ſic aliqui deſignarunt ce, cu. Quamobrem, vt ſignificarent quatuor quadratocubos, hoc modo ſcribere ſolebant 4 ce, cu, ad ſignificandos octo quadratocubos, ita ſcripſerunt 8. ce, cu, &c.* 64.
7. *BSS. Secundus relatus, Solidus ſecundus, Bſurdeſolidus, Biſurdeſolidus, Surſolidus, Superſolidus ſecuudus, Relatus ſecundus, & ſoletetiam hoc pacto depingi Rel. 2.* 128.
8. *QQQ. Quadrato-quadrato-quadratus, Triquadratus, Cenſi-cenſi-cenſus, Zenſi-zenſi-Zenſus, Quadratus quadrati-quadrati; & à nonnullis ita deſignatur ce, ce, ce,* 256.
9. *CC. Cubi-cubus, Cubus-cubi, Bicubus, & à pleriſq; hic adhibetur character, cu, cu.* 512.
10. *QSS. Quad. primi relati, Quadrati ſolidus, Cenſus primi relati, Zenſurdeſolidus, Potentia primi relati, Quadr. Surdeſolidi, Surdeſolidus quadrati. Aliqui eum ſic deſignant Ce. Rel. P.* 1024.
11. *CSS. Tertius relatus, Solidus tertius, Cſurdeſolidus, Zenſurdeſolidus. Superſolidus tertius, & nonnulli hoc vtuntur charactere Rel. 3.* 2048.
12. *QQC. Quadrato-quadrato cubus, Cenſi-cenſi-cubus, Zenſi-zenſi-cubus, Cubus de potentia potentia.* 4096.
13. *DSS. Quartus relatus, Solidus quartus, Dſurdeſolidus, & à quamplurimis ita deſignatur Rel. 4.* 8192.

Cæterum

Cæterùm diuerſitatem characterum, & nominum operæ pretium duximus adnotare, ne diſcendi ſtudioſum in varijs libris perlegendis vexet, aut remoretur ambiguitas. Verùmenimuerò præter hæc, oportet aduertere characterem N, ſignificare numerum abſolutum, & ſimplicem: adeò vt numerus cui appoſitus fuerit, pro abſoluto, & ſimplici habeatur; itaut 5 N. nil aliud ſignificent, quàm quinq; vnitates ſimplices, & abſolutas. At verò quia hic character plerumq; negligitur, & omittitur, nec ſolet numeris apponi, quando pro abſolutis habendi ſunt; ob id ſiuè aliquis numerus hoc ſignum gerat, ſiuè non, accipi debet pro numero abſoluto.

Secundum characterem, dicebamus eſſe ℞, atq; ſignificare Radicem, vel Rem, adeo vt numerus, cui ſit appoſitus, à Radicibus denominetur. Itaq; 6 ℞, ſignificant ſex radices, vel res: ita fit, vt ſi progreſſio Geometrica habeat e. g. 2. in ſecundo loco: 6 ℞, ſint duodecim vnitates: cum vnius radicis pretium ſit 2. ſi verò habeat 3. in ſecũdo loco; 6 ℞, ſint decem, & octo vnitates, cum vnius radicis pretium ſit 3. & ita de reliquis.

Secundus character eſt ℞.

Dicebamus tertium characterem eſſe Q, & ſignificare Quadratum; hunc eundem characterem Cenſum à plerisq; notauimus appellari. Itaut 6 Q, ſint ſex Quadrati, vel Zenſi; quo fit, vt ſi tertius numerus progreſſionis Geometricæ ſit 4. ſit inquam, vt 6 Q, ſint viginti quatuor vnitates; ſi verò 9, ſit tertius numerus ab vnitate 6 Q, valebunt quinquaginta quatuor vnitates.

Tertius character eſt Q.

Quartus character C, cum denotet cubum, 6 C, ſignificabunt ſex cubos; adeo vt ſi cubus fuerit 8, neceſſariò 6 C, ſint 48. vnitates; ſi cubus fuerit 27, & 6 C, ſint 162. vnitates.

Nomina, & Characteres iuxta Diophantum, & Vietam.

1.	*N.*	*Latus, ſiue Radix.*	2.
2.	*Q.*	*Quadratus.*	4.
3.	*C.*	*Cubus.*	8.
4.	*QQ.*	*Quadrato-quadratus.*	16.
5.	*QC.*	*Quadrato-cubus.*	32.
6.	*CC.*	*Cubo-cubus.*	64.
7.	*QQC.*	*Quadrato-quadrato-cubus.*	128.
8.	*QCC.*	*Quadrato-cubo-cubus.*	256.
9.	*CCC.*	*Cubo-cubo-cubus.*	512.
10.	*QQCC.*	*Quadrato-quadrato-cubo-cubus.*	1024.
11.	*QCCC.*	*Quadrato cubo-cubo-cubus.*	2048.
12.	*CCCC.*	*Cubo-cubo-cubo-cubus.*	4096.
13.	*QQCCC.*	*Quadrato-quadrato-cubo-cubo-cubus.*	8192.

Liquet ex hactenus dictis à Diophanto, Vietaq; diſſentire nonnullos; etenim quadrato-cubus apud Diophantum, & Vietam inter Poteſtates quintum ſortitur locum, apud reliquos autem ſextum. Inſuper apud Diophantum, atq; Vietam cubo-cubus eſt ſexta Poteſtas; at apud alios nona, & ſic de reliquis, vt aduertentibus cernere licet. Nos autem ad denotandam Radicem loco, N, vtemur R, in cæteris non diſſentimus, & charactere N, vtemur ad ſignificandum numerum abſolutum.

Non omnes conueniunt cũ Diophanto in nominandis dignitatibus.

N quid ſignificet.

Supereſt, vt hic methodum aperiamus, qua poſſimus inquirere characteres datis locis poteſtatum, & contra; idque iuxta duplicem viam: & qua arte Poteſtates ipſas in infinitum propagare valeamus. Interim primò videamus, quid nam ſibi velint denominationes illæ, & qua ratione ducant originem à termino cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab Vnitate initium deſumente. Animaduertendum autem eſt Poteſtatum loca denotari per numeros diſpoſitos ſecundùm naturalem ſeriem, initio deſumpto ab vnitate, qui quidem numeri à pleriſque dicuntur exponentes, & ab alijs indicantes; cur autem ſic dicantur, mox videbimus.

Exponentes numeri, qui dicantur.

Initium fit, vt dictum eſt ab Vnitate, loquendo de Poteſtatum exponentibus; alio-

Digitized by Google

quin naturalis progreſſio ducit originem ab o, exponente numeri abſoluti, ſi tamen exponens propriè dici poteſt.

Explicatur deſcriptio progreſſionum naturalium, & Geometr. Superior tabula explicatur.

Ex ſuperiori deſcriptione à nobis poſita perſpicuum relinquitur ſignificatum diuerſarum appellationum, & origo earundem à terminis Geometricæ progreſſionis.

Medio loco poſuimus characteres, quibus Poteſtates deſignantur: ad læuam legentis poſuimus progreſſionem naturalem, numerorum incipientium à o, quorum eſt munus exponere Poteſtatum characteres medio loco poſitos, terminoſque Geometricæ progreſſionis ad dexteram legentis.

Cur numeri naturalis progreſſionis dicantur exponentes.

Prima cauſa. Nota o, quid ſignificet.

Pluribus autem de cauſis dici poſſunt Exponentes; Prima eſt, quia per terminum o, reſpondentem numero abſoluto denotatur ipſe numerus ſimplex; & abſolutus ex vnitatibus compoſitus, proinde nullo exponente inſignitur; niſi hanc figuram o, exponentem dicere velimus; hunc numerum abſolutum aliqui, & nos cum ipſis hoc deſignauimus charactere N; etſi talem eſſe intelligendum velimus cum aliquis numerus ſine vlla nota ponitur; Vt, 2, 4, 6, 20, &c. Significamus autem per notam o, numerum illum nullam habere denominationem, ex numeris denominatis,

Secunda ratio

Secunda cauſa, cur commemorati numeri exponentes dicantur, ea eſt, quia per ſecundum terminum eiuſdem naturalis progreſſionis reſpondentem characteri N, ſecundum Diophantum, & Vietam, & ſecundum nos R, & numero 2, ex alio latere in Geometrica progreſſione conſtituto, denotatur R, hoc eſt radicem eſſe primam denominationem in numeris Denominatis, vocarique Radicem; itaut numerus ſecundus in Geometrica progreſſione, primam ſortiatur denominationem; & ſic de reliquis diſcurrendum eſt. Tertiùs deinde terminus 2, oſtendit tertium numerum Geometricæ progreſſionis eſſe ſecundam denominationem, & appellari Quadratum, & ita de cæteris intelligendum eſt.

Tertia ratio.

Tertia ratio eſt, quia quilibet duo numeri exponentes appellati, ſi inuicem multiplicentur, producunt exponentem illius characteris, qui componitur ex illis characteribus aſſumptorum exponentium, ſi loquamur ſecundum communem viam; at iuxta Diophantum, ſi exponentes ſimul addantur fit exponens poteſtatis, quæ conſtat ex characteribus aſſumptorum exponentium, vt infra dicemus. Exemplum in via communi. Si ſumatur numerus 2, exponens Quadrati, & 3, exponens Cubi, ducanturque ad inuicem, producitur numerus 6, exponens poteſtatis, characteriſque QC; ſcilicet, Quadrato-cubi; quæ quidem poteſtas, conſtat ex Q, & C, poteſtatibus aſſumptorum exponentium 2, & 3, ſed iuxta Diophantum addantur ad inuicem 3, & 3, fiet numerus 6, exponens poteſtatis CC; & ſic de reliquis.

Quarta ratio.

Quarta ratio, quia ſecundum communem viam, ſi diuidatur, quicunque numerus maior per minorem quemcumque; quotiens, integer ſi fuerit, deſignat exponentem characteris, qui relinquitur; facta ſubtractione characteris numeri exponentis diuidentis ex charactere numeri exponentis diuiſi. Vt ſi 6, exponens huius characteris QC, diuidatur per 2, exponentem characteris Q, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui quidem relinquitur, ſi ex hoc charactere QC, exponentis 6, tollatur character Q, exponentis 2. Prætereà ſi numerus 12, exponens characteris QQC, diuidatur per 4, exponentem characteris QQ, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui relinquitur, ſi ex QQ, tollatur QQ. At iuxta Diophantum, ſi componens numerus exponens, ſubtrahatur à ſuo compoſito exponente, relinquitur exponens characteris, qui remanet, ſi ſubtrahatur character ſubtracti exponentis à charactere exponentis, a quo fit ſubtractio.

Quinta ratio.

Quinta ratio eſt, quia deſignant idem exponentes progreſſionis naturalis numerorum; deſignant inquam quot proportiones Geometricæ progreſſionis intercedant inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis, & vnitatem: exponens enim numerus ſemper eſt vno minor, quàm numerus terminorum progreſſionis Geometricæ; tot ſunt enim proportiones ipſæ, quot ipſi termini vno dempto, vt 1, ſupra R, & ſupra 2, ſignificat inter 2, ſiue Radicem, progreſſionis Geometricæ, atq; vnitatem, vnicam contineri proportionem 2, ad 1. At verò 2, ſuprà Q, & 4, denotant inter 4, ſiue Q, hoc eſt quadratum, atq; vnitatem, duas comprehendi proportiones 4, ad 2, & 2, ad 1. Præterea 3, ſupra C, & 8, ſignificant

inter

Digitized by Google

inter 8, ſiue C, & vnitatem tres cadere proportiones, nempè 8, ad 4, & 4, ad 2, & 2, ad 1.

Sexta ratio.

Sexta ratio eſt, quia terminns naturalis progreſſionis denotat geneſin ex ipſa radice termini ſibi reſpondentis in Geometrica progreſſione, docet nimirum, quot repetitiones Radicis requirantur ad illius termini procreationem; vt figura 2, reſpondens numero 4, & Q, declarat Quadratum, ſiue ſecundam denominationem produci ex multiplicatione Radicis bis poſitæ: etenim ſi radix 2, bis ponatur hoc modo 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, procreabitur Quadratus 4: ita per numerum 3, reſpondentem numero 8, & C, ſignificamus Cubum, ſiue tertiam denominationem, produci ex Radice ter poſita. & multielicata; etenim ſi Radix 2, ter ponatur hoc modo 2, 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, & numeri 4, producti fiat pariter multiplicatio in 2, emerget Cubus 8. Præterea per numerum 5, reſpondentem in via communi SS, & 32, denotatur oportere quinquies repetere 2, Radicem progreſſionis in proportione dupla, vt 2, 2, 2, 2, 2, facta namque multiplicatione, emergunt 32: & eodem modo ſecundum Diophantum, quoad characterem QC, cui reſpondet numerus 5.

Septima ratio.

Septima ratio eſt, quia Arithmeticorum terminorum additio Geometricorum terminorum præcipuè multiplicationi reſpondet; itaut numerus emergens ex additione terminorum Arithmeticæ progreſſionis, reſpondeat producto numero è mutua multiplicatione terminorum Geometricæ progreſſionis, qui à numeris illis exponebantur; ſic diuiſioni reſpondet ſubtractio. Vt ſi ſimul addantur 2, & 5, numeri progreſſionis Arithmeticæ faciunt 7. Ita ſe habent Q, & SS, quorum exponentes ſunt illi numeri 2, & 5, nimirum 4, & 32; etenim Q, eſt 4, & SS, eſt 32, ſi inter ſe multiplicentur, fiunt 128, videlicet BSS, ſecundum viam communem; huius autem exponens eſt 7: ita ſecundum Diophantum, ſi 2, & 5, ſimul addantur fiunt 7; ita Q, & QC, quorum exponentes ſunt 2, & 5, nimirum 4, & 32, ſi inter ſe multiplicentur, fiunt 128, ſcilicet QQC, cuius exponens eſt 7.

Explicatur hac ſeptima ratio tàm iuxta viam communē, quàm iuxta Diophantum.

32
4
———
128

Non diſſimili modo, ſicut 3, & 9, ſimul faciunt 12, ita C, & CC, nempe 8, & 512, quorum exponentes ſunt 3; & 9, inter ſe multiplicati producunt 4096, nimirum QQC, cuius exponens eſt, numerus 12, ſecundum viam communem, ſic etiam ſuo modo iuxta Diophantum. Ita quoque de ſubtractione dicendum, vt enim ſubtrahendo 5, à 7, remanet 2; ſic diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens eſt 7, per SS, nimirum per 32, cuius exponens eſt 5, emergit numerus 4, videlicet Q, cuius exponens eſt 2: eodem pacto ſicut ſubtrahendo 3, ex 12, remanet 9, ita diuidendo QQC, nimirum 4096, cuius exponens eſt 12, per C, nempe per 8, cuius exponens eſt 3, emergit CC, ſcilicet 512, cuius exponens eſt 9; idque ſecundum communem viam: non diſſimili modo res eueniet ſecundum Diophantum. Verùm hactenns de his, quæ videnda relinquimus apud alios: obiter enim hæc adnotanda duximus, ne mutila ſit tractatio.

Dato poteſtatis loco, ſecundum vtramq; viam characterem adinuenire, & contra.

Reuertamur ad id, quod erat nobis agendum; nimirum dato poteſtatis loco, ſecundum vtramqne viam, reperire characterem, & contra.

Characteres vel ſunt ſimplices, vel compoſiti.

Characteres, quibus ipſæ poteſtates conſignantur, vel ſimplices ſunt, ſiuè ſolitarij; vel compoſiti, nempè conſtantes ex pluribus. Simplices quidem ſunt tres, ſcilicet Quadratus, Cubus, & Surde ſolidus; reliqui autem compoſiti dicuntur, quòd ex ſimplicibus componantur. Hoc verò trifariam accidere poteſt, vel enim exponens eſt numerus compoſitus par, vel compoſitus impar, vel omnino incompoſitus, ſiue primus. Quid autem ſint numeri iſti: docet Euclides.

Lib. ſeptimo.

Explicatur ſuperior doctrina.

Eſto numerus compoſitus par poteſtatis exponens, cuius character quæritur 10: hic numerus diuidatur per 2, fit quotiens 5; hic autem cum ſit numetus primus non eſt rurſus diuidendus: reperiantur characteres debiti numeris 2, & 5, tanquàm exponentibus; & reperiemus characterem QSS, deberi numero 10: itaque Surdeſolidus quadrati, eſt poteſtas quæſita. Rurſus quæratur character expoſientis 12: diuidatur numerus hic per 2, ſit quotiens 6; qui rurſus cum ſit compoſitus par, diuidatur per 2, & fit quotiens 3; ergo 2, 2, 3, ſunt partes, quibus deſignantur characteres componentes characterem quæſitum. Inuentis ergo characteribus, qni numeris 2, 2, 3, debentur.

debentur, nempè QQC, fiet quæſitus eharacter QQC; atq; adeo poteſtas quęſita erit Quadrato-quadrato-cubus. Cæterùm huiuſmodi diuiſio inſtituenda eſt per numerum minimum primum; & ſi quotiens fuerit quoq; numerus compoſitus, diuidatur per numerum primum, nimirùm qui eum metitur; & hac methodo procedatur, donec occurrat quotiens nullam partem aliquotam habens; atq; adeo primus: quiquidem diuiſores, & ſi aliquandò contingat, vt idem ſæpius repetatur, vna cum quotiente vltimo ordinatim diſponantur, itaut maiores poſteriorem locum obtineant.

Quomodo ſit inſtituenda diuiſio.

Secundò hoc idem aſſequemur, indagando numeros, qui ſi inuicem multiplicentur, producant numerum exponentem oblatum; & inuentis numeris aſſignando eharacteres debitos. Vt ſi fuerit exponens 10; numeri, qui eum producunt, ſunt 2, & 5, quibus debentur Q, & SS, proindè eharacter debitus numero 10, erit QSS, atq; poteſtas erit Quadratus primi relati. Quod ſi eharacter vnius ex numeris, per quos fit multiplicatio, ignoretur; character, atq; poteſtas eadem arte reperiatur.

Secundus modus.

Si verò poteſtatis exponens fuerit numerus impar compoſitus, vt 9, diuidatur in partes, numeroſq; primos, quibus reperiantur characteres. Itaq; diuidatur per 3, & fit quotiens 3: hi verò, cum ſint numeri primi, non expoſcunt vlteriorem partitionem; debentur autem his, characteres C, & C; proinde quæſitus character erit CC, & poteſtas Cubo-cubus. Eodem modo ſi numerus exponens eſſet numerus 15: diuidatur enim per 3, & fiet quotiens 5; hiſce verò numeris debentur C, & SS, quamobrem quæſitus character erit CSS, & eius poteſtas Cubus primi relati, vel Cubiſurdeſolidus, nimirum decima quinta poteſtas.

Quid agidū, quando poteſtatis exponēs fuerit numerus impar.

At ſi numerus exponens oblatus fuerit numerus primus, vt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. eorum characteres, ac poteſtates ſic inueſtigantur; habita tamen hac animaduerſione, nempè à numeris primis ſignificari relatos, initio ſumpto à quinario numero. Cum itaq; exponentis numeri 5, character ſit SS, & poteſtas Primo relatus; ob id ſecundi numeri primi, nimirum 7, eharacter erit 2 SS, & poteſtas Secundus relatus: ſed ad confuſionem tollendam vtimur literis Alphabeti numerorum loco, initio facto à litera B; itaq; 2 SS, denotatur BSS.

Quando numerus exponēs oblatus fuerit numerus primus.

Huius autem methodi fundamentum eſt. Quoniam in quacunque Geometrica progreſſione, tertius terminus ab vnitate eſt quadratus, vt demonſtrat Euclides lib. 9. Propoſ. 8. quamobrem illius character eſt Q, cuius exponens eſt 2, numerus minimus primus: & quoniam (vt idem oſtendit) quartus ab vnitate eſt Cubus, ob id eius character eſt C, cuius exponens eſt 3, numerus autem ab vnitate ſextus, neq; Quadratus, neq; Cubus eſt, niſi exiſtente Quadrato, vel Cubo ſecundo, ab vnitate termino: proinde ſextus hoc deſignatur charactere SS; diciturq; poteſtas hæc, Primo-relatus. Et quoniam in reliquis numeris primis idem contingit: proptereà relati dicuntur, nempè Secundus relatus, Tertius relatus, &c. prout magis, vel minùs recedunt ab ipſo Primo relato.

Huius methodi fundamentum.

Lib. 9. Propoſ. 8.

Ad inueſtigandum poteſtatis locum, ſiue numerum exponentem hæc ars adhibenda eſt. Primò ad indagandum locum Poteſtatis, euius exponens eſt numerus compoſitus; ſingulis characteribus reſpondentes exponentes applicentur, & inter ſe multiplicentur: numerus enim ipſa multiplicatione procreatus locum indicabit poteſtatis.

Quomodo dato charactere, & Poteſtate reperiatur exponens, & locus.

Sit in quæſtione locus poteſtatis illins, cuius eharacter eſt QC: exponentes ſunt 2, & 3, numero 2, reſpondet character Q, & numero 3, character C; ſi 2, ducantur in 3, vel è contra, producitur numerus 6, exponens oblati characteris QC.

Exemplum ad ſuperiorem doctrinam illuſtrandam.

Quod ſi character propoſitus exponatur à numero incompoſito; accipiatur ex progreſſione primorum numerorum, numerus primus debitus propoſito characteri incompoſito. Hoc autem ſic aſſequemur: facto initio à quinario, numerentur ex ordine numeri primi; ſic enim facilè reperietur ille, qui propoſito characteri reſpondet. Eſto, exemplum. Sit propoſitus character CSS, nempè Tertius relatus: eius exponens erit numerus primus 11, eum hic ſit tertius à quinario inter numeros primos, in eorum progreſſione. Hactenus de via communi.

Quando propoſitus character exponitur a numero incompoſito. Exemplum.

In via

In via Diophanti, atq; Vietæ ita procedendum eſt. Poteſtatis exponens in binarios, ternarioſq; numeros reſoluatur, & his competentes characteres aſſignentur, ſic enim proſiliet quæſitus character.

Quomodo hæc omnia fieri debeant in via Diophanti, & Vietæ.

Quæratur character exponentis 10, hic numerus reſoluatur in 2, 2, 3, 3, repcriantur characteres hiſce numeris reſpondentes, nempè Q, Q, C, C, & emerget character QQCC, reſpondens exponenti 10.

Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina.

Ratio, fundamentumq; huius regulæ eſt. Quoniam poteſtates omnes iuxta Diophantum, Vietæq; conſilium, denominantur à Quadrato, vel Cubo, ſimplo, vel multiplo, vel mixto; à ſimplo, vt eſt Cubus, à multiplo, vt eſt Cubo-cubus; à mixto, vt eſt Quadrato-cubus: quo fit, vt quæuis poteſtas compoſita, pro partibus ſui exponentis, habeat numeros 2, vel 3: aut 2, & 3.

Huius regulæ ratio.

Poteſtates ſecundum Diophantũ vnde ſumant denominationem.

Si verò dato charactere, quæratur poteſtatis exponens, atq; locus; ſingulis characteribus, aſſignentur numeri competentes; etenim ſumma coaleſcens ex illis exponentem, & locum indicabit. Quæratur exponens, & locus, cuius character eſt QQCC: Quoniam exponentes ſunt 2, 2, 3, 3, quorum eſt ſumma 10; proindè dicemus exponentem characteris QQCC, eſſe 10, & locum eius eſſe decimum.

Quando dato charactere, quæritur poteſtatis exponens, & locus.

Exemplum.

Fundamentum eſt, quia ſecundum Diophantum, & Vietam exponens, & locus poteſtatis habetur ex additione exponentium.

Huius regulæ fundamentũ.

Exponens autem ſæpeſæpius plures habet reſolutiones; in huiuſmodi caſu, ea eſt vſurpanda diuiſio, quæ pauciores partes complectitur. Vt numerus 10, Primo reſoluitur in 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 2, 2, 3, 3: Secunda reſolutio præfertur primæ, etſi legitimè factæ; quandoquidem partes poſſidet pauciores. Sic etiam numerus 12, Primò reſolui poteſt in 2, 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 3, 3, 3, 3, Tertiò in 4, 4, 4, Quartò in 6, 6; Hæc poſtrema nimirum, quæ duas continet partes 6, 6, cæteris præferri debet.

Quando exponens plures habet reſolutiones; ea eſt vſurpanda, quæ pauciores partes habet.

Cùm autem miſta eſt poteſtas, præferantur depreſſiores ijs, quæ ſunt elatiores. Vt quadrati præferantur cubis, &c. Itaq; poteſtas decima, quantumuis hoc vtroq; modo deſignari poſſit, nempè QQCC, & CCQQ: nihilominus prior deſignatio adhibenda eſt.

Per quam autem viam incedere debeat Analyſta, adhuc res eſt in controuerſia, quam explicandam ſuſcepit Glorioſus Exercit. 2, Decadis 2: in cuius gratiam aduertit duplici methodo propagari poſſe poteſtates; communi, & ſingulari ad mentem Diophanti.

Quanam via ſit eligenda.

Duplici modo poteſtates propagari poſſũt.

Primo modo fit per multiplicationem poteſtatis in latus, quo pacto alia poſterior emergit. Vt latus in latus producit quadratum, quem δύναμιν hoc eſt Poteſtatem Diophantus appellat; & ſi quadratus in idem latus, ducatur producit Cubum, Cubus in idem latus facit quadrato-quadratum, & ſic deinceps.

Primus propagationis modus.

Secundo modo tanquam via ſingulari propagantur poteſtates, ſi multiplicentur poteſtates, & gignatur poteſtas. Vt ſi quadratus ducatur in quadratum, fit quadrato quadratus. Si verò quadratus ducatur in Cubum fit Quadrato-cubus, iuxta Diophantum: ſecundum alios fit primus relatus. Cubus autem in Cubum, facit Cubocubum, ad mentem Diophanti: ſecundum aliorum conſilium, facit quadrato-cubum; & ita deinceps.

Secundus propagationis modus.

Primus propagandi modus innititur ijs, quæ demonſtrat [a] Euclides; oſtendit enim, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales extiterint, tertium ab vnitate Quadratum eſſe, quartum autem Cubum, ſeptimum verò Cubum, & Quadratum. Cùm itaq; dignitates Algebricæ nil aliud ſint, quàm numeri Geometricè proportionales in progreſſione continua; ab vnitate, incipiente ob id ſatis videtur idonea prima propagationis via.

[a] Lib. 9. prop. 8.

Ratio pro primi propagationis modo.

Sit Geometrica progreſſio in proportione dupla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. Liquet numerum 64, ſimul quadratum, & cubum eſſe; etenim eius latus quadratum eſt 8, cubicum verò eſt 4; quapropter numerus 64, potiùs videtur appellandus Quadrato cubus, quàm Cubo cubus; Cumq; 32, neq; ſit quadratus, neq; cubus, non videtur dici poſſe quadrato cubus.

Exẽplum ad explicandam ſuperiorem doctrinam.

Diophanti opinioni fauet multiplicationis actus; etenim ſi 6 C, ducantur in 4 Q, produ-

Diophantus qua ratione innixus.

producuntur 24, QC, ſiquidem exponentes ſunt 2, & 3, quorum ſumma eſt 5. Quapropter QC, quintum ſortitur locum inter poteſtates; & ita de cæteris ſentiendum eſt.

Diſcrimi unde proueniat.

Diſcrimen à diuerſitate eorum, à quibus deſumuntur denominationes, certè proficiſcitur. Etenim ſecundum communem viam poteſtates denominantur ab ipſa multiplicatione quadratica, cubica, &c. Vt ſi cubus multiplicetur quadraticè, fit quadrato-cubus, ſi verò cubicè, fit cubo-cubus; vt ſi 8, multiplicetur quadraticè, fit numerus 64, nimirum quadrato-cubus.

Poteſtatum denominatio ad mentem Diophanti.

Iuxta conſilium Diophanti, denominatio poteſtatum deſumitur ab ipſis poteſtatibus, quæ multiplicantur. Quapropter ſi ducatur numerus cubus 8, in ſe, fit numerus 64; cum itaq; 64; producatur ex multiplicatione numeri cubi in numerum cubum; ob id non iniuria numerus 64, dicetur cubo-cubus. Cumq; numerus 32, producatur ex ductu numeri 4, quadrati in 8, numerum cubum; dicendus videtur quadrato-cubus.

Sententia, & rationes Glorioſi.

Glorioſus in memorato loco eligendam putat viam Diophanti, atq; Vietæ; tùm quia elegantior eſt, tùm quia ſic agere cogit multiplicationis actus: ſiquidem poteſtas gignitur per multiplicationem aliarum poteſtatum; poteſtas verò genita, denominatur a ſumma exponentium earum poteſtatum, quæ inter ſe multiplicantur.

Alia ratio.

Arguit præterea, quia omne compoſitum denominari debet à partibus componentibus; ergo poteſtas genita denominari debet à poteſtatibus ex quibus componitur; proindè quadratus ductus in cubum; efficit quadrato-cubum.

Refellitur opinio Glorioſi.

Nobis autem rationes allatæ conuincere non videntur; tùm quia non apparet hæc maior elegantia; tùm quia falſum eſt ad id cogi nos ab actu multiplicationis, quinimò is oppoſito perſuadet; Gratìs verò dicta putamus quæ Glorioſus ſubiungit dicens, non ab ijs, quæ multiplicantur, ſed ab actu multiplicationis petendam eſſe ipſam denominationem. Siquidem poteſtas quadrati denominationem accipit ab actu multiplicationis, non ab ijs, quæ multiplicantur. Poteſtas Cubi ſuam denominationem certè mutuatur ab actu multiplicationis, non autem ab ijs, quæ multiplicantur.

Vnde ſumatur denominatio poteſtatum.

Quamobrem etiam reliquæ poteſtates denominationem ab actu multiplicationis accipient.

Secunda ratio ad idem oſtendendum.

Secundò hoc idem ſuadetur, examinando, quid ſibi velint hi loquendi modi, Quadrato-quadratus, Quadrato-cubus, &c. Profertò comperiemus nihil aliud ſignificare, quàm radicem, ſic, vel ſic fuiſſe multiplicatam. Exempli gratia numerus 16, dicetur quadrato-quadratus, quia procreatur ex duplici multiplicatione quadratica radicis 2. Non ob id Diophanti, Vietæq; ſententiam reijcimus; ſolùm hæc innuiſſe volumus, vt perſpicuum fiat, rationes illas non conuincere.

Numerus 16. cur quadrato quadratus dicatur.

Quæ Analyſta mutuatur ex elementis Matheſeos.

Vberioris doctrinæ gratia nunnulla afferemus, quæ nimirum Analyſta mutuatur ab Elementis, quæq; vtriq; Algebræ inſeruiunt: Numeroſæ quidem peculiaria fiunt, ſi ad numeros contrahantur; eadem verò, ſi generaliter ſumantur, in Algebra Specioſa poterunt adhiberi,

Quæ

Quæ Analyſta mutuatur ab Elementis Matheſeos, hæc ſunt.

1 *Totum ſuis partibus æquari.*
2 *Quæ eidem æquantur, inter ſe eſſe æqualia.*
3 *Si æqualia, æqualibus addantur; tota eſſe æqualia.*
4 *Si æqualia, æqualibus auferantur; tota eſſe æqualia.*
5 *Si æqualia per æqualia multiplicentur; facta eſſe æqualia.*
6 *Si æqualia per æqualia diuidantur; orta eſſe æqualia.*
7 *Si quæ ſunt proportionalia directè, eſſe proportionalia inuersè, & alternè.*
8 *Si proportionalia, ſimilia, proportionalibus ſimilibus addantur; tota eſſe proportionalia.*
9 *Si proportionalia ſimilia, proportionalibus ſimilibus auferantur; reſidua eſſe proportionalia.*
10 *Si proportionalia, per proportionalia multiplicentur; facta eſſe proportionalia.*
11 *Si proportionalia, per proportionalia diuidantur; orta eſſe proportionalia.*
12 *A communi multiplicatione, vel diuiſione, ſeu communi multiplicatore, vel diuiſore, æqualitatem non immutari, vel rationem.*
13 *Facta ſub ſingulis ſegmentis, æquari facto ſub toto.*
14 *Facta continuè ſub magnitudinibus, vel ex ijs continuè orta eſſe æqualia; quocunque magnitudinum ordine, ductio, vel applicatio fiat.*
15 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; quod autem fit ſub extremis terminis, æquale ſit ei, quod fit à medio in ſe, vel ſub medijs; ſunt proportionales, & è conuerſo.*
16 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; & ſit, vt prima ad ſecundam, ita ſecunda illa, vel tertia, quæpiam ad aliam: erit quod fit ſub extremis terminis, æquale ei, quod fit ſub medijs.*

De prioribus his propoſitionibus vſq; ad ſextam incluſiuè, non eſt cur verba faciamus; cum per ſe pateant. *Septima explicatio, ac demonſtratio.*

Ad ſeptimam quod attinet, patet: quandoquidem ſi eſt, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [a] inuersè, vt 8, ad 12, ita 4, ad 6: deinde quia eſt; vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [b] etiam alternè, vt 12, ad 6, ita 8, ad 4. *a Coroll. 4. propoſ. quinti. b 16. propoſ. quinti.*

Ad octauam quod attinet. Si eſt, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4: ſi his ſimilia proportionalia addantur 15, 10, 18, 12; vt fiant 27, 18, 24, 16: erit, vt 27, ad 18, ita 24, ad 16; Debent autem eſſe proportionalia ſimilia. Si enim, vt eſt 12, ad 8, ita ſit 6, ad 4, quæ proportio eſt ſeſquialtera; ſit verò vt 10, ad 2, ita 15, ad 3, quæ proportio eſt quintupla; facta verò additione, proueniant 22, 10, 21, 7: non erunt hi numeri proportionales; non eſt enim, vt 22, ad 10, ita 21, ad 7. *Octaua explicatur, & demonſtratur. Exemplo explicatur.*

Sunto proportionales A, B, C, D; & ipſis addantur ſimiles proportionales E, F, G, H, proueniant autem I, K, L, M: Dico I, K, L, M, proportionales eſſe; itaut quemadmodum eſt I, ad K, ita ſit L, ad M. *Demõſtratur.*

Quoniam eſt, vt A, ad B, ita E, ad F; erit [a] permutando, vt A, ad E, ita B; ad F, & erit [b] componendo, vt A plus E, ad E, ita B plus F, ad F; & rurſus permutando, erit [c] A plus E, ad B plus F, vt E, ad F, ſeu vt G, ad H: at vt G, ad H, ita concludetur C, plus G, ad D plus H; ergo, vt A plus E, ad B plus F, ita erit C plus G, ad D plus H; hoc eſt, vt I, ad K, ita L, ad M. Si itaq; proportionalia, &c. *a 16. quinti. b 18. quinti. c 16. quinti.*

A	B	C	D
12	8	6	4
E	F	G	H
15	10	18	12
I	K	L	M
27	18	24	16

Ad nonam quod attinet: patet ex dictis. *Nona patet ex dictis.*

Quantum autem ad decimam, facili negotio declarabitur, & demonſtrabitur. *Decima explicatur & exẽplo illuſtratur*

Digitized by Google

Sint proportionales 12, 8, 6, 4; item 15, 10, 24, 16: Vel 12, 8, 6, 4; item 10, 5, 14, 7, Si fiat multiplicatio, vt vides; fient termini producti 180, 80, 144, 64, in primo exemplo: & 120, 40, 84, 28, in ſecundo, proportionales.

12	8	6	4
15	10	24	16
180	80	144	64

12	8	6	4
10	5	14	7
120	40	84	28

Proportiones, quæ ex eiſdē proportionibus componuntur inter ſe ſunt eædem.

Ratio, quia dum proportionalia, per proportionalia multiplicantur, componuntur eædem proportiones. Proportiones autem, quæ ex eiſdem proportionibus componuntur, inter ſe ſunt eædem.

Proportionum autem compoſirionem fieri multiplicatione terminorum antecedentium, & conſequentium ad inuicem, perſpicuum eſt ex ijs, quæ demonſtrauit Euclides, rùm ad 23, ſexti, cùm ad 5, octaui libri Elementorum.

Declaratur ſuperior doctrina.

Declaratur magis; nàm cùm ſint 12, & 8, item 10, & 5, (vtar poſteriori exemplo) ſi multiplicemus 12, per 10, & 8, per 5, componetur proportio productorum, ſcilicet 120, & 40, ex proportione 12, ad 8, & 10, ad 5. Sic etiam cum ſint 6, & 4, item 14, & 7; multiplicemus autem 14, per 6, item 7, per 4; proportio productorum 84, & 28, compoſita erit ex proportione 6, ad 4, & 14, ad 7; hoc eſt ex 12, ad 8, & 10, ad 5. Quamobrem ex eiſdem proportionibus componitur ratio 120, ad 40, ex quibus componitur proportio 84, ad 28. Itaq; 120, 40; 84; 28: proportionales erunt. Rectè igitur dictum fuit: Si proportionalia per proportionalia multiplicentur; orta eſſe proportionalia. Eadem intelligenda de priori exemplo, & de omnibus alijs, quæ excogitari poſſunt.

Hæc eſt proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionum compoſitione.

Porrò hæc eſt proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. Non enim eſt proportionum additio, quemadmodum perperam nonnulli crediderunt.

Demonſtratio.

Ad id autem oſtendendum. Sunto duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales. Ducatur anteeedens A, in antecedentem C, & fiat E; ducaturq; conſequens B, in conſequentem D, & fiat F. Dico proportionem E, ad F, compoſitam eſſe ex proportione A, ad B, & C, ad D. Ex B, in C, fiat G. Quoniam ex A, B, in C, fiunt E, G; erit [a] vt A, ad B, ita E, ad G. Et quoniam rurſus ex B, in C, D, fiunt G, F; erit [b] vt C, ad D, ita G, ad F. At verò proportio E, ad F, componitur ex E, ad G, & G, ad F: & vt A, ad B, ita E, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad F. Ergo proportio E, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & C, ad D. Quod erat oſtendendum. Cæterùm compoſitio proportionum, quam in memoratis locis intendit Euclides, reſpondet multiplicationi denominatorum inter ſe; at verò hæc proportionum mulriplicatio, non differt à multiplicarione denominatorum inter ſe: rectè igitur concludebatur.

A	B	C	D	E	F
12	8	15	10	180	80
					G
					120

a 18. ſeptimi.
b 17. ſeptimi.

Decima prima propoſitio declaratur.

Quantum ad vndecimam; patet ex eo quia, dum proportionalia per proportionalia diuiduntur, ex eiſdem proportionibus, aliæ eædem proportiones auferuntur: vt enim opere multiplicarionis proportiones ſimul componuntur, ira quoq; diuiſione, vna proportio ex alia aufertur; quandoquidem diuiſio reſoluir, quod ſupereffieit multiplicatio.

Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. Demonſtratio.

Sint proportionales 180, 80, 108, 48. Diuidantur per proportionales 12, 8, 6, 4; Orientur 15, 10, 18, 12, parirer proportionales.

Demonſtrabitur autem, ſi ſupponamus hanc ſubtractionem fieri per diuiſionem, & eſſe contrariam compoſitioni. Sit ſubtrahenda proportio C, ad D, ex proportione A, ad B: Hoc potiùs eſt diuidere proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D; quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahere, vr videbimus.

A	B	A	B
180	80	108	48
C	D	C	D
12	8	6	4
E	F	E	F
1440	960	432	288
G		G	
2160		648	

Ex A, in D, fiat E: & ex B, in C, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ producitur ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, eſſe eam, quæ relinquitur ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: ſeu quod idem eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportione C, ad D, & E ad F. Fiat G, ex A, in C. Quoniam ex A, B, in C, fiunt G, F; erit [a] vt A, ad B, ita G, ad F. Et rurſus quoniam ex A, in C, D, fiunt G, E; erit [b] vt C, ad D, ita G ad E. At verò cum proportio G, ad F, ſit compoſita ex proportionibus G, ad E, & E, ad F; erit proportio A, ad B, quæ eadem eſt cum proportione G, ad F, compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt C, ad D, & E, ad F: quemobrem ſubtracta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; remanebit proportio E, ad F, quod erat oſtendendum.

a 18. ſeptimi.
b 18. ſeptimi.

Si verò A, diuidatur per C; proueniat H: Si B, diuidatur per D; proueniat I: Si verò L, diuidatur per N; proueniat P: Si M, diuidatur per O; proueniat Q: & D, multiplicans A, faciat E; vt G, multiplicando B, faciat F; item O, multipli-

Demõſtratio principalis ſupradictorum.

A	B	L	M
180	80	108	48
C	D	N	O
12	8	6	4
H	I	P	Q
15	10	18	12
E	F	R	S
1440	960	432	288

cando L, faciat R: & N, multiplicando M, faciat S. Proinde C, multiplicando H, producit A; ſiquidem A, dùm per C, diuidebatur, proueniebat H. Item D, multiplicans I, producit B; & N, multiplicans P, producit L; vt O, multiplicans Q, producit M. At verò D, multiplicans A, fecerat E; & C, multiplicans B, fecerat F; item O, multiplicans L, fecerat R; & N, multiplicans M, fecerat S: erit, vt E, ad F, ita H, ad I; & vt R, ad S, ita P, ad Q: Quandoquidem C, multiplicans H, producit A, & D, multiplicans I, producit B; item N, multiplicando P, producit L; & O, multiplicando Q, producit M. At verò C, multiplicando B, producit F; & D, multiplicando A, producit E; item O, multiplicando L, producit R; & N. multiplicando M, prodicit S: Quoties igitur vnitas metitur C, toties H, metitur A; & quoties vnitas metitur D, toties I, metitur B; & quoties vnitas metitur N, toties P, metitur L, &c. At verò quoties vnitas metitur C, toties B, metitur F; & quoties vnitas metitur D, toties A, metietur E; & quoties vnitas metitur N, toties M, metietur S, &c. Vt igitur vnitas ad C, ita H, ad A; & vt vnitas ad D, ita I, ad B; & vt vnitas ad N, ita P, ad L, &c. Sed, vt vnitas, ad C, ita B, ad F; ergo vt H, ad A, ita B, ad F. Et vt vnitas, ad D, ita A, ad E: er-

a 23. quinti. b 16. quinti.

go, vt I, ad B, ita A, ad E, quapropter erit [a] ſecundum rationem perturbatam, vt H, ad E, ita I, ad F; ac proinde permutando, erit [b] quidem H, ad I, vt E, ad F. Eodem diſcurſu concludemus eſſe, vt R, ad S, ita P, ad Q.

Speculum demonſtrationis

Vnitas	C 12	H 15	A 180	Vnitas	N 6	P 18	L 108
Vnitas	D 8	I 10	B 80	Vnitas	O 4	Q 12	M 48
Vnitas	C 12	B 80	F 960	Vnitas	N 6	M 48	S 288
Vnitas	D 8	A 180	E 1440	Vnitas	O 4	L 108	R 432

Compendioſius idem traditur

H 15	A 180	E 1440	P 18	L 108	R 432
I 10	B 80	F 960	Q 12	M 48	S 288

Sed E, F, R, S, ſunt proportionales: quandoquidem C, D, N, O, proportionales ex hypotheſi, multiplicantes terminos proportionales A, B, L, M; nimirum D, multiplicans A; & C, multiplicans B; item O, multiplicans L; & N, multiplicans M, fecerunt terminos E, F, R, S: ob id erunt etiam proportionales illi quatuor termini H, I, P, Q, quod erat oſtendendum. Rectè igitur dictum fuit. Si proportionalia, per proportionalia diuidantur; orta eſſe proportionalia.

S C H O L I O N.

Declarantur ea, quæ ſuperiùs aſſumpta fuerunt.

Aſſumpſimus ſuperiùs proportiones, quæ ex eiſdem proportionibus componuntur, inter ſe quoq; eaſdem eſſe: cum oſtenderemus, ſi proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta eſſe proportionalia. Nec immeritò; ſi quidem facilè demonſtrari poteſt: & communiter id ab antiquis Geometris receptum eſt; vt videre licet paſſim apud Apollonium, Pappum, & alios.

Quod ad hunc alium arguendi modum attinet, de quo poſtremo loco verba fecimus; Si nimirum proportionalia per proportionalia diuidantur, &c. apud nobiliſſimos Geometras ipſum reperire licet.

Duodecima oſtenditur.

Quantum ad decimam ſecundam propoſitionem: ea certè conſtat, neq; indiget explicatione: ſi namq; duo ſint æqualitatis eſtrema, quæ per communem diuiſorem diuidantur, æqualitas non euaneſcit. Vt 100. = 100. per communem diuiſorem inſtituta diuiſione, vt per 5; fiet adhuc æquatio inter 20, ex vna parte, & 20, ex altera. Neq; curandum, quòd allata æquatio ſit inutilis ad artificium Algebricum, vt ſuo loco conſtabit, eam enim attulimus exempli loco, ad hanc veritatem oſtendendam, ad quod illa planè ſufficit. Idem conſtat in æquatione vtili. Vt ſi 10 R, æquentur 100, adhuc 2 R, æquabuntur 20.

Nec immutatur proportio.

Proportio quoque non immutatur, vt ſi ſint proportionales.

60, 20, 150 50.

Facta applicatione ad 5, omnibus ſcilicet terminis diuiſis per 5; adhuc erunt proportionales.

12, 4, 30, 10,

Eandem nimirum triplam proportionem retinentes termini ex applicatione, vel diuiſione prouenientes.

SCHOLION.

Digitized by Google

SCHOLION.

HAEc omnia patent ex Elementis; placuit nihilominus explicationem aliquam in gratiam Tyronum afferre. Cæterùm his, quæ attulimus, præcipuè vtitur Algebra, etiam ſi ea omnibus Metheſeos partibus inſeruiant: Ob id non inutile duximus, ea hic adnotare, eò vel maximè, quòd ſi quæ difficiliora videntur, curauimus, vt quæ potuimus facilitate, clariora hoc in loco exhiberentur; vt his nimirum iactis fundamentis, Ars ipſa meliùs percipiatur. Inde tamen non fit, quin Elementorum, quorum cognitio apud Euclidem, & alios habetur, ad hanc diſciplinam, atq; Matheſeos partem neceſſaria ſit; Nemo enim AEnigmata ſoluens, eorum demonſtrationes fæliciter contexet; quinimò, neq; hanc Artem perfectè aſſequetur illius cognitionis expers. Sunt enim elementa prima, quorum notitiam præhabere oportet, ad omnem Matheſeos partem capeſſendam.

Iis, quæ ſuperiùs allata fuerunt, præcipuè Innititur Algebra.

Elementorum cognitio, maximè neceſſaria, ad hanc matheſeos partem.

Non abs re iudicauimus has infraſcriptas definitiones in memoriam reuocare,

DEFINITIONES.

QVadratum, quod etiam Potentia nuncupatur, eſt illa Poteſtas, quæ producitur ex multiplicatione lateris in ſe; ſeu quæ producitur ex radice bis poſita, & multiplicata. — *Quadratum, ſeu Potentia quid.*

Cubus eſt illa poteſtas, quæ producitur ex ductu quadrati in latus; ſeu quæ emergit ex radice ter poſita, & multiplicata. — *Cubus quid.*

Quadrato-quadratum eſt illa, quæ emergit ex multiplicatione quadrati in ſe; ſeu quæ fit radice quater poſita, & multiplicata. — *Quadrato-quadratum quid.*

Et non diſſimili modo poterunt reliquæ Poteſtates definiri, tàm iuxta mentem eorum, qui diſſentiunt à Diophanto, in ipſis appellationibus, quàm ad mentem eiuſdem Diophanti. Et hinc patet, quid ſint Radices, Quadrata, Cubica, &c. — *Cæteræ poteſtates, quid ſint, inſinuatur. Quid ſint radices.*

Additio numeri ad numerum, eſt acceptio illius numeri, qui præcisè coaleſcit tanquam ex partibus, ex numeris illis qui addi dicuntur. — *Additio quid.*

Subtractio eſt ſumptio exceſſus numeri vnius ſupra numerum alterum. — *Subtractio quid.*

Multiplicatio numeri in numerum, eſt inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem. — *Multiplicatio quid.*

Seu multiplicatio numeri per numerum, eſt acceptio numeri illius, qui ad multiplicatum, eam habet rationem, quam multiplicans ad vnitatem. — *Aliter.*

Sumptus hic numerus Productum dicitur. — *Productum.*

Diuiſio numeri per numerum. eſt inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus, ad diuidentem. — *Diuiſio quid.*

Seu diuiſio numeri per numerum, eſt acceptio numeri, ad quem diuiſus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem. — *Aliter.*

Acceptus hic numerus Proueniens, ſiue Quotiens appellatur. — *Quotiens.*

Ad denotandam autem Additionem, Defectum, & Æqualitatem, his vtimur characteribus, nempè † eſt ſignum additorum, & ⊸ eſt ſignum defectorum. Vt verò denotemus aliquid alicui æquale eſſe; breuitati conſulentes talem notam frequentabimus ⩵. Cæterùm ſigna † & ⊸ afficiunt numeros ſubſequentes, vt ſi eſſet 4 Q † 2 R ſigno † afficitur numerus 2 R, non autem 4 Q. Quando verò nullum ſignum præcedit numerum, intelligitur numerus ille affectus ſino †. Vt ſignificemus radicem, quæ eſt Poteſtas, hoc vtimur charactere R, ſed pro ſigno radicali præponendo numeris, hoe vtemur eharactere ℞ ad diſtinctionem radicis, quæ eſt Poteſtas. Ad denotandam radicem quadratam; ita ſcribimus ℞ Q; ad radicem cubicam ſignificandam, hoc vtimur charactere ℞ C, & ſic de reliquis. Signum autem hoc ℞ (). ſignificat radicem vniuerſalem, ſiuè ligatam; itaq; ℞ Q (), denotabit radicem quadratam vniueſalem, & ſic de reliquis. Quomodo autem id intelligi debeat ſuo loco explicabimus. Sat eſt hìc ipſum characterem indicaſſe. Cum autem abſolutè hunc adhibemus characterem ℞, intelligi volumus radicem quadratam, & ſi ſcribatur ſine addito charactere Q; quod maximè eſt obſeruandum, & memoriæ mandandum.

Characterum nonnullorum explicatio. Signum † quid ſignificet, quid ſignū ⊸ quid ⩵ ſignificet. Character R quid ſignificet. Character ℞ quid ſignificet.

Digitized by Google

De numeratione numerorum Denominatorum, ſeu Poteſtatum, tàm ſimplicium, quám compoſitarùm per numeros, tàm abſolutos, quàm irrationales, ſeu ſurdos.

CAPVT II.

Numeratio poteſtatum,

CHaracteres, vnitati, vel numeris apponuntur, & Poteſtates ipſis characteribus denotatæ ab illis numerantur. Vt 1 R, 2 R; 1 Q, 2 Q; 1 C, 2 C, &c. Significamus autem per numerum characteri præpoſitum, multitudinem illius Poteſtatis, quæ ab illo charactere ſignificatur, atq; adeo hac nota 1 R, denotamus 1 R, vnam Radicem; hac verò 2 R, duas radices, hac alia 3 R, tres radices, &c. Prætereà hac nota 1 Q, ſignificamus vnum quadratum, hac alia 2 Q, denotamus duo quadrata, & ita de reliquis, &c.

Quemadmodum autem fractio quælibet abſoluta, ab aliquo numero ſumit denominationem, velut triens, à ternario, à quaternario quadrans, & ſic de reliquis; Ita quælibet Algebrica fractio à ſpecie, poteſtateq; cuius nota ei affixa eſt, denominationem mutuatur; Vt $\frac{1}{2}$ R dicetur ſemiſſis vnius radicis $\frac{1}{3}$ Q, dicetur triens vnius quadrati &c. Sed de his iterum, cùm de fractionibus horum numerorum loquemur. Cæterum huc ſpectat, quod legimus apud Diophantum. Definitione 3.

Numeri ſimplices qui dicantur. Numeri compoſiti. Diminuti numeri qui. Horum numerorum expreſſio.

Denominati autem ſimplices dicuntur, cùm in ipſis non exprimitur ſignum † vel −. Cùm autem hiſce coniunguntur ſignis †, vel −; vt ſi ita ſe haberent 10 Q † 4 R, Vel 6 C † 3 Q, item 7 Q − 2 R, vel 12 C − 5 Q. huiuſmodi numeri Compoſiti dicuntur; propriè tamen ſibi nomen iſtud vendicarunt ij, qui ſigno † connectuntur; cæteri namq; per ſignum − Diminuti nuncupantur. Illi verò, quibus vtrumq; interponitur ſignum, vt 8 QQ † 20 C − 4 Q † 10 R, Mixti dicuntur. Omnes tamen generali quadam nomenclatura Compoſiti dici poſſunt. Quo verò pacto exprimantur, videamus. Cum ſcribimus 5 Q † 3 R, nil aliud denotamus, quàm quinque quadrata plus tribus radicibus. Item 6 Q † 7 R, ſic efferuntur, ſex quadrata plus ſeptem radicibus.

Quo pacto fiat numerorum pronunciatio.

Præterea 6 Q − 10 R, ſic pronunciantur, ſex quadrata, minus decem radicibus. Quod ſi fuerit trinomium, vt 25 Q † 6 R − 10 C, pronunciabitur hoc modo, vigintiquinq; quadrata, plus ſex radicibus, minus decem cubis; & ita de reliquis intelligendum eſt. Quod ſi non omnes ſint numeri denominati, ſed intercipiantur numeri abſoluti, vt 15 C † 5 Q † 6 R † 2 non diſſimili modo efferuntur; videlicet quindecim cubi, plus quinque quadratis, plus ſex radicibus, plus duabus vnitatibus.

Numeratio poteſtatum; per numeros irrationales.

Huc vſq; de Poteſtatum numeratione per numeros abſolutos, ſequitur per irrationales, ſeu ſurdos. Quando ſoli ponuntur, vt ℞ Q 7 R, ℞ Q 10 R, ℞ C 75 Q, ℞ Q 18 C, &c. ſic exprimuntur: Radix quadrata ſeptem radicum: Radix quadrata decem quadratorum: Radix cubica quindecim quadratorum: Radix quadrata decem, & octo cuborum. Cum autem ſignis coniunguntur, eodem pacto diſcurrendum eſt, quo ſupra oportere dicebamus. Vt 2 Q † ℞ Q 3 R − 2, ſic pronunciabuntur: duo quadrata plus radice quadrata trium radicum minus duabus vnitatibus.

Radix ligata; ſimplex.

Quòd ſi radix fuerit ligata, ſiuè vniuerſalis, eaq; ſimplex, vt ℞ (15 Q) vel ℞ (17 C), ſignificatur extrahendam eſſe radicem quadratam, vel cubicam, vel aliam quamcumq; iuxta characteris naturam, non ſolùm ex numero, verùm etiam ex poteſtate, & ita pronunciatur: Radix quadrata ligata, ſiue vniuerſalis, quindecim quadratorum: Radix quadrata ligata, ſeu vniuerſalis decem, & ſemptem cuborum.

Si

Si radix fuerit ligata, ſiue vniuerſalis compoſita, vt ℞ Q(6 † ℞ Q5R) ſic pronunciabitur: Radix quadrata vniuerſalis ſex vnitatum, plus radice quadrata quinq; radicum: & ita de ſingulis; Quid ſibi velint, patet ex dictis, & ſuo loco de numeris ſurdis.

Radix ligata, ſeu vniuerſalis compoſita.

S C H O L I O N.

VT faciliùs intelligantur, qua ſuperiùs à nobis dicta ſunt, placuit hic Scholion apponere. Cùm ſcribimus ℞ 7 R, vel ℞ 7 Q, ſignificare intendimus R, valorem, ductum eſſe in ℞ 7, & 1 Q, pretium ductum eſſe in ℞ 7, &c. Vt ſi ſit ℞ 1 6 R, idem erit ac 4 R: ſi ſit ℞ 1 6 Q, erit idem ac 4 Q.

Declarantur præcepta ſuperiùs tradita.

At verò dum intrà parentheſim clauduntur, ſignificamus extrahendam eſſe ℞ tàm ex numero, quàm ex dignitate; Itaq; dum dicimus ℞ (7 R) ſignificamus extrahendam eſſe radicem, tàm ex numerò, quàm ex dignitate. Sic dum ſcribimus ℞ (10 Q) & ℞ (1 6 C) eodem modo intelligi debent, &c.

Explicabimus tamen facilè, quid ſignificare intendimus, ſi in abſolutos numeros, omnia hac reſoluamus hac lege, Sit ℞ Q (2 5 Q); & per, R pretium intelligamus 6, ſiuè ponamus, R pretium eſſe 6, erit 1 Q, valor 36; Itaq; 2 5 Q, valebunt 900; huius autem numeri ℞ Q eſt 30, cum itaq; nos ſcribimus ℞ (2 5 Q) intelligimus extrahendam eſſe radicem quadratam tàm ex numero 25, quàm ex Q, ac proinde cum ℞ Q numeri 25, ſit 5, & ipſius Q radix ſit R, erit latus quadratum 5 R, cuius valor eſt 30. nempè ℞ Q, numeri 900, vti perſpicuum eſt.

Explicatio ſupradictorum.

Quando itaq; fit incluſio intra parentheſim, ſignificamus extrahendam eſſe radicem, tàm ex numero, quàm ex dignitate; adeo vt pretium illius ſit radix numeri, qui fit ex dignitatis valore multiplicato in numerum ipſum; Vt hac ℞ Q (2 5 Q) ſi 1 R, valor eſt 6, certè valebit 30, cùm autem non includitur intra parentheſim, ſignificatur valor dignitatis multiplicatus per numerum illum irrationalem; vt ſi eſſet ℞ Q 7 Q ſignificatur 36, pretium vnius Q, multiplicatum eſſe per ℞ Q 7.

Quando fit incluſio intra parentheſim.

Cum autem dignitas habet radicem, numerus verò non habet, ſitq; radix extrahenda; oportet eruere radicem ex dignitate, numero verò praponendum eſt ſignum radicale. Vt ſi eſſet 2 0 Q: huius profectò erit radix quadrata hac, nempè ℞ Q 2 0 R, ex dignitate, quandoquidem radix extrahi poteſt; non autem ex numero, cui prapoſitum eſt ſignum radicale. At verò per ℞ Q 2 0 R ſignificare intendimus pretium 1 R, eſſe multiplicatum per ℞ Q numeri 20, etenim numerus ille conſurgens per multiplicationem, eſt illius numeri, ſcilicet ℞ Q 2 0 R, pretium. Caterum ipſius ℞ Q 2 0 R, quadratum eſt 2 0 Q, & huius pretium eſt 7 2 0; ſi nimirum valor 1 R, eſt 6, quo fit, vt lateris illius valor, nimirum ipſius ℞ Q 2 0 R, qui eſt latus ipſius 2 0 Q, ſit inquam, vt ſit ℞ Q 7 2 0.

Quando dignitas habet radicem, numerus autem non habet.

7 2 0	2 0 Q
℞ Q 7 2 0	℞ Q 2 0 R

Ad hoc autem magis declarandum vtamur numero habente radicem, perinde ac ſi radicem non haberet. Sit igitur 2 5 Q: huius numeri ℞ Q, erit ℞ Q 2 5 R, quòd ſi vnius radicis pretium ſit 6, ipſius 2 5 Q, pretium erit 900. Et ipſius ℞ 2 5 R, erit ℞ 9 0 0, hoc eſt 30, hic enim numerus reſpondet 5 R, qua aquipollent ipſi ℞ 2 5 R, quemadmodum 30, aquipollent ℞ 9 0 0. Hac autem omnia ex appoſito paradigmate poſſunt innoteſcere.

Qua ſuperiùs dicta ſūt magis declarantur.

9 0 0	2 5 Q
℞ Q 9 0 0	℞ Q 2 5 R
3 0	5 R

Idem etiam declarari poterit alijs, ac alijs exemplis; vt ſi foret 3 6 Q cuius latus quadratum quareretur, item 2 7 C, cuius latus cubicum inueniendum proponeretur, & ſic de reliquis.

Illud autem rectè dicebatur, cùm proponitur numerus charactere affectus, intra clauſulam poſitus, & intelligitur ſignificare extrahendam eſſe radicem producti numeri ex multiplicatione pretij dignitatis in numerum, cui character affixus eſt, rectè inquam dicebatur extrahendam eſſe radicem, tàm ex numero, quàm ex dignitate, ita vt dignitas numero intelligatur affixa.

Demiſtratio.

Quan-

Propoſitio.

Quandoquidem ſi duo ſint numeri, ſumanturque ipſorum latera, id quod prouenit ex multiplicatione laterum, eſt radix eius quod prouenit ex multiplicatione propoſitorum numerorum.

Demõſtratio.

Sint duo numeri A, B, quorum latera C, D, productum ex his eſto F, ex illis verò E, cuius latus ſit G. Dico F æqualem eſſe G.

Quandoquidem C multiplicans D, facit F, erit vt C, ad D, ita quadratum C, ad F; Sunt enim C, radix quadrata F, & D proportionales, atque adeo quadratum C ad F, hoc eſt A ad F, erit vt C, ad D; Quoniam autem A, Ductus in B, facit E, erit A ad B, in duplicata ratione eius, quam habet A, ad latus ipſius E, nempè ad G; ſed A, ad B, habet etiam duplicatam rationem eius, quam habet C ad D, cum quadrata ſint in duplicata ratione laterum, ergo vt C, ad D, ita A ad G; ſed vt C ad D, ita erat A ad F, ergo A, ad G, eſt vt ad F, quare G, & F, erunt æquales. Quod demonſtrare oportebat.

	E	
	144	
A	G	B
16	12	9
C	F	D
4	12	3

Idem autem intelligendum de lateribus cubicis, & alÿs laterum generibus.

Aliter idem vniuerſaliter demonſtratur

Aliter idem oſtendetur; & generaliter inſtituetur demonſtratio; ſiue ſermo ſit de quadratis, ſiue de cubis, ac reliquis &c.

Sint enim duo numeri C, D, quorum quadrati, ſint I, K, cubi verò ſint A, B, &c. At verò C, multiplicando D, producat G, & I multiplicando K, producat H, deinde A, multiplicando B, producat E. Quoniam igitur C, I, A, ſunt a, in continua ratione, ſecundum Geometricam progreſſionem incipientem ab vnitate; quemadmodum D, K, B, ergo ex ÿs, quæ ſuperiùs demonſtrauimus, eorum multiplicatione, producti numeri G, H, E, erunt in ratione continua ſecundum Geometricam progreſſionem incipientem ab vnitate; multiplicatis enim proportionalibus per proportionalia, componi eaſdem inter ſe rationes oſtendimus. Quamobrem primus ab vnitate, vt G, erit b radix cæterorum, eſt autem G, numerus factus ex C, in D, ergo numerus factus ex C in D, erit latus quadratum numeri H, facti ex I in K, & latus cubicum numeri E, facti ex A in B. Quod erat opera pretium oſtendere.

a 10. Octaui Elementorum Ex demonſtratis ſuperiùs.

b 10. Octaui Elementorum

	E	
	1728	
	H	
	144	
	G	
A	12	B
64		27
I		K
16		9
C		D
4		3

Quædam in memoriam ſũt recolenda.

Recolendum autem eſt in memoriam id, quod ſuperiùs innuimus, nimirum hæc ſigna † & — referri ad numeros, qui ea ſequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Præterea illud etiam præ oculis habendum; numerum ſcilicet, quem neutrum horum ſignorum præcedit, intelligendum habere ſignum additorum, ſeu additionis.

Cæterùm, quæ hactenus, diximus intelligenda ſunt, de omni radicis genere; quemadmodum ſuperiùs etiam innuimus: quod hic rurſus animaduertiſſe volumus. De his tamen in ſequentibus denuo ſermo redibit.

De

De Algorithmo Denominatorum numerorum, ſiue Poteſtatum.

C A P V T III.

Algorithmus quid.

ALgorithmus, grecè ἀλγοριθμὸς, nihil eſt aliud, quàm numerorum tractatio, complectens illas vulgatas operationes, nimirum Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, & Diuiſionem. Dictum autem puto à nomine ἄλγος, quod apud Græcos inter cætera moleſtiam, & laborem ſignificat, à verbo ἀλγῶ; hoc eſt laboro, & à nomine ἀριθμὸς, quod numerum importat; vnde ἀλγοριθμὸς, idem ſonat, quod labor circa numeros. De his autem à nobis in preſentia eſt habendus ſermo; & primò tractandum de huiuſmodi operationibus, quoad numeros denominatos, qui numerantur per numeros abſolutos, initio facto ab additione.

Numerorum Denominatorum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Numerorum denominatorum diuiſio. Simplices Cõpoſiti Diminuti Mixti. Simplices vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ denominationis. Præceptũ additionis. Demõſtratio.

AVT numeri denominati addendi ſunt ſimplices, & ſolitarij, vt 5 R, 8 R, 15 R, 20 Q, 11 C &c. vel compoſiti, vt 20 Q † 2 R, & 7 C † 3 Q &c. Diminuti, vt 15 Q – 6 R, & 4 C – 2 Q &c. at verò Miſti, vt 18 C † 10 Q – 6 R, & 10 C – 7 Q † 4 R. Si ſimplices, vel ſunt eiuſdem appellationis, vt R, vel Q, vel C, &c. Si fuerint denominationis eiuſdem, eodem pacto fieri debet additio, quo fit in numeris vulgaribus, retento eodem charactere; itaq; ſi ſit iniunctum ad 20 R, addere 10 R, fiet ſumma 30 R, ſi verò 15 Q, debeant addi ad 5 Q, fiet aggregatum 20 Q, & ſic de ſingulis.

Demonſtratio eadem eſt cum illa numerorum vulgarium; cum enim additio numeri ad numerum, nihil aliud ſit, quàm acceptio, &c. Certè non alio modo fieri debet, neq; illa ſumma poteſt exhiberi, quàm ſimul vniendo partes, ex quibus conſtat; omnis enim numerus ex illis partibus coaleſcit, in quas reſoluitur (quemadmodum omnis alia quantitas) & quæ ſimul ſumptæ reſtituunt totum.

Quando numeri denominati fuerint denominationis diuerſæ.

Quòd ſi numeri denominati, fuerint appellationis diuerſæ, adduntur beneficio ſigni additorum; nimirum †. Itaq; ſi ſit opus ad 10 Q, addere 20 R, emerget aggregatum 10 Q † 20 R; Item ex 12 C, ad 20 Q Q, fit ſumma 20 Q Q † 12 C &c. & ſemper ſumma eſt numerus compoſitus:

Demõſtratio.

Demonſtratio eſt, quia additio ſincera ſine ſigno, fit inter homogenea; proinde cum hæc heterogenea ſint, nequeunt inuicem addi, hoc eſt addi vnum ad alterum, niſi per ſignum †. Idem autem intelligendum eſt, ſi ſit opus addere numerum nudum ab omni charactere, ad numerum charactere affectum, & è contra, vt ex 12, ad 20 Q, fit ſumma 20 Q † 12, & ita de ſingulis.

Præceptum.

Verùm ſi debet fieri additio inter numeros compoſitos, diminutos, & miſtos, ſiuè ſimplicis ad compoſitum, diminutum, & miſtum, ſiuè compoſiti ad compoſitum, diminutum, & miſtum; additio fieri debet inter illos, qui ſunt eiuſdem appellationis: quòd ſi non eſſent eiuſdem appellationis, abſoluetur additio eodem ſigno †.

Exempla.

Si ſit opus addere ad 8 R † 5, numerum 4, fiet ſumma 8 R † 9. Vel ad 8 R † 5, addere debeamus 4 R; fit ſumma 12 R † 5, ſi verò ad numeros compoſitos debeamus addere numeros compoſitos, per quos intelligo tam compoſitos propriè, quàm diminutos, & miſtos, vt ad 20 C † 5 Q, ſit opus addere 10 C † 7 Q. Aduertendum eſt, num ipſi numeri addendi appellationis eiuſdem, afficiantur ſignis † vel –. Etenim ſi eadem ſigna ipſis præfigentur, abſoluetur additio, addendo ſimilia ſimilibus, vt ex 10 C † 7 Q, ad 20 C † 5 Q, fit ſumma 30 C † 12 Q, cuius de-

monſtratio infra patebit. Item ex 10 Q † 4 R, & 8 Q † 2 R, fit ſumma 18 Q † 6 R. Quòd ſi non ſint affecti numeri eiuſdem characteris, ſignis eiſdem; ſed vnus ſigno †, alter verò —: in huiuſmodi caſu, habendus eſt præ oculis, horum ſignorum Algorithmus, tàm ad additionem, quàm ad cæteras operationes ritè inſtituendas. Cæterùm cùm in compoſitis non intercedit, niſi ſignum †, omnes neceſſe eſt eodem ſigno afficiantur, ſicuti de diminutis, quantum ad ſignum —, ſecus autem de miſtis.

Algorithmus ſignorum ✠ & —.

Algorithmus ſignorum †, & — neceſſarius

HIC igitur Algorithmum horum ſignorum aggrediemur, vtpotè neceſſarium ad Algebricas operationes inſtituendas, & ab additione ipſorum exordiemur Tum quia, ſimplicior operatio cùm ſit, omnibus alijs præmittenda eſt. Cùm quia numerorum denominatorum hęc circa additionem verſatur tractatio, quæ ſine additione ſignorum †, & — nequit abſolui.

Signorum ✠, & — Additio.

† ad † additur, fit †. Hoc eſt, plus ad plus additur, & fit plus.
— ad — additur, & fit —. Hoc eſt, minus ad minus additur, & fit minus.
† ad — ſubtrahitur, & notatur maius. Hoc eſt, plus ad minus ſubtrahitur, & notatur maius.
— ad † ſubtrahitur, & notatur maius. Hoc eſt, minus ad plus ſubtrahitur, & notatur maius.

Declarantur ſuperiora præcepta, & exẽplis illuſtrantur.

De ſubtractione agemus in ſequentibus, videlicet, tãm ſignorum †, & — quàm Poteſtatum.

Si itaq; inſtituenda eſt additio inter numeros compoſitos, quibus interponuntur diuerſa ſigna †, & —, atq; numeri eiuſdem eppellationis, diuerſis ſignis afficiuntur; habenda eſt ratio additionis ſignorum prædictorum.

Exempla Additionis ſignorum ✠, & —.

18Q ✠ 8R
15Q — 2R
33Q ✠ 6R

30C — 35Q
14C ✠ 10Q
44C — 25Q

12Q ✠ 6R
14Q — 8R
26Q — 2R

16C — 5Q
28C ✠ 10Q
44C ✠ 5Q

15C ✠ 12Q — 10R
14C — 16Q ✠ 4R
29C — 4Q — 6R

30C ✠ 15Q ✠ 10R
40C — 7Q ✠ 0
70C ✠ 8Q ✠ 10R

12QC ✠ 10QQ ✠ 0C — 4Q ✠ 2R
20QC ✠ 15QQ ✠ 15C ✠ 8Q — 4R
32QC ✠ 25QQ ✠ 15C ✠ 4Q — 2R

14CC ✠ 6QC ✠ 8C ✠ 16Q — 15R — 18
10CC ✠ 12QC — 5C ✠ 19Q — 9R — 15
24CC ✠ 18QC ✠ 3C ✠ 35Q — 24R — 33

Commutatur operatio addi-

Itaq; commutatur operatio additionis in ſubtractionem; ſubtrahitur enim minor ex

ex maiore, & reliquo numero tribuitur ſignum maioris numeri, à quo facta eſt ſubtractio. Demonſtratio ſignorum †, & — facilis eſt, & quidem, quæ ſequuntur oſtendi poſſunt de quantitate generatim accepta; quia tamen hic aſſumitur conſiderandus numerus, propterea iuuat ea quidem proponere, quatenus ad numeros contracta; In Speciosa, poſtmodum, eadem contemplabimur, generali quadam conſideratione, præſcindendo ab hac, vel illa quantitatis ſpecie: eius enim eſt loci, huiuſmodi contemplatio, quoad ſigna †, & †, non eſt ferè cur verba faciamus. *tionis in ſubtractione, &c. Hac de quantitate generatim accepta oſtendi poſſe, & in Speciosa praſtabitur.*

Perſpicuum eſt autem rectè additionem inſtitui, addendo partes, partibus. *Demõſtratio*

Nam idem eſt partes addere partibus, & aggregata ſimul colligere, idem eſt inquam, ac totum addere toti. *Propoſitio.*

Sic etiam ſi † addatur ad † fieri †. Etenim.

Si duo ſint numeri diuiſi. *Additio † ad †.*

Cùm multitudo partium vnius, aqualis fuerit multitudini partium alterius; quod fit ex additione ſingularum partium ad ſingulas, aquale eſt ei, quod emergit ex additione vnius, ex propoſitis numeris, ad alium. *Propoſitio.*

Quòd ſi multitudo partium vnius, fuerit inaqualis multitudini partium alterius.

Quod fit ex additione ſingularum partium ad ſingulas multitudine aquales, plus eo, quod ſupereſt, aquale eſt aggregato ex vtroque.

Si denique fuerit indiuiſus vnus, & diuiſus alter.

Id, quod fit ex indiuiſo, & toto diuiſo, aquale eſt ei, quod fit ex additione indiuiſi, ad vnam ex partibus, plus reliqua, vel reliquis partibus.

Si ſint e. g. duo numeri, quorum vnus 75, diuiſus in duas partes 60, & 15, alter 16, diuiſus in duas partes 10, & 6, ſi 6, addatur ad 15, fiunt 21, ſi 10, ad 60, fiunt 70, horum ſumma eſt 91, quanta fit ex 75, & 16, ſimul iunctis. *Exemplum.*

Si verò duo ſint numeri, puta, 26, & 14, quorum ille ſit in tres partes diuiſus, nempè 12, 8, & 6, hic in 10, & 4, numerus factus ex additione 14 ad 26, æqualis eſt illi, qui fit, ſi 10 addatur ad 12; & 4, ad 8, vt proueniant 22, & 12, & his addantur 6, hi enim, ſi in vnam ſummã colligantur, prouenit 40. Hoc idem contingeret, ſi 10 adderentur ad 8, & 4, ad 6, & aggregata colligerentur, ſummæque adderentur; 12, vel etiam ſi 4, ad 12, & 10, ad 6, &c.

Quòd ſi vnus diuiſus fuerit, puta 75, in 60, & 15, alter indiuiſus, nimirum 6, additis 6, ad alterutram partium, puta vel ad 60, vel ad 15, fit ſumma 60 † 21, vel 66 † 15, nempe 81; Idem autem numerus habetur ſi ad 75, addantur 6.

```
60✠15
10✠ 6          75
------         16
70✠21          --
21             91
------
91

75
16
------
91
------
60✠15
    6
------
60✠21 hoc eſt 81.
60✠15
 6
------
66✠15 hoc eſt numerus idem
         81.
```

Ita etiam de additione — ad —: & nimirum rectè inſtitutam eſſe, addendo minores minoribus, & maiores maioribus. *Additio — ad —.*

Si ſint duo numeri, à quibus duo ſubducti ſint, ipſi ſubducti ſi in vnam ſummam colligantur, aggregatum verò ſubtrahatur ex aggregato maiorum, remanet differentiarum ſumma. *Propoſitio.*

Sic etiam ſi ad — addatur —, fieri —. *Propoſitio.*

Si ſint duo numeri, à quibus duo alij ſubducti ſint. Quod fit ex additione differentiarum aquale eſt ei, quod prouenit ex additione maiorum minus aggregato minorum.

Vel id quod fit ex additione differentia inter vnum ex maioribus, & defectum alterius, ad differentiam inter alterum è maioribus, & defectum prioris, aggregato differentiarum eſt aquale.

Sint e. g. 70 — 15, & 40 — 12, reſiduum illud valet 55, iſtud 28, quorum ſumma 83, ſi verò addantur 12, ad 15, fient 27, ſi verò 40, ad 70, fient 110, horum autem differentia eſt 83, vt perſpicuum eſt, quanta eſt ſumma ex 55, & 28.

70—15
40—12
———
110—27
27
———
83
———
55
28
———
83

Vt ſi 58 differentia inter 70, & 12, addatur ad 25 differentiam inter 40, & 15; fit 83 aggregatum differentiarum, quarum vna eſt differentia inter 70, & 15, altera verò eſt differentia inter 40, & 12 &c,

Additio † ad —, & — ad †.

Quòd verò ſi ſint †, & —, fieri debeat ſubtractio, &c. & hoc modo rectè inſtitutam eſſe operationem, ſubtrahendo eos, qui afficiuntur ſignis diuerſis, &c. patet ex eo quia.

Propoſitio.

Propoſitio illa facilè demonſtrari poteſt, quæ ſic ſe habet, nimirum.

Si duo ſint numeri inæquales, quorum differentia addi debeat numero vtcumque diuiſo; perinde eſt minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium numeri diuiſi ſubtrahere, & maiorem alteri parti coniungere, aggregato verò reliquum numerum addere; ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum.

Sint 60 † 40, & 32 — 15, facta additione conſurgit 92 † 25, idem eſt enim addere 32, ad 60, & ſummæ 92, addere 25, interuallum, ſeu differentiam inter 40, & 15, ac eſt numero 100, compoſito ex 60, & 40, addere 17, differentiam inter 32, & 15; vtroq; modo conſurgent 117, pro ſumma quæſita.

60✠40
32—15
———
92✠25
25
———
117

Propoſitio.

Fieri autem ſignum †, vel prout affectus eſt numerus maior, à quo fit ſubtractio, ex eo liquet: quòd.

Si numerus aliquis fuerit vtcumque diuiſus, ei autem additus ſit duorum numerorum differentia; Summa quidem æqualis erit aggregato ex alterutra parte numeri diuiſi, & maiore ex duobus numeris differentibus, vna cum differentia inter alteram partem numeri diuiſi, & numerum minorem ex duobus differentibus.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina.

Hæc autem illuſtrari poſſunt exemplis. Sint duo numeri, compoſitus vnus 70 † 20, diminutus alter, ſcilicet 40 — 12: ſi ex 20, ſubtrahantur 12, remanent 8: ſi ad 70, addantur 40, fiunt 110: horum ſumma eſt 118, quanta reſultat ex additione numeri 28, quo differt 40, à numero 12, ad 90, numerum conflatum ex 70, & 20. Vel ſi ad 20, addantur 40, fiunt 60: ſi ex 70, ſubtrahantur 12, remanent 58; quibus additis ad 60, fiunt 118: dum enim addimus 40, ad 70 † 20, plus addimus, quàm oporteat; ſiquidem tantùm addere debemus 28, valorem illius reſidui 40 — 12, minuendus eſt igitur numerus 70 † 20, numero 12, quod fit ſubducendo 12, ab eius parte 20; nam facta ſubtractione, is, qui ſupereſt, puta 8, ſi addatur ad 70, fiunt 78, quibus ſi addantur 40, fiunt 118; vt videre licet in primo paradigmate. Sic, & in ſecundo, dum ſubtrahitur 12, ex 70, &c. minuitur enim 70 † 20, numero 12, ſubtrahendo 12, de 70, &c.

70✠20
40—12
———
70✠40✠20—12
hoc eſt 118.

70✠20
40—12
———
40✠20✠70—12
hoc eſt 118.

Demonſtratio quoad poteſtates.

Quòd attinet ad Poteſtates, etiam perſpicuum eſt, rectè fuiſſe operationem inſtitutam. Siquidem addere numerum Poteſtatum ad numerum Poteſtatum eiuſdem appellationis, nihil eſt aliud, quàm addere productum vnius numeri in alterum, ad productum alterius numeri in eundem, per quem prior ille fuit multiplicatus.

Propoſitio.

Si numerus in numerum ducatur, alter verò numerus per eundem pariter multiplicetur

tur, productorum aggregatum, æquale eſt aggregato, quod prouenit ex additione ipſorum numerorum, ducto in numerum illum, per quem communis multiplicatio facta fuit.

Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina.

Vt ſi ſint numeri 15, & 20, qui ducantur in 5, ſi 15, ducantur in 5, fiunt 75, ſi in 20, fiunt 100, horum ſumma eſt 175, modo ſi ad 15, addantur 20, fiunt 35, qui ſi ducantur in 5, fiunt quoque 175.

20	35	15	20	100
15	5	5	5	75
35	175	75	100	175

Propoſitio.

Demonſtratio eſt; quia.

Numerus planus factus ſub aliquo numero diuiſo, & altero indiuiſo, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex multiplicatione eiuſdem indiuiſi, & qualibet parte diuiſi.

Exemplo declaratur.

Sit numerus 35, diuiſus in partes 15, & 20, alter autem indiuiſus 5, numerus planus, qui continetur ſub 35, & 5, nempe 175, æqualis eſt numero 75, facto ex parte 15, & indiuiſo 5, vna cum numero 100, facto ex 20, in 5.

A45 D10 E5B C4

F240

G180 H40 I20 K

Demõſtratio.

Sint duo numeri AB, & C, ille quidem diuiſus in partes AD, DE, EB, hic autem indiuiſus; & C multiplicans AB, producat F, multiplicans autem AD, producat GH, multiplicans DE, producat HI, multiplicans EB, producat IK,; Dico F, æqualem eſſe numeris GH, HI, IK, Siquidem C, multiplicans AB, produxit F, ob id AB, metietur F, per C, nimirum AB, pars erit ipſius F, denominata à C, neq; diſſimili argumento AD, pars erit ipſius GH, denominata à C, ſic DE, ipſius HI, & EB ipſius IK, proinde quæ pars eſt AB, ipſius F, eadem erit AD, ipſius GH, & ita de cæteris. Sed quæ pars eſt AD, ipſius GH, eadem eſt totus AB, totius GK; per ea, quæ ad prop. 5. lib. 7. oſtenduntur; proinde quæ pars eſt AB, ipſius F, eadem erit AB, ipſius GK, ergo F, & GK, æquales erunt.

Additionis examẽ duplex eſt, ſcilicet per ſubtractione, & per reſolutionem in numeros abſolutos, &c.

Examen autem additionis, num videlicet quis eam ritè, citraq; errorem exercuerit duplici pacto fieri poteſt. Primò per ſubtractionem, ad eum modum ſanè, quo fit in numeris vulgaribus. Secundò reſoluendo numeros addendos Poteſtatum, iuxta aliquam radicis ſtatutam æſtimationem, in numeros abſolutos, & hos ſimul addendo, vel vnum ab altero ſubtrahendo, prout à ſigno †, vel — afficitur; mox reſoluendo numeros Poteſtatum collectæ ſummæ. Signum autem ritè aliquem operatum fuiſſe erit, ſi numeri collectæ ſummæ reſoluti, fuerint æquales numeris addendis reſoluris ſimul ſumptis. V. g. videndum ſit, num ex additione 8Q†4R, ad 10Q—2R, proueniat ſumma 18Q†2R. reſoluantur numeri addendi in numeros abſolutos, iuxta aliquam radieis æſtimationem, v. g. 3. erit enim 8Q†4R idem, quod 72†12, & ſi reſoluantur 10Q—2R, erit 90—6, quorum ſumma eſt 162†6, hoc eſt 168; huic autem debet eſſe æqualis numerus 18Q†2R, in numeros abſolutos redactus: & ita eſt; ſiquidem facta reſolutione, erit ſumma 162†6, vt patet.

8Q✠	4R
10Q—	2R
18Q✠	2R
72 ✠	12
90 —	6
162 ✠	6

De numeris ſurdis.

Quoad numeros autem ſurdos, & irrationales, nihil amplius aduertendum occurrit, præter ea, quæ traduntur de Logiſtica numerorum ſurdorum vulgarium. Itaq; ſi numeri irrationales, per quos numerantur poteſtates, fuerint æquales, addantur, vt illi; nempè facta multiplicatione per 2, redactum ad radicis naturam, v. g. ad ℞Q10R, debeat addi ℞Q10R, fiet ſumma ℞Q40R. Sic ſi fuerint radices cubicæ, &c. Vt ſi ad ℞C30Q, addi debeat ℞C30Q, fiet ſumma ℞C240Q: numerus enim 2, redigi debet ad naturam illius radicis, de qua loquimur.

Quando numeri ſũt inæquales commenſurabiles quid agendũ.

Quòd ſi numeri ſint inæquales commenſurabiles; agatur, vt de ipſis ſuo loco dictum eſt; videlicet ducatur vnus in alterum, & producti numeri extrahatur radix quadrata, quæ duplicetur; hoc autem duplum addatur ſummæ quadratorum, ſi loquamur de radicibus quadratis. Huius radix quadrata erit ſumma

Pote-

Poteſtatum, &c. Exemplum. Ad ℞Q20R, addatur ℞Q5R, fiet ſumma ℞Q45R; & ſi ad ſurdum denominatum, addere deberemus numerum non ſurdum denominatum; vt ad ℞Q5Q, addere oporteat 3Q, fiet additio per ſignum †, & proueniet ℞Q5Q†3Q, & ita de reliquis. Item ex ℞Q8R, ad ℞Q8R, fiet ſumma ℞Q50R, cum ℞Q8, & ℞Q8, ſint commenſurabiles.

Quando radices fuerint incommenſurabiles.

Cum autem radices non fuerint commenſurabiles, abſoluetur item additio, beneficio ſigni †, vt ad ℞Q7R, ſit opus addere ℞5R, fiet ſumma ℞7R†℞5R. Item ex ℞C15R, ad ℞C6R, fiet ſumma ℞C15R†℞C6R. Item ex ℞36R ad ℞12Q fiet ſumma ℞36R†℞12Q ſiue ℞12Q†℞36R.

Primus incommenſurabilitatis modus.

Verùm radices commemoratæ poterunt eſſe bifariam incommenſurabiles. Primò quoad numerum; quando nimirum (loquendo de radicibus quadratis) numeri non ſunt in proportione, vt numerus quadratus, ad numerum quadratum; & ſi loquamur de radicibus cubicis, non fuerint in ratione tanquam numerus cubus, ad numerum cubum, &c.

Secundus modus incommenſurabilitatis.

Secundò, quando dignitates fuerint diuerſæ; vt ſi quidam numerus ſurdus afficiatur cubo, alter verò Q &c. in huiuſmodi caſu abſoluitur additio beneficio ſigni † vt ex ℞5Q, ad ℞20R, fit ſumma ℞5Q†℞20R, & ex his colligitur methodus additionis numerorum compoſitorum irrationalium denominatorum.

Additio numerorum ſimplicium, quæ intra parentheſin clauduntur.

At verò hinc facilè conſtabit additio numerorum ſimplicium, qui intra parentheſin clauduntur; & radices vniuerſales ſimplices dicuntur; obſeruatis enim ijs, quæ diximus, facili negotio operationem expediemus. Vt ſi ad ℞(12C) addere debeamus 6R, fiet ſumma 6R†℞(12C) Item ex ℞(7QC) ad ℞(12C) fit ℞(7QC†12C) & ſi ad ℞(15C) addere oportent ℞(5R) fit ſumma ℞(15C†5R) Inſuper ex ℞(13C) ad ℞(17C) fit ſumma ℞(13C†17C) & ſic de reliquis incommenſurabilibus ſimplicibus vniuerſalibus radicibus. Vt ex ℞C(18Q) ad ℞C(15R) fit ℞C(18Q†15R) & ex ℞C(18QC) ad ℞C(15R) fit ℞C(18QC†15R) & ex ℞C(20Q) ad ℞C(15R) fit ℞C(20Q†15R) & ex ℞C(18QQ) ad ℞C(7QQ) fit ℞C(18QQ†7QQ). vt inferiùs, magis explic.

Quando fuerint commenſurabiles, quid agendum.

Si verò fuerint commenſurabiles, obſeruentur præcepta, quæ traduntur de huiuſmodi numeris ſurdis in generali; ſi fuerint inquam commenſurabiles, tàm quoad numerum, quàm quoad Poteſtates. Ad ℞(12R) addenda ſit ℞(3R) fiet ſumma ℞(27R) Item ad ℞(32R) addere oporteat ℞(2R) fiet ſumma ℞(50R) Inſuper ex ℞(8Q) ad ℞(18Q) fiet ſumma ℞(50Q) & ita de cæteris radicibus, nempe Cubicis, Quadrato-quadraticis, &c. obſeruatis præceptis conſentaneis earum naturis.

Explicatur ſuperior doctrina.

Huius autem eſt ſenſus, vt pretium radicis, ducatur in 12, producti autem ſumatur latus iuxta prefixi characteris naturam. Itemq; idem pretium ducatur in 3; producti verò ſumatur latus; ita vt, dum fit ℞(27R) ſenſus ſit, in pretium radicis, ductum eſſe 27, producti verò ſumptum eſſe latus.

Senſus harum radicũ magis declatur.

Non enim redditur ſenſus, productum ex multiplicatione pretij radicis, in 12, additum eſſe producto ex multiplicatione eiuſdem pretij radicis in 3; aggregati vero eſſe acceptum latus, ſignificatum per ℞(27R. Res enim non ſic ſe habet. Quando enim dicimus ℞(12R) ſignicare intendimus latus quadratum producti ex 12, in pretium radicis. Et quando dicimus ℞(3R) ſignificare volumùs latus quadratum producti ex 3 in pretium radicis. Cùm igitur addere volumus ℞(12R) ad ℞(3R) ſignificare intendimus, latera prædicta inter ſe addenda eſſe, vnde fit ℞(27R) ſumma quæſita predictorum laterum.

Demonſtratio autem ea eſt cum dignitas eſt R; Quoniam.

Propoſitio.

Si numerus quiſpiam duos numos multiplicet, productorum autem latera ſimul addantur. Hoc aggregatum æquale erit numero, qui latus eſt numeri producti, ex multiplicatione prædicti numeri multiplicantis, in numerum qui fit, ſi multiplicati iam dicti inter ſe ducantur, productiq; latus duplum addatur ipſorum multiplicatorum aggregato.

Declaratur ſuperior propoſitio.

Si ſint duo numeri 12. & 3; Sumptuſque ſit tertius quiſpiam numerus exempli gratia 3; hic ductus in 12. facit 36; ductus autem in 3, facit 9. horum latera ſunt 6, & 3, quorum aggregatum eſt 9.

Ducatur modo 12, in 3, (ſunt autem 12, & 3. duo numeri propoſiti, qui ducti

fuerunt

Digitized by Google

fuerunt per tertium numerum 3) ducantur inquam, & fit 36, cuius latus eſt 6. huius duplum eſt 12, quod additum 15. aggregato ex 12, & 3, fit 27, qui ductus in multiplicantem 3, facit 81, cuius latus eſt 9.

Alio ex exẽple declaratur.

Præterea ſint duo numeri 25, & 9, quos multiplicet 4, producti erunt 100, & 36; quorum latera ſunt 10, & 6; & horum aggregatum eſt 16.

Ducatur 25 in 9, & prouenit 225, cuius latus eſt 15; cuius duplum eſt 30, quod additum ad 34, aggregatum ex 25, & 9, facit 64, quo ducto in prædictum numerum multiplicantem 4, fit 256, cuius latus eſt 16 vt ſupra.

Rurſus affertur alia declaratio.

Inſuper duo ſint numeri 25, & 9, qui ducti in 2, faciunt 50, & 18; quorum latera ſunt ℞ 50, & ℞ 18. aggregatum ex his, eſt ℞ 50 † ℞ 18. hoc eſt ℞ 128.

Modo multiplicetur 25; per 9; & fit 225, cuius latus eſt 15; huius duplum eſt 30, quo addito ad 34 aggregatum ex 25, & 9. fit 64, qui ductus in eundem multiplicantem 2, facit 128; cuius latus eſt ℞ 128 vt ſupra &c.

Proximum eſt, vt demonſtrationem afferamus.

Demonſtratio.

Si ſint numeri A, B, quos multiplicet C; producti autem ſint D, & E, quorum latera ſint F, & G; horum autem aggregatum ſit H; Si ducatur A, in B, numeri autem producti latus duplicetur: duplum ipſum addatur aggregato ex A, & B; ſumma ducatur in C, productiq; ſumatur latus. Dico hoc æquale eſſe H.

A 25	C 4	B 9		
D 100		E 36		
F 10		G 6		
	H 16			

25	15	64
9	15	4
225	30	265
	25	
15	9	16
	64	

Analyticè.

Vt autem hæc demonſtremus, primùm ea iuuabit ἀναλυτικῶς poſtmodum Geometricè tractare. Deniq; demonſtrationem vniuerſalem Arithmeticam afferre.

Analytica demonſtratio.

Sint numeri a, & b, quos multiplicet, c, producti autem erunt ac, bc, quorum latera ſunt ℞ ac, ℞ bc aggregatum ex his eſt ℞ ac † ℞ bc.

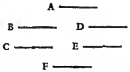
At verò ſi, a, ducatur in, b, fiet, ab, cuius latus eſt ℞ ab. Duplum autem ipſius ℞ ab, eſt 2 ℞ ab cui additis, a, & b, fiet 2 ℞ ab † a † b, quo ducto in c, fiet 2 ℞ abc² † ac † bc, ſeu quod idem eſt ac † 2 ℞ abc² † bc, cuius latus eſt ℞ ac † ℞ bc; idque deprehenditur ex multiplicatione ℞ ac † ℞ bc in ſe; ſi igitur a, ducatur in c, & b, in c, productorum autem ſumentur latera, hæc verò in vnam ſummam colligantur. Dico hoc æquale eſſe ei, quod prouenit ſi ducatur, a, in, b, & producti latus duplum addatur ipſis, a, & b aggregatum verò ducatur in, c, productiq; ſumatur latus. &c. Facilè tamen hæc Geometricè demonſtrari poterunt, præmiſſis quę ſequūtur.

Præmittuntur non nulla ad Geometricam demonſtrationem.

LEMMA I.

Propoſitio.

SI fuerint quantitates, A, B, C, & D, E, F: Itaut A, B, C, ſint continuè proportionales. Item A, D, E, pariter continuè proportionales, & inter C, E, media ſit proportionalis F. Dico eſſe, vt B, ad D, ita C, ad F.



Demonſtratio.

QVandoquidem eſt, vt A, ad B, ita B, ad C, erit a vt C, ad B, ita B, ad A, atq; adeo b vt C, ad A, ita quadratum B, ad quadratum A; Et quoniam eſt vt A, ad D, ita D, ad E. Proinde erit c quadratum A, ad quadratum D, vt A, ad E; Vt igitur C, ad A, ita quadratum B, ad quadratum A, & vt A, ad E, ita quadratum A, ad quadratum D; Proinde ex æquali d vt, C ad E, ita quadratum B, ad quadratum D. Quamobrem e, vt B, ad D, ita C, ad F, quæ media proportionalis eſt inter C, & E. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

a coroll. 4. quinti.
b coroll. 20. ſexti.
c. coroll. 20. ſexti.
d. 22. quinti.
e. coroll. 20. ſexti.

LEMMA

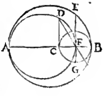
LEMMA II.

Propoſitio.

SI fuerit circulus A E B, cuius diameter A B, eumque ad punctum A, tangat circulus alter A D F, ſitq; deſcriptus alius C B G, priorem tangens in B, ſecundum ſecans; per F, acta ſit E G, tangens A D F, circulum in F, ex C, verò ducta ſit C D, tangens C G B, in ipſo C: acta verò ſit D F. Dico eſſe vt D F, ad F E, ita G F, ad F B.

Demōſtratio. *a corol. 8. ſexti & 17. eiuſdem.* *b ex lemmate antecedente.* *d corol. 4. quinti.*

HOC patet ex eo, quod præmiſimus Lemmate. Siquidem ſunt tres proportionales, A F; F E; F B; Item A F, F D, F C; at verò inter C F, & F B, media eſt a proportionalis F G. Proinde erit b vt F B, ad F G, ita F E, ad F D, ſeu conuertendo, d vt F G, ad F B, ita F D, ad F E.



Quod erat nobis propoſitum demonſtrare.

Proponitur, quod aſſumitur Geometricè demonſtrãdum.

Cum autem inſtituitur additio; Multiplicatis numeris inter ſe, & producti accepto latere, huic autem duplicato, addatur aggregatum numerorum &c. Sic ſe habebit Geometrica demonſtratio.

THEOREMA.

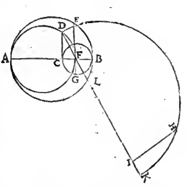
Propoſitio.

QVAE ſuperiùs allata fuerunt, Geometricè demonſtrantur, hunc in modum. Sint A C, C F, dignitate affecti numeri, & F B, dignitatis pretium, nempe pretium radicis. Ducatur A F, in F B, & proueniat quadratum F E; Ducatur C F, in F B, & proueniat F G, quadratum; Horum laterum F E, F G; aggregatum ſit E G, mox verò ducatur A F, in C F, nempe numerus, in numerum, & proueniat D F, quadratum, cuius latus D F, duplicetur in L; protrahatur ad I, itaut L I, æqualis ſit aggregato ex A F, C F; protrahatur in K, vt I K, ſit æqualis F B; deſcribatur ſemicirculus D H K; excitetur perpendicularis I H.

Oſtendendum eſt I H, æqualem eſſe ipſi G E.

Demonſtratio Geometrica.

Quandoquidem L I, æqualis eſt A F, plus C F, proinde rectangulum ſub L I, & I K, ſeu F B, æquale erit rectangulo A F B, plus rectangulo C F B, hoc eſt quadratis F E, & F G, Quoniam autem, ex ſecundo, quod præmiſimus Lemmate, vt D F, ad F E, ita eſt G F, ad F B, propterea rectangulum D F B, æquale erit rectangulo E F G, atq; adeo duplum rectangulum ſub D F, F B, æquale erit duplo rectangulo E F G: eſt autem D L, ex conſtructione, dupla ipſius D F, & ob id rectangulum ſub D L, & F B, duplum erit rectanguli ſub D F, & F B, Sed recta B F, æqualis eſt I K, quocirca rectangulum ſub D L, & I K, duplum eſt rectanguli ſub D F, & F B, atque adeo duplum erit rectanguli E F G. Seu



quod

quod idem eſt, rectangulum ſub D L, & I K, æquale erit duplo rectangulo E F G; At verò rectangulum ſub L I, & I K, æquale demonſtrauimus quadratis E F, F G, proinde rectangulum ſub D L, & I K, vna cum rectangulo ſub L I, & I K, æquale erit quadratis E F, F G, plus duplo rectangulo E F G; At verò rectangulum ſub D L, & I K, plus rectangulo ſub L I, & I K, æquale eſt[a] rectangulo D I K, ſeu[b] quadrato I H; & quadrata E F, F G, plus duplo rectangulo E F G, æqualia ſunt [c] quadrato E G; Propterea quadratum E G, æquale erit quadrato I H; atque adeo recta E G, æqualis erit rectæ I H. Quod erat nobis propoſitum demonſtrare.

a 1. ſexti. b corol. 8. ſexti & 17. eiuſdē. c 4. ſecundi.

Primùm autem generale præceptum additionis, radicibus vniuerſalibus quadratis applicatum oſtendemus, deinceps, ad cubicas translatum allaturi; quod quidem tamen ad generalem formam reductum, poſtmodum afferemus.

LEMMA

SINT duo numeri A, B, qui multiplicati per C, producant E & G, latera autem ipſorum A, & B, ſint L, M, quorum aggregatum ſit D; ipſorum E, G, latera ſint F, H; quorum aggregatum ſit I; cuius quadratum X. At quadratum ipſius D, ſit T.

Oſtendendum eſt, ita eſſe C ad vnum; vt X ad T.

A 16		B 36
L 4	D 10	M 6
E 144	C 9	G 324
F 12	I 30	H 18
	X 900	
	T 100	

Quandoquidem C, multiplicans A, & B, fecit E, G, erit[a], vt A, ad B, ita E, ad G, atq; adeo, vt[b] L, ad M, ita F, ad H, ſed, & componendo[c], vt L, plus M, nempe D, ad M, ita F, plus H, nimirum I, ad H, & permutando[d], vt D ad I, ita M, ad H, ſeu L, ad F, ſed A, ad E, duplicatam habet[e], rationem eius, quæ eſt L, ad F, ergo A, ad E, habebit[f], duplicatam rationem eius, quæ eſt D, ad I, ſed A, ad E, eſt[g], vt vnum ad C, ergo vnum ad C, habebit[h], duplicatam rationem, eius quam habet D, ad I. Sed T, ad X, habet[i], duplicatam rationem eius, quam habet D, ad I, eſt enim T, quadratum ipſius D, & X, quadratum ipſius I; ergo T, ad X, habebit[k], rationem, quam habet vnum ad C, atq; adeo, conuertendo, vt C, ad vnum, ita X, ad T, Quod oportebat oſtendere.

a 17. ſeptimi. b ex elementis & deducitur ex 11. octaui. c ſchol. 22. ſeptimi. d 13. ſeptimi. e 11. octaui. f lemma 14. ſeptimi. g ex definit. multipl. h lemma 14. ſeptimi. i 11. octaui k lemma 14. ſeptimi.

SINT duo numeri A, & B, quibus diuiſis per K, fiant quotientes E, G; propoſitorum autem numerorum A, B, latera ſint L, & M, quorum aggregatum ſit D: at ipſorum E, & G, latera ſint F, & H, quorum aggregatum ſit I; cuius quadratum X, & quadratum ipſius D, ſit T.

Oſtendendum eſt ita eſſe K, ad vnum, vt T, ad X,

A 16		B 36
L 4	D 10	M 6
E 4	K 4	G 9
F 2	I 5	H 3
	X 25	
	T 100	

Quandoquidem K, diuidens A, B, facit quotientes E, G, ergo erit[a], vt A, ad B, ita E, ad G, quare etiam[b], vt L, ad M, ita F, ad H, & componendo[c], vt L, plus M, nempe D, ad M, ita F, plus H, nimirum I, ad H, & permutando[d], vt D, ad I, ita M, ad H, ſeu L, ad F, ſed A, ad E, duplicatam habet[e], rationem, eius, quæ eſt L, ad F, ergo etiam A, ad E, duplicatam habebit[f], rationem, eius, quæ eſt D, ad I. Sed A, ad E, eſt[g], vt K, ad vnum, ergo K, ad vnum duplicatam habebit[h], rationem, eius, quæ eſt D, ad

a ex elementis & deducitur ex 11. ſeptimi. b ex elementis & ducitur ex 11. octaui. c ſchol. 22. ſeptimi. d 13. ſeptimi. e 11. octaui. f Lemma 14. ſeptimi.

D I.

Digitized by Google

g ex definitione multiplicationis. h Lemma 14. ſeptimi. i 11. eiuſdem. k Lemma 14. ſeptimi.

I. Sed T, ad X, habet[i], etiam duplicatam rationem, eius, quæ eſt D, ad I; eſt enim T, quadratum ipſius D, & X, quadratum ipſius I; ergo T, ad X, rationem habebit[k], quam habet K, ad vnum. Quod oportebat oſtendere.

LEMMA II.

Spectat ad primum Paradigma.

Si duo numeri per aliquem numerum fuerint multiplicati, & productorum latera colligantur in vnum, huius verò quadratum, diuidatur per communem multiplicantem; quotiens autem ſeruetur.

Spectat ad ſecundum Paradigma.

Iiſdem autem numeris per quendam numerum diuiſis, quotientium latera colligantur in vnum, & huius quadratum multiplicetur per communem diuiſorem: productum æquale erit quotienti, ſupra iam ſeruato.

Paradigma Primum.

A 16		B 36
	C 9	
E 144		G 324
F 12		H 18
	I 30	
	X 900	
	T 100	

Paradigma Secundum.

A 16		B 36
	K 4	
L 4		M 9
N 2		O 3
	P 5	
	Q 25	
	X 4	
	V 100	
	C 9	
	X 900	
	Y 30	

Sint duo numeri A, & B, qui multiplicati, per C, producant E, & G, quorum latera ſint F, & H, horum autem aggregatum ſit I; cuius quadratum X, quo diuiſo per C, proueniat T.

Iiſdem A, & B, diuiſis per K, proueniant L, M; quorum latera ſint N, & O, & horum aggregatum ſit P, cuius quadratum Q, ductum in K, producat V.

Oſtendendum eſt V, æqualem eſſe T,

Quandoquidem C, multiplicans A, & B, produxit E, & G, quorum latera ſunt F, & H. & horum aggregatum eſt I, cuius quadratum X, proinde per primam partem Lemmatis antecedentis, erit, X, ad quadratum aggregati ex lateribus ipſorum A, & B, vt C, ad vnum, Sed vt C, ad vnum ita [a]X, ad T, eo quòd diuiſo X, per C, prouenit T, ergo T, erit quadratum aggregati, ex lateribus ipſorum A, & B.

a ex definitione diuiſionis.

Quoniam autem diuiſis A, & B, per K, proueniunt L, & M, quorum latera ſunt N, O, & horum aggregatum eſt P, cuius quadratum eſt Q; erit T, quadratum aggregati ex lateribus ipſorum A, & B, ad Q, vt K, ad vnum per ſecundam partem Lemmatis antecedentis. Sed vt K, ad vnum ita eſt [b]V, ad Q, ſiquidem V, factum eſt ex multiplicatione Q, per K, ergo V, æquabitur T. Quod erat operæ pretium oſtendere.

b ex definitione multiplicationis.

Vniuerſaliter demonſtratur Arithmeticè, quod ſupra fuit propoſitū oſtendendum, & quod Geometricè de radicibus huiuſmodi quadratis tātummodo demoſtratum fuit.

Vniuerſaliùs igitur, ſiue nimirum radices fuerint ligatæ, quadratæ, ſiuè, cubicę, &c. inſtituetur demonſtratio operationis, qua ipſæ inter ſe adduntur, eo, qui ſequitur modo. Operationis autem eſt præceptum, vt Reperiatur communis diuiſor, qui nimirum diuidat numeros affectos addendos, quotientium autem latera iuxta naturam radicis, de qua eſt ſermo, ſimul addantur, ſumma verò multiplicetur in ſe, iuxta naturam prædictæ radicis, productum autem ducatur in communem diuiſorem, & productum aſſumens dignitatis characterem claudatur parentheſi, eique præfixum ſit ſignum radicale, iuxta radicis naturam &c, quod enim prouenit, erit ſumma quæſita, Facilitatis gratia, de radicibus quadratis ſolum afferemus exemplum.

Sint

Proponitur quod eſt oſtendendum.

Sint duo numeri A, & B, qui multiplicati per C, producant E, & G, horum latera ſint F, & H, quorum ſumma ſit I.

Iidem verò A, & B, diuidantur per K, quotientes autem ſint L, M, quorum latera N, O, horum ſumma ſit P, cuius quadratum Q, ductum in K, producat V, qui ductus in C, producat X, cuius latus Y.

Paradigma Primum.

A 16 B 36
C 9
E 144 G 324
F 12 H 18
I 30

Oſtendendum eſt Y, æqualem eſſe I.

X 900
T 100

Quadratum ex I, eſto X, quo diuiſo per C, proueniat T.

Paradigma Secundum.

A 16 B 36
K 4
L 4 M 9
N 2 O 3
P 5
Q 25
K 4

V 100
C 9

X 900
Y 30

Demõſtratio.

Quoniam igitur A, & B, multiplicati per C, producunt E, & G, &c. ex eo, quod præmiſimus Lemmate, erit T, quidem æqualis V, ſeu quod idem eſt dum diuiſo X, per C, emergit T, tantum proueniet, quantum K, multiplicando Q producit V. Quamobrem ſi, quod ſit ex Q, in K, multiplicetur per C, proueniet X; atque adeo latus ipſius X, nempè I, æquale erit Y, lateri eius, quod prouenit ex ductu Q, in K, & producti multiplicati per C. *a 22. octaui.*

Vbi aduerte per C, intelligi dignitatis pretium; at verò per A, & B, numeros, qui dignitate afficiuntur.

Notarum ſignificatio.

Præterea ex † ℞(45 C) ad —℞(5 C) fit ſumma † ℞(20 C) etenim † ad — ſubtrahitur, remanetq; ſignum numeri maioris. Item ex ℞ C(81 Q) ad ℞ C(24 Q) fit ſumma ℞ C(375 Q) etenim communis diuiſor eſt 3, qui in 81, continetur viginti ſepties, & in 24, continetur octies; at verò ℞ C, numeri 27, eſt 3, & numeri 8, eſt 2, horum ſumma eſt 5, huius cubus 125, qui ductus in 3, communem diuiſorem (hæc omnia iubent fieri præcepta numerorum irrationalium) facit 375. Præterea ex † ℞ C(20 R), ad — ℞ C(20 R) fit ſumma 0, Item ex † ℞ C(500 R) ad — ℞ C(256 R) fit ſumma † ℞ C(4 R) etenim † & — in Additione ſubducuntur, remanetq; ſignum maioris numeri. Communis autem diuiſor eſt 4, qui numerum 500, metitur per 125, & numerum 256, per 64, modò ℞ C, numeri 125, eſt 5, & numeri 64, eſt 4, quo ablato ex 5, remanet 1, cuius cubus eſt 1, qui ductus in 4, communem diuiſorem, producit 4, &c. fit ergo ſumma † ℞ C(4 R). *Exemplis declaratur ſuperior doctrina.*

Porrò ſi fuerint illi numeri ſurdi, qui radices vniuerſales compoſitæ dicuntur, obſeruentur earum leges citra characteres poteſtatum traditæ, & iidem tribuantur characteres ſummis collectis.

Quando fuerint illi numeri ſurdi, qui radices vniuerſales compoſita dicuntur, quid agendũ. Primò, videndum, num ſint ſimiles natura, & numero.

Primò videndum eſt, num ſint ſimiles natura, & numero; deinde procedendum, vt diximus, de numeris ſurdis ſuo loco, &c. nempè addantur iuxta radicis naturam, vt ſuo loco docuimus.

Non ſemel enim monuimus, cum de huiuſmodi Radicibus vniuerſalibus, ſermonem haberemus; non ſecus in earum Algorithmo procedendum eſſe; ac fieri ſolet in numeris, quos ſurdos appellant. Quamobrem oportet diligenter aduertere illorum numerorum præcepta, quibus obſeruatis, facillimum erit in his vniuerſalibus radicibus operationem, quæcunque illa ſit, perficere.

Secundò obſeruandum, num ſint commenſurabiles.

Secundò obſeruandum num ſint commenſurabiles, an non, ſi non extiterint commenſurabiles, addantur ſigno †, ſi fuerint commenſurabiles, obſeruentur præcepta additionis Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. *Exempla.* Ex ℞ (7 Q † 5 R) ad ℞ (3 Q † 2 R) fit ſumma ℞ (7 Q † 5 R) † ℞ (3 Q † 2 R) ita ſi ad ℞ (5 Q † 3 R) addatur ℞ (3 Q † 5 R) fiet ſumma ℞ (5 Q † 3 R) † ℞ (3 Q † 5 R) ſunt enim incommenſurabiles.

Quando fuerint commenſurabiles.

At verò ſi commenſurabiles fuerint, obſeruaentur pręcepta Additionis, Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. Ita ex ℞ (2 Q † 2 R) ad ℞ (32 Q † 8 R) fiet ſumma ℞ (50 Q † 18 R) cum ſint commenſurabiles. Comunis enim diuiſor eſt 2, qui diuidens 32; reddit quotientem 16; diuidens verò 2, reddit 1; illius latus quadratum eſt 4, iſtius autem eſt 1, quorum ſumma eſt, 5, cuius quadratum eſt 25, quo ducto in 2. comunem diuiſorem, fit 50; igitur proueniet 50 Q. Inſuper communis diuiſor eſt 2; per quem diuiſo 8, fit 4, diuiſo autem 2. fit 1. illius latus quadratum eſt 2; iſtius autem eſt 1. quorum ſumma eſt, 3, cuius quadratum 9. ductum in 2. comunem diuiſorem, facit, 18. prouenit igitur 18 R Inſuper ex additione ℞ (12 Q † 8 R) ad ℞ (3 Q † 2 R) fiet ſumma ℞ (27 Q † 18 R) etenim ſi 12 per 3 diuidatur, fit quotiens 4, numerus quadratus, ſi 3, per 3 diuidatur, fit quotiens 1,

Explis explicantur, quæ ſuperius dicta ſunt.

Radix autem quadrata numeri 4, eſt 2, & 1, eſt 1, harum radicum ſumma eſt 3, cuius quadratum eſt 9, quod ſi in 3, communem diuiſorem ducatur, producitur 27; huic autem numero ſi addatur character Q, fiet ſumma 27 Q. Deinde ipſorum 8, & 2, communis diuiſor eſt 2, qui diuidens 8, facit quotientem 4, diuidens 2, facit 1; at ℞ Q, numeri 4, eſt 2, & 1, eſt 1, quæ inuicem collectæ faciunt 3, huius quadratum eſt 9, quod ſi ducatur in 2, communem diuiſorem producitur 18, cui appoſito eodem charactere, fit ſumma 18 R, hæ ſummæ additæ inuicem per ſignum †, & incluſæ intra parentheſin, præpoſito tamen ſigno eodem radicali, faciunt ſummam quæſitam, hoc modo ℞ (27 Q † 18 R).

Superior operatio numeris illuſtretur.

Hæc autem operatio enucleatur numeris abſolutis hoc modo. Ad veritatem oſtendendam; ſupponamus 1 R, pretium eſſe 2, quadratum erit 4, Itaq; 12 Q, pretium erit 48, & 8 R, erit 16, horum ſumma, vt vides eſt 64, cùmq; includantur intra parentheſim præpoſito ſigno radicali quadrati; extrahatur ℞ Q, eſtq; 8 Item 3 Q, erunt 12; atq; adeo 2 R, erunt 4, horum ſumma eſt 16, cuius ℞ Q eſt 4, quæ addita ad 8, vnitates ſuperiùs ſeruatas facit 12. Modò explicemus ſummam illam ℞ (27 Q † 18 R) cum 1 R pretium ſit 2, certè 27 Q, valebunt 108, & 18 R, valebunt 36, horum ſumma eſt 144, cuius ℞ Q eſt 12, vt oportebat.

48
16
—
64
8

Hìc autem aduertendum, quod in ſcholio ad calcem iſtius Algorithmj cumulatiùs tractabimus; aduertendum inquam per has radices ligatas, denotari latus eius, quod producitur per multiplicationem pretij dignitatis, in numerum, additum eſſe lateri eius, quod producitur ex multiplicatione dignitatis in numerum, non autem latus totius aggregati.

Vnde ſi volumus addere ℞ (2 Q † 2 R) ad ℞ (32 Q † 8 R) ſenſus eſt, vt latus eius, quod producitur ex multiplicatione pretij quadrati in 2, additum ſit lateri eius quod producitur, ex multiplicatione radicis in 2, & hoc aggregatum additum ſit alteri aggregato, quod habetur, ſi accipiatur latus eius, quod producitur, ex multiplicatione pretij quadrati in 32, & addatur lateri eius, quod producitur, ex multiplicatione pretij R, in 8, hoc enim aggregatum, reprçſentatur per ſummam illam ℞ (50 Q † 18 R), cuius eſt ſenſus, vt latus eius, quod producitur, ex multiplicatione pretij quadrati in 50, additum ſit lateri eius, quod producitur, ex multiplicatione pretij radicis in 18.

Non diſſimiliter, cùm ad ℞ (3 Q † 2 R) addere volumus ℞ (12 Q † 8 R) ſenſus enim eſt, vt latus eius, quod prouenit, ex multiplicalione pretij Q in 12. additum ſit lateri eius, quod prouenit, ex multiplicatione pretij R in 8. Alterius autem radicis vniuerſalis ſenſus eſt, vt latus eius, quod prouenit, ex multiplicatione pretij Q in 3, additum ſit lateri eius, quod prouenit, ex multiplicatione pretij radicis in 2; & horum ſumendum ſit aggregatum, quod eſt ℞ (27 Q † 18 R), Cuius eſt ſenſus, vt latus, eius, quod prouenit, ex multiplicatione pretij Q in 27, additum ſit lateri

eius,

Digitized by Google

eius, quod prouenit ex multiplicatione pretij R in 18.

Ratio autem, ac demonſtratio ea eſt; Quoniam.

Si ſint numeri A, B, E, F, & A ducatur in C, & proueniat I. & B, ducatur in D, & proueniat K; inſuper E, ducatur in C, & proueniat L, & F, ducatur in D, & proueniat M. Productorum I, & K, latera ſint N, & O, quorum ſumma ſit R, productorum autem L, & M, latera ſint P, & Q, quorum aggregatum ſit S. Aggregatum autem ex R, & S, ſit T.

Dico idem prouenire, ſi A, ducatur in E, productique ſumatur latus, eiuſque duplum addatur aggregato ex A, & E, aggregatum autem ducatur in C, producti verò ſumatur latus, quod ſeruetur. Deinde.

Ducatur B in F, & producti ſumatur latus, huius duplum addatur aggregato ex B, & F, aggregatum verò ducarur in D, & producti ſumatur latus, hoc enim additum lateri ſeruato, efficiet T.

Hoc etiam cernitur in ſuperioribus numeris. Si enim 6, ducatur in 8, producitur 48, ſi 5, ducatur in 3, producitur 15, quorum latera ſunt ℞ 48, & ℞ 15.

Prȩterea ſi 12 ducatur in 8, producitur 96, ſi verò 4, ducatur in 3. producitur 12, quorum latera ſunt ℞ 96, & ℞ 12. Aggregatum ex his omnibus eſt ℞ 48 † ℞ 15 † ℞ 96 † ℞ 12. Tantum autem fiet, operando hunc in modum. Ducatur 6. in 12. nimirum A, in E, & producitur 72. cuius latus eſt ℞ 72, huius duplum eſt ℞ 288, quod addendum eſt 18, aggregato ex A, & E, proueniet ℞ 288 † 18; hoc autem ducendum eſt in 8, nempè in C, & proueniet ℞ 18432 † 144, huius autem binomij latus eſt ℞ 96 † ℞ 48. Prȩterea ducatur, 5 in 4, nempè B, in F, & producitur 20. cuius latus eſt ℞ 20, huius duplum eſt ℞ 80, quod additum 9, aggregato ex 5, & 4, prouenit ℞ 80 † 9, hoc autem ducendum eſt in 3, nempe in D, & prouenit ℞ 720 † 27. Huius autem binomij larus, eſt ℞ 15 † ℞ 12. Manifeſtum eſt autem ex ℞ 96 † ℞ 48, & ex ℞ 15. & ℞ 12. fieri quatrinomium illiud ℞ 48 † ℞ 15 † ℞ 96 † ℞ 12 &c.

A 4. B 3. E 36. F 12

C 9 D 3

I 36 K 9 L 324 M 36

N 6 O 3 P 18 Q 6

R 9 T 33 S 24

A 6 B 5 E 12 F 4

C 8 D 3

I 48 K 15 L 96 M 12

N ℞ 48, O ℞ 15 P ℞ 96. Q ℞ 12

℞ 48 † ℞ 15 † ℞ 96 † ℞ 12.

Præterea ad ℞(512Q — 150R) addatur ℞(72Q † 150R) fiet ſumma ℞(968Q). Namq; communis diuiſor erit numerus 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 512, metitur per 64, & ℞ Q numeri 9, eſt 3, & nnmeri 64, eſt 8, hornm ſumma eſt 11, huius quadratum eſt 121, quod ductum in 8, communem diuiſorem facit 968Q, ſed in addendis †, & — fit ſubtractio; Si ad — 150R, addantur † 150R fiet 0, ac proinde ſumma erit ℞(968Q). Item ſi ad ℞(216C † 63R) addantur ℞(24C † 28R) & ℞(54C † 175R). Communis diuiſor numerorum, qui C, afficiuntur eſt 6, qui 216, metitur per 36, & 24, per 4, & 54, per 9. Horum radices quadratæ ſunt 6, 3, 2, quorum ſumma 11, cuius quadratum eſt 121, quod ſi ducatur in 6, communem diuiſorem; producitur 726C. Numerorum autem, qui R, afficiuntur, communis diuiſor eſt 7, qui 63, metitur per 9, & 28, per 4, & 175, per 25. Horum radices quadratæ ſunt 3, 2, 5, quarum ſumma eſt 10, quæ ducta in 7, communem diuiſorem facit 700R; Atq; adeo fiet ſumma intra parentheſim ℞(726C † 700R). *Exempla.* *Superior doctrina declaratur exēplis.*

Poterunt

Superiora exempla numeris illuſtrantur.

Poterunt autem explicari hæc omnia ; quemadmodum alia ſuperiora exempla nos enucleauimus. Vt ſi ſupponamus 1 R valorem eſſe ℞ 2, certe 1 Q, valebit 2, itaq; ℞ (5 1 2 Q) valebit 32, vt ℞ (7 2 Q) valebit 1 2, horum ſumma eſt 44; at verò ſi ℞ (968 Q) explicetur ſecundum eandem æſtimationem, valebit quoq; 44; Si ſupponamus 1 R, valorem eſſe ℞ 3, quadratum erit 3, quo ducto in 5 1 2, fit 1 5 3 6, item ducto in 72, fit 2 1 6; ergo ℞ (5 1 2 Q) valebit ℞ 1 5 3 6, & ℞ (7 2 Q) valebit ℞ 2 1 6, ſi verò in vnam ſummam colligantur, fit ℞ 2 9 0 4; at verò ſi 968, multiplicetur per 3, pretium quadrati, fiet 2 9 0 4; atque ℞ (968 Q) valebit ℞ 2 9 0 4.

Aduerte autem ad paginam 37. per numeros A, B, E, F, denotari numeros dignitatum, & per C, H, dignitatum pretia; ita vt H, ſignificet pretium radicis, & C, pretium quadrati, quod inoteſcet, ſi hæ radices vniuerſales ℞ (4 Q + 3 R) & ℞ (3 6 Q + 1 2 R) reſoluantur in numeros abſolutos; Si enim in numeros abſolutos reſoluatur ℞ (4 Q + 3 R) erit idem, ac ℞ (3 6 + 9), atque adeo eius valor erit 9, aggregatum ex, 6, & 3, lateribus ipſorum 3 6, & 9; propterea ſi reſoluatur ℞ (3 6 Q + 1 2 R) in numeros abſolutos; perinde erit, ac ℞ (3 2 4 + 3 6) cuius pretium eſt 2 4, aggregatum, ex 1 8, & 6, lateribus ipſorum 3 2 4, & 3 6; Summa autem ex 9, & 2 4 eſt 3 3. tanta eſt igitur ſumma pretij illarum radicum vniuerſalium ℞ (4 Q + 3 R) & ℞ (3 6 Q + 1 2 R).

Hoc idem aſſequemur ducendo; 36, in 4, hoc eſt numeros quadratorum inter ſe, vt proueniat 144, cuius latus eſt 12; cuius duplum eſt 24, quo addito ad 40, aggregatum ex 36, & 4, numeris quadratorum, fit 64, quo ducto in 9, pretium quadrati, fit 576; cuius latus quadratum eſt 24; deinde ducantur 3, & 12, numeri radicum inter ſe, vt fiat 36, cuius latus eſt 6, huius autem duplum eſt 12; quo addito ad 15. ſummam ex 12, & 3, numeris radicum, prouenit 27, quo ducto in 3, pretium radicis, fit 81. cuius latus quadratum eſt 9; quo addito ad 24, ſupra habitum fit 33. vt patet, &c. Demonſtratio facilis eſt: de qua infra.

S C H O L I O N.

HÆc igitur de notarum additione +, & — tractantes, protulimus.

Idem eſt partes addere partibus, & aggregata ſimul colligere, idem eſt inquam, ac totum addere toti. Vndè colligendum duximus rite additionem inſtitui, addendo partes partibus. Et.

Si fuerint plures numeri, in quotlibet partes diuiſi, numerus factus ex aggregatione integrorum, æqualis eſt numero facto ex additione aggregatorum ex partibus. Quod ſi fuerit vnus indiuiſus, & diuiſus alter; ille qui fit ex indiuiſo, & toto diuiſo, æqualis eſt illi, qui fit ex additione indiuiſi, ad alterutram partium, plus altera parte. Et diſtinctius.

Si duo ſint numeri diuiſi.

Cum multitudo partium vnius, æqualis fuerit multitudini partium alterius, numerus qui fit ex additione ſingularum partium, ad ſingulas, æqualis eſt ei, qui emergit ex additione vnius è propoſitis numeris ad alium.

Quod ſi multitudo partium vnius, fuerit inæqualis multitudini partium alterius.

Numerus factus ex additione ſingularum partium ad ſingulas multitudine æquales, plus eo, quod ſupereſt, æquale eſt aggregato ex vtroque.

Si Demque fuerit indiuiſus vnus, & diuiſus alter.

Numerus factus ex indiuiſo, & toto diuiſo, æqualis eſt ei, qui fit ex additione indiuiſi, ad vnam ex partibus plus reliqua, vel reliquis partibus. Vnde deduximus additione + ad + fieri +. Deinde.

Aggregatum differentiarum addendarum, æquale eſt differentiæ ſummæ ex minoribus à ſumma ex maioribus. Seu quod idem eſt.

Si ſint duo numeri, à quibus duo ſubducti ſint, ipſi ſubducti, ſi in vnam ſummam colligantur, aggregatum verò ſubtrahatur ex aggregato maiorum, remanet differentiarum ſumma. Vndè deduximus ritè inſtitutam eſſe additionem — ad —, minores minoribus, & maiores maioribus addendo.

Præterea differentiæ numerorum ſi inuicem addantur, ſumma æqualis eſt aggregato maiorum, minus aggregato minorum. Seu quod idem eſt.

Si ſint duo numeri, à quibus duo alij ſubducti ſint, numerus factus ex additione differentiarum, æqualis eſt ei, qui prouenit, ex additione maiorum, minus aggregato minorum.

Vel numerus factus ex additione vnius ex maioribus, minus defectu alterius, ad maiorem, minus defectu prioris, aggregato differentiarum eſt æqualis. Seu quod idem eſt.

Numerus factus ex additione differentiæ, inter vnum ex maioribus, & defectum alterius, ad differentiam inter alterum è maioribus, & defectum prioris, aggregato differentiarum eſt æqualis. Vbi nomine defectus, quantitatem ſubtractam intelligo.

Vndè deduximus ex additione — ad — fieri —. Inſuper.

Si ſint duo numeri inæquales, quorum differentia, addi debeat numero vtcumque diuiſo, idem eſt minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium ipſius numeri diuiſi ſubtrahere, & maiorem alteri

parte

parti coniungere, & huic aggregato reliquum illum numerum addere, ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum. Seu quod idem eſt.

Si duo ſint numeri inæquales, quorum differentia addi debeat numero vtcumque diuiſo; perinde eſt minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium numeri diuiſi ſubtrahere, & maiorem alteri parti coniungere; aggregato verò reliquum numerum addere, ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum. Hinc deduximus; Si ſint +, & — addenda, debere ſubtractionem fieri &c. Poſtea.

Si fuerit numerus quiſpiam vtcumque diuiſus, & ei addatur numerorum duorum differentia, ſumma æqualis erit aggregato ex alterutra parte numeri diuiſi, & maiori ex duobus numeris differentibus, vna cum differentia inter alteram partem numeri diuiſi, & numerum minorem ex duobus differentibus. Seu quod idem eſt.

Si numerus aliquis, fuerit vtcumque diuiſus, ei autem addita ſit duorum numerorum differentia, ſumma quidem æqualis erit aggregato, ex alterutra parte numeri diuiſi, & maiore ex duobus numeris differentibus, vna cum differentia inter alteram partem numeri diuiſi, & numerum minorem ex duobus differentibus &c. Vnde concluſimus, ex additione prædicta fieri +, vel prout eſt affectus numerus maior, à quo ſit ſubtractio &c. de quibus vide ſcholion ad calcem capitis.

Et de poteſtatum additione loquentes, hæc enunciamus.

Idem eſt multiplicare numerum per numerum, & alterum numerum per eundem numerum, in quem ille ducebatur, & productos numeros in vnam ſummam colligere, idem eſt inquam ac numeros illos diuerſos colligere ſimul, ſummamque ducere in eundem numerum, per quem fiebat communis multiplicatio, ſummæ enim ſunt inuicem æquales. Seu quod idem eſt.

Si numerus in numerum ducatur, alter verò numerus per eundem pariter multiplicetur; productorum aggregatum, æquale eſt aggregato, quod prouenit ex additione ipſorum numerorum ducto in numerum illum, per quem communis multiplicatio facta fuit &c.

De his tamen in Specioſa Geometricè loquemur.

Numerorum Denominatorum Subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

VEL facienda eſt ſubtractio numeri denominati ab alio numero eiuſdem, appellationis, vel diuerſæ. Rurſus, aut numeri ſunt ſolitarij, & ſimplices, vt 10 R, 6 Q &c. vel compoſiti, per quos intelligo tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & mixtos. Et quicunq; ſint, aut numerantur numeris abſolutis, aut irrationalibus. *Subtractionis præcepta.*

Si fuerint appellationis eiuſdem, ſubtrahatur numerus à numero, & reliquo, idem tribuatur character; vt à 10 R ſubtrahendæ ſint 4 R, remanebunt 6 R, à 12 Q, ſubtrahi debent 4 Q, remanebunt 8 Q, &c. *Quando ſunt appellationis eiuſdem.*

Demonſtratio facilis eſt. Cum enim ſubtractio numerorum ſit interualli, differentiæq; duorum numerorum acceptio; alio modo certè fieri non poteſt, quàm vnum ab alio auferendo. *Demōſtratio*

Differentia duorum numerorum ſiquidem, æqualis eſt maiori, ablato minori, ſiuè minùs ipſo minori. *Propoſitio.*

Si verò ſint appellationis diuerſæ, abſoluetur ſubtractio beneficio ſigni —. Itaq; ſi abs 12 Q, ſubtrahere debeamus 4 R, fiet reſiduum 12 Q — 4 R; Si abs 15 C, ſubtrahenda ſint 9 Q, remanebunt 15 C — 9 Q.

Demonſtratio liquet. Etenim, quæ ſunt heterogenea ſubtrahi non poſſunt, niſi per ſignum —, conſtat autem hæc eſſe diuerſæ naturæ; proinde neceſſe eſt, vt ita ſubtrahantur. *Quando ſunt appellationis diuerſæ.*

Quòd ſi numeri fuerint Compoſiti, Diminuti, & Mixti, habenda eſt præ oculis ratio ſignorum +, & —. *Demōſtratio.*

Signorum +, & — Subtractio.

+ à + Subtrahitur, & remanet +, ſuperiori termino exiſtente maiori, alioquin remanet —.

— à — Subtrahitur, & remanet — ſuperiori termino exiſtente maiori; alioquin remanet +.

+ à — Additur, & remanet —.

— à + Additur, & remanet +.

Quapropter

Digitized by Google

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Quapropter ſi à 12 Q† 8 R, ſubducere debeamus 8 Q† 4 R, remanebunt 4 Q† 4 R. Item ſi à 12 Q — 4 R, ſubducere debeamus 4 Q — 3 R, remanebunt 8 Q — 1 R.

Quando in ſubtractione alter numerorum habet ſignum †, alter verò —.

At verò ſi in ſubtractione numerorum vnus habuerit ſignum †, alter verò —, fiat iuxta præcepta ſignorum †, & — ſuperiùs tradita; Itaq; hoc totum exemplis declarare iuuabit,

16 Q + 4 R	24 Q + 4 R
7 Q — 3 R	15 Q — 6 R
9 Q + 7 R	9 Q + 10 R
12 Q — 6 R	14 Q — 2 R
4 Q + 3 R	6 Q + 4 R
8 Q — 9 R	8 Q — 6 R

Et eodem pacto procedendum eſt in Plurinomijs.

16 QC + 6 QQ — 4 Q	14 QQ + 12 C — 7 Q
4 QC + 4 QQ + 2 Q	5 QQ — 4 C + 2 Q
12 QC + 2 QQ — 6 Q	9 QQ + 16 C — 9 Q

In ſubtractione commutatur ſpecies operationis.

Itaq; in ſubtractione commutatur ſpecies operationis, nimirum fit additio, ſummæq; tribuitur ſignum numeri ſuperioris, à quo fieri debet ſubtractio.

Demonſtratio.

Hæc omnia facili negotio demonſtrantur. Rectè operationem inſtitui, cum eiſdem ſignis † afficiuntur numeri, ſubtrahendo partes à partibus, ideò patet; quia, *Si duo numeri vtcunq; fuerint diuiſi, differentia totorum numerorum, æqualis eſt partium vnius numeri, à partibus alterius, ſimul ſumptis differentijs. Seu idem eſt totum à toto ſubducere, ac eſt partes à partibus, & differentias in vnum colligere.*

Exemplo declaratur ſuperior doctrina.

Exempli gratia; Sint duo numeri diuiſi 78, & 55, ille quidem in duas partes 60, & 18, hic autem in 40, & 15, ſit diuiſus. Si ſubtrahamus 15, è 18, remanent 3. Si ex 60, ſubducantur 40, remanent 20, horum ſumma eſt 23, tanta eſt autem differentia inter 78, & 55, vt patet.

60 + 18	
40 + 15	
20 + 3	
	78
	55
	23

Retinendum eſſe idem ſignum † vel —.

Retinendum autem eſſe idem ſignum +, ſiue —, prout numeri afficiuntur, ex eo conſtat; quòd

Propoſitio.

Si fuerint duo numeri vtcunque diuiſi; atq; adeo intercedat ſignum +; differentia totorum æqualis eſt differentiarum partium, vnius numeri à partibus alterius, aggregato, vt patet ex dictis. Seu differentia totorum, æqualis eſt aggregato differentiarum, quibus partes vnius differunt à partibus alterius.

Retinendum ſignum —.

Rurſus Si duæ ſint differentiæ, vna quidem duorum numerorum, alia verò duorum aliorum; idem eſt duos numeros differentes, à duobus numeris differentibus, ſingillatim ſubducere, & differentiam minorum emergentem, à maiorum differentia ſubtrahere; eſt idem inquam, ac eſt differentiam duorum, ab aliorum duorum differentia detrahere.

Vt ſi ſint 60 — 10, & 40 — 4, ſubtractis 4, ex 10, remanent, 6 item ſubductis 40, ex 60, remanent 20, reſiduum erit 20 — 6, nempe 14, quantum plane reſiduum fit, ſubtractis 36, ex 50,

60 — 10	50
40 — 4	36
20 — 6	14

Quando terminus ſuperior afficitur ſigno —, eſtq; minor inferiori affecto ſigno —.

Quòd ſi terminus ſuperior affectus ſigno —, minor ſit inferiori itidem affecto ſigno —, remanere ſignum +, inde conſtat; quia

60 — 4	56
40 — 10	30
20 + 6	26

Si ſint duo numeri differentes, & alÿ duo itidem differentes, ita tamen, vt terminus minor inferior, maior ſit termino minori ſuperiori; differentia, qua differunt differentia numerorum, aqualis eſt differentia maiorum numerorum, plus differentia minorum. *itidem —, remanere ſignũ †, oſtenditur.*

Vt ſi ſint 60 — 4, & 40 — 10, adeo vt ex 60 — 4, ſubtrahere debeamus 40 — 10, ſi ex 10, ſubducamus 4, reſiduum 6, addamus ad 20, differentiam inter 60, & 40, fit reſiduum quæſitum 20 + 6, nempè 26, quantum remanet ſubtractis 30, ex 56.

Dum enim ſubtrahimus 40, ex 60, plus ſubducimus quàm oporteat; & numerum ſupponimus maiorem, à quo debeat fieri ſubtractio; ille quidem ſubtrahendus minui debet numero 10, hic verò numero 4. Hoc autem idem eſt; ac loco ſubtrahendi 4, ex 60, ſubducere 4, ex 10, itaut non amplius numerus 40, minuatur numero 10, ſed potius 6, vt ex 60, ſubtrahantur 34, remaneantq; 26, quod eſt reſiduum illud 6, addere ad 20, differentiam inter 60, & 40. *Declaratur magis ſuperior doctrina.*

Retinendum autem eſſe intercedens ſignum —, eum terminus ſuperior maior extiterit, liquet ex eo quia. *Retinendum eſſe intercedẽs ſignum —.*

Si ſint duo numeri differentes, & itidem alÿ duo differentes; differentia iſtarum differentiarũ aqualis eſt differentia maiorum numerorum è differentibus, minus differentia minorum. *Propoſitio.*

Quòd ad ſigna +, & — attinet; nempè quando ſubtrahitur differentia duorum numerorum à numero diuiſo, vel è contra, retinendum eſſe ſignum ſuperioris termini, &c. facilitate eadem oſtenditur; etenim *Propoſitio.*

Si fuerit numerus vtcunq; diuiſus, & duo numeri differentes, quorum differentia ſubtrahi debet à numero illo diuiſo; interuallum inter illorum duorum numerorum differentiam, & numerũ diuiſum, aquale eſt differentia numeri maioris è duobus differentibus, ab vna parte numeri diuiſi, plus aggregato ex altera parte, & altero è duobus numeris differentibus, nempe minori &c.

Non diſſimili modo procedendum erit, quando ab aliqua numerorum differentia ſubtrahi debet, numerus vtcunq; diuiſus in duas partes. Exemplum eſto. Sint duo numeri 60 + 10, & 40 — 7, adeo vt 40 — 7, ſubducere debeamus ex 60 + 10, remanebit 20 + 17, ſi nimirum addamus 7, ad 10, vt fiat 17, & ſi 40, ſubtrahamus ex 60, vt remaneat 20, fiatq; reſiduum 37, quantum fit, ſi 33, numerus æquipollens reſiduo illi 40 — 7, ſubtrahamus ex 70, numero, qui æquipollet 60 + 10, quod poteſt ex dictis facilè intelligi. Dum enim ſubducimus 40, ex 60, ſubtrahimus, plus quam oportet; neceſſe eſt igitur id, quod ſupererat, reſtituere illi, vnde facta eſt ſubtractio; quod vtiq; præſtamus addendo id alteri parti numeri diuiſi, &c. *Exẽplum ad ſuperius allata explicãda.* *Vide in ſchol. ad calcem. cap. 3.*

60 + 10	10 + 60
40 — 7	40 — 7
† 20 + 17	† 67 — 30
25 + 10	46 + 2
30 — 12	40 — 4
† 22 — 5	† 6 + 6

Quantum autem ad Poteſtates ex eo liquidò conſtat, quòd.

Si duo numeri in eundem numerum ducantur, & productum vnum minorem ſcilicet à maiori ſubtrahamus; reſiduum aquale eſt numero, qui fit, ſi ſubtracto minori, ex maiori duorum illorum, qui fuerant multiplicati; & qui relinquitur, in illum eundem numerum tertium ducatur. *Quoad poteſtates.*

Sint numeri A, B, qui multiplicati per C, produeant D, & E, quorum differentia ſit F; Dico numerum F, æqualem eſſe I, numero, qui fit ex H, differentia inter A, & B, in C; etenim cùm C, multiplicans A, & B, producat D, & E, erit[a] proportio D, ad E, quæ A, ad B, ergo[b], vt B, ad A, ita E, ad D, & diuidendo[c], vt B, minus A, ad A, ita E, minus D, ad D. Hoc eſt, vt H, ad A, ita F, ad D, ſeu, vt F, ad D, ita H, ad A; ergo permutando[d], vt F, ad H, ita D, ad A; ſed D, ad A, habet[e] rationem, vt C, ad G vnitatem, nam C, multiplicando A, produxit D; ergo F, ad H, habebit[f] rationem, vt C, ad vnitatem G; ſed vt C, ad vnitatem, ita[g] I, ad H, nam C, *Demõſtratio.*

H 20
5
I 100
A 30 B 50
C 5 G Vnitas
D 150 E 250
F 100

a 17. ſeptimi.
b Schol. ad 22. ſeptimi.
c Schol. ad 22. ſeptimi.
d 13. ſeptimi.
e ex definitione, multiplicationis.
f Lemma ad 24. ſeptimi.
g Ex definitione multiplicationis.

multiplicando H, produxit I; ergo erit I, ad H, vt F, ad H; quamobrem I, & F, erunt inter ſe æquales; Quod erat oſtendendum. Conſtat autem Poteſtates eſſe numeros, in quos duci intelliguntur ij, per quos numerantur.

Subtractionis examen bifariam inſtitui poteſt, primò per additionem, ſecundò per reſolutionem in numeros abſolutos.

Subtractionis examen duobus modis inſtitui poteſt; primò etenim comprobari poteſt ſubtractio per additionem, vt fit in numeris abſolutis.

Declaratio per exempla.

Secundò comprobatur commutando numeros denominatos in numeros abſolutos; etenim facta hac reſolutione; ſi numeri ſubtracti, & reliqui, vnà ſimul collecti, fuerint æquales numeris, à quibus facta eſt ſubtractio, ſignum eſt nullum commiſſum eſſe errorem in operando. Exemplum. Subtrahamus 4Q✠6R, ex 18 Q✠10R, remanebunt 14Q✠4R, idq; num verum ſit dignoſcemus. Primò per additionem addendo nempè 4Q✠6R, ad 14Q✠4R; namque ſi fuerit ſumma æqualis ſuperiori numero, à quo facta eſt ſubtractio, rectè operatio inſtituta erit.

Secundum subtractionis examen.

Secundò reſoluantur 18Q†10R, in numeros abſolutos, ſuppoſito 1R, pretio 2; erit 72†20, idem quod 18Q†10R. Deinde reſoluantur 4Q†6R, & erunt 16†12, facta ſubtractione remanent 56†8, ſeù 64, modo reſoluamus 14Q†4R, & fiunt 56†8, ſeù 64. Dicendum ergo optimè operatum fuiſſe Analyſtam aſſerentem relinqui 14Q†4R ſubtractis 4Q†6R ex 18Q†10R.

18 Q † 10 R
4 Q † 6 R
14 Q † 4 R
4 Q † 6 R
18 Q † 10 R

Numeri denominati, dū numerantur per numeros irrationales.

Reliquum eſt, vt agamus de numeris denominatis irrationalibus, ſeù de poteſtatibus numeratis per numeros irrationales, tàm ſimplices, quàm compoſitos. Sed facilè cognoſcitur methodus obſeruanda ex ijs, quæ traduntur de huiuſmodi numeris citrà poteſtatum characteres. Quamobrem ſi radices fuerint ſimplices, fuerintq; eiuſdem appellationis, & extiterint commenſurabiles, fiat ſubtractio iuxtà numeros irrationales ſimplices. Itaq; ſi ex ℞ 20 R, ſubtrahere debemus ℞ 5 R, remanebit ℞ 5 R, ſi ex ℞ 50 Q, ſubtrahi debet ℞ 2 Q, remanebit ℞ 32 Q, & ſic de reliquis. &c.

Quando fuerint incommenſurabiles.

Cùm fuerint incommenſurabiles; fit ſubtractio per ſignum — Vt ex ℞ 30 R, ſi ſubtrahimus ℞ 20 R, remanebit ℞ 30 R — ℞ 20 R, eodem pacto ſi fuerint numeri denominati diuerſæ appellationis, vel abſoluti. Quòd ſi radices fuerint Cubicæ, Quadrato-quadraticæ, &c. obſeruentur earum præcepta de numeris ſurdis. Et hinc patet quid agendum in numeris irrationalibus compoſitis; ſic etiam de radicibus vniuerſalibus &c. De his autem ſuprà de additione tractantes locuti ſumus; ſiue ſint vniuerſales ſimplices, ſiuè compoſitæ; obſeruandum enim vtrum ſint commenſurabiles; quemadmodum de additione dicebamus, & expedietur ſubtractio iuxtà leges numerorum irrationalium in generali.

Exempla ad ſuperiora præcepta declarāda.

Itaq; ſi ex ℞ (10Q) ſubtrahantur 5R, fiet reſiduum ℞ (30Q) — 5R\cùm enim prorſus ſint incommenſurabiles non poſſunt ſubtrahi, niſi per ſignum— Rurſus ex ℞ (12C) ſubducamus ℞ (8Q) fiet reſiduum ℞ (12C — 8Q) & ex ℞ (8C), ſi ſubtrahatur ℞ (2R) remanet ℞ (8C—2R) ex ℞ (12C), ſi ſubtrahatur ℞ (5C) remanet ℞ (12C—5C), & ſic de reliquis radicibus vniuerſalibus ſimplicibus incommenſurabilibus.

Quando fuerint commenſurabiles.

Si fuerint commenſurabiles, vt à ℞ (12C) ſi ſubtrahere debeamus ℞ (3C) emerget pro reſiduo ℞ (3C) rurſus à ℞ (27C) ſi ſubtrahamus ℞ (12C) remanebit ℞ (3C) communis diuiſor eſt 3, qui 27, metitur per 9, & 12, metitur per 4, horum autem radices quadratæ ſunt 3, & 2, ſubductis autem 2, ex 3, remanet 1, cuius quadratum eſt 1, quod ſi ducatur in 3, communem diuiſorem, producit numerum 3, & ita de reliquis radicibus, iuxtà earum naturam intelligendum eſt; Numeris autem abſolutis hæc facilè declarari poſſunt.

Placet autem hoc ſubtractionis, præceptum, cùm quadratę radices fuerint; Geometricè demonſtrare, in huius igitur gratiam, ſit.

LEMMA

Digitized by Google

LEMMA I.

SIT recta A B, vt cumque ſecta in C. Dico quadratum ſegmenti C B, eſſe exceſſum, quo quadratorum A B, A C, aggregatum, excedit rectangulum duplum B A C.

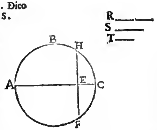
QVoniam recta A B, ſecta eſt vtcumque in C, erit ex 7. 2. Elem: aggregatum quadratorum A B, A C, æquale duplo rectangulo B A C, plus quadrato C B; Quamobrem quadratum C B, erit exceſſus, quo quadratorum A B, A C, aggregatum, ſuperat duplum rectangulum B A C; Quod erat nobis propoſitum demonſtrare.



LEMMA II.

SI tres quantitates fuerint proportionales; aggregatum extremarum, maius eſt dupla media.

SINT continuè proportionales quantitates R, S, T. Dico aggregatum extremarũ R, & T, maius eſſe dupla S. Diſponantur ipſæ R, & T, in directum, cuiuſmodi ſunt A E, E C, ita vt A E, ſit æqualis R, & E C, ſit æqualis T ex E, excitetur[a] perpendic. E H, æqualis S, & diametro A C, deſcriptus ſit circulus A B C, cuius peripheria neceſſariò tranſibit per H, ſiquidem A, H, C, puncta ad circulum pertinent[b]. Protrahatur H E, vſque ad F. Quoniam igitur A C, per centrum tranſiens ſecat H F, ad rectos angulos in E, eam in puncto E, biſariam ſecabit[c], ac proinde H F, dupla erit ipſius H E, ſed A C, maior eſt,[d] quàm H F, eſt autem A C, aggregatum extremarum A E, E C; & H F, dupla mediæ H E, ergo aggregatum extremarum maius eſt dupla media. Quod erat iniunctũ oſtendere.



a 11. *primi Elementorũ.*
b *ex Lemmate 2. Pappi in primũ Appollonij, & ex ijs, quæ nos ibi ſcripſimus.*
c 3. *Tertij Element.*
d 15. *Tertij Element.*

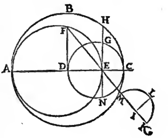
THEOREMA.

SINT A E, D E numeri, dignitate affecti; ſit autem E C, dignitatis pretium, nimirum pretium radicis; ducatur A E, in E C, & proueniet quadratum E H; ducatur D E, in E C, & proueniet quadratum E N; ita vt laterum E N, hoc eſt E G, & E H, differentia ſit G H. Ducatur autem E A, in D E, ſcilicet numerus in numerum, & proueniet F E, quadratum; duplicetur F E, in I, & fiat F K, æqualis aggregato ex A E, & D E; Neceſſariò autem F K, maior erit quàm F I, ex eo quod ſecundo loco, præmiſſum eſt Lemm: ſecetur verò M I, æqualis E C; & ſuper M K, deſcribatur ſemicirculus M L K, ex I, verò excitetur perpendicularis I L.

Oſtendendum eſt I L, æqualem eſſe ipſi G H.

QVandoquidem F K, æqualis eſt aggregato ex A E, D E; eſtque M I, æqualis E C; proinde rectangulum ſub F K, & M I, æquale erit[a] rectangulo A E C, plus rectangulo D E C. Rurſus quoniam F I, æqualis eſt duplæ F E; propterea rectangulum ſub F I, & M I, ſeu E C, æquale erit[b] duplo rectan-

a 1. *ſexti.*
b 1. *Sexti.*



gulo ſub F E, & E C; Sed rectangulum ſub F K, & M I, excedit [c] rectangulum ſub F I, & M I, rectangulo, quod continetur ſub I K, & M I; Cum rectangulum ſub F K, & M I, atque rectangulum ſub F I, & M I, ſint eiuſdem altitudinis M I; ob id rectangulum A E C, plus rectangulo D E C, hoc eſt [d] quadratum E H, plus quadrato E N, ſeu G E, ſuperabit duplum rectangulum ſub F E, & E C, hoc eſt duplum rectangulum H E N, ſeu H E G, (eſt enim rectangulũ ſub F E, & E C, æquale rectangulo H E N, ſeu H E G, cum in Lemmate ſecundo ad Theor: de Additione demonſtratum fuerit, ita eſſe F E, ad E H, vt N E, ſeu E G, ad E C, vnde perinde eſt, dicere rectangulum H E G, ac F E C) exceſſu, qui eſt rectangulum ſub I K, & M I. At quadratum H E, plus quadrato G E, ſuperat [e] duplum rectangulum H E G, exceſſu, qui eſt quadratum H G, & huiuſmodi exceſſus oſtenſus eſt rectangulum M I K, ſeu quadratum I L, illi, æquale. Quo circa quadratum H G, æquale erit quadrato I L, atque adeo H G, æqualis erit I L. Hoc autem erat operæ pretium demonſtrare.

c 1. ſexti.
d corol. 8. ſexti, & 17. eiuſdem.
e Ex eo quod primo loco traditum eſt Lemmate.

L E M M A.

SINT duo numeri A, B, quorum latera R, S, [*] differentia verò ſit I. Diuiſis autem eiſdem A, B, per K, quotientes fiant L, M, quorum latera N, O, horum differentia ſit P, cuius quadratum Q, multiplicatum per K, efficiat T, cuius latus, ſit Y.

* horum

Oſtendendum eſt Y, æqualem eſſe I.

QVandoquidem K, multiplicans Q, fecit T, propterea erit, [a] vt K, ad vnum, ita T, ad Q; ſed vt K, ad vnum, ita [b] eſt A, ad L; ſiquidem K, diuidendo A, fecit L, ergo vt T, ad Q, ita A, ad L, ac proinde, & horum latera proportionalia erunt, nempe, vt Y, ad P, ita R, ad N, ſed, vt R, ad N, ita [c] eſt I, ad P, propterea vt Y, ad P, ita I, ad P, quamobrem Y, & I, erunt inter ſe æquales; Quod autem ſit vt R, ad N, ita I, ad P, manifeſtum eſt, vt enim R, ad N, ita S, ad O, eſt autem I, differentia inter R, & S, item P, differentia inter N, & O, & eſt, [d] vt totus ad totum, ſic ablatus ad ablatum; propterea reliquus ad reliquum, erit vt totus ad totum; atq; adeo vt R, ad N, ita erit I, ad P. Hoc autem nobis erat iniunctum, in gratiam eorum, quæ ſequuntur, oſtendere.

a Ex definitione multiplicationis; vt ſuperius.
b Ex definitione diuiſionis.
c Lemma 14. ſeptimi.
d 11. ſeptimi.

A 576		B 36
R 24	I 18	S 6
A 576		B 36
	K 4	
L 144		M 9
N 12		O 3
	P 9	
	9	
	Q 81	
	K 4	
	T 324	
	Y 18	

Generalis tamen demonſtratio, in quocumque radicum genere, ſic ſe habet, vt infra

Sint

Sint duo numeri A, B, qui multiplicati per C, producant E, G, quorum latera ſint F, H, & horum differentia ſit I.

Iidem autem A, B, numeri, diuidantur per K; & proueniant L, M, quorum latera ſint N, O, horum autem differentia ſit P, quæ in ſe ducta iuxta radicis, de qua loquimur naturam, efficiat Q, quo ducto in K, proueniat T, qui multiplicatus per C, producat X, cuius latus ſit Y.

Oſtendendum eſt Y, æqualem eſſe I.

A 100		B 16
R 10	D 6	S 4
E 900	C 9	G 144
F 30	I 18	H 12

A 100		B 16
L 25	K 4	M 4
N 5		O 2
	P 3	
	Q 9	
	K 4	

T 36
C 9

X 324
Y 18

Quoniam C, multiplicando A, fecit E, ergo erit [a] vt C, ad vnum ita E, ad A, ſed E, ad A, duplicatam habet [b] rationem eius quam haber F, ad R; ergo C, ad vnum duplicatam habebit [c] rationem eius, quam habet F ad R; at verò cùm I, ſit differentia inter F, & H, & D, inter R, & S, erit [c] vt F, ad R, ita I, ad D, ergo C, ad vnum duplicatam habebit [e] rationem eius, quam habet I, ad D. Quoniam verò C, multiplicando T, producit X, erit [f] vt C, ad vnum, ita X, ad T, ſed C, ad vnum duplicatam habebat rationem eius, quam haber I, ad D, ergo X, ad T, duplicatam etiam habebit [g] rationem eius, quam habet I, ad D. Sed X, ad T, duplicatam etiam habet [h] rationem eius, quæ eſt Y, ad latus ipſius T, ergo Y, ad latus ipſius T; [i] erit vt I, ad D, ſed latus ipſius T, æquale eſt D, vt conſtat ex eo, quod præmiſimus Lemmate, ergo Y, æqualis erit I; Quod erar operę pretium demonſtrare.

a *Ex deſ. itione multiplicationis.*
b 11. *Octaui.*
d *Lemma ad propoſ.* 14. *ſeptimi.*
d 11. *ſeptimi.*
e *Lemma ad propoſ.* 14. *ſeptimi.*
f *Ex definitione multiplicationis.*
g *Lemma ad propoſ.* 14. *ſeptimi.*
h 11. *Octaui.*
i *Lemma ad propoſ.* 14. *ſeptimi.*

Si ſint compoſitæ vniuerſales, vel ſunt commenſurabiles, vel non; Si non ſunt commenſurabiles fiat detractio per idem ſignum —, vt ex ℞ (15 C † 6 Q) ſubtrahere debeamus ℞ (12 Q † 4 R) pro reſiduo emerger ℞ (15 C † 6 Q) — ℞ (12 Q † 4 R) Item ex ℞ (40 C † 12 R) ſubducere debeamus ℞ (10 Q C † 6 R) & remanebit ℞ (40 C † 12 R) — ℞ (10 Q C † 6 R), & ita de cæteris.

Quando ſunt compoſitæ vniuerſales.

Quod ſi fuerint commenſurabiles, fiat ſubtractio iuxta leges horum ſurdorum numerorum &c. ex ℞ (384 C † 72 R) detrahatur ℞ (150 C ✠ 200 R) & remanebit ℞ (54 C — 32 R) communis diuiſor numerorum, qui charactere C, afficiuntur eſt 6, qui numeros 384, & 150, metitur per 64, & 25; quorum Radices quadratæ ſunt 8, & 5: at ex 8, ſubductis 5, remanet 3, cuius quadratum eſt 9, quod ductum in 6, communem diuiſorem, producit 54 C: at verò numerorum, qui charactere R, afficiuntur, eſt 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 200, metitur per 25; at radix quadrata numeri 9, eſt 3, & numeri 25, eſt 5, à quibus ſubtractis 3, remanet numerus 2, cuius quadratum eſt 4, quod ductum in 8, producit 32, ſi verò ex ✠ ſubtrahatur —, remanet ✠, maiori exiſtent ſuperiori numero. Sin autem remanet —, proinde remanebit ℞ (54 C — 32 R). Item ex ℞ C (1512 Q — 320 R) ſubtrahatur ℞ C (875 Q — 40 R) remanebit ℞ C [7 Q — 40 R]. Nnmerorum enim charactere Q, affectorum communis diuiſor eſt 7, qui 1512, metitur per 216, & 875, metitur per 125; at verò ℞ C, numeri 216, eſt 6, & numeri 125, eſt 5, ex 6, ſubductis 5, remanet 1, cuius cubus eſt 1, ductus autem in 7, communem diuiſorem producit 7, & fit 7 Q; Numerorum autem R, affectorum communis diuiſor eſt 5, qui 320, metitur per 64, & 40, metitur per 8; at verò numeri 64; eſt ℞ C, numerus 4, & numeri 8, eſt 2; hac ſubducta ex 4, remanet 2, huius cubus

Quando numeri fuerint commenſurabiles, qua Arte ſit inſtituenda ſubtractio.

eſt

Digitized by Google

eſt 8, ductus autem in 5, communem diuiſorem facit 40, & ita fiet 40, R, at ſi ex — ſubducatur —, remanet —, ſuperiori termino exiſtente maiori, remanet ergo — 40 R. Item ℞ (48 C + 8 Q) ſubtrahere debeamus ex ℞ (75 C + 32 Q) remanebit ℞ (3 C + 4 Q). Inſuper ex ℞ C (192 Q + 432 R) detrahenda ſit ℞ C (81 Q + 250 R) reſiduum erit ℞ C (3 Q + 2 R).

SCHOLION.

HÆC itaq; de Notarum +, & — ſubtractione agentes, enunciauimus Differentia duorum numerorum, æqualis eſt maiori, ablato minore ſeu minus minore. Vnde deduximus ſubtractionem fieri debere, vnum, ab alio auferendo. Deinde.

Si duo numeri vtcunq; fuerint diuiſi, differentia totorum numerorum, æqualis eſt partium vnius numeri, à partibus alterius, ſimul ſumptis differentijs. Seu idem eſt, totum à toto ſubducere, ac eſt partes, à partibus, & differentias in vnum colligere. Vnde collegimus rectè operationem inſtitui, cum ijſdem ſignis + afficiantur numeri, ſubtrahendo partes à partibus:

Si fuerint duo numeri, vtcunq, diuiſi; atq; adeo intercedat ſignum +: differentia totorum, æqualis eſt differentiarum partium vnius numeri, à partibus alterius, aggregato. Seu differentia totorum, æqualis eſt aggregato differentiarum, quibus partes vnius, differunt à partibus alterius. Ex quo intulimus retinendum eſſe idem ſignum +.

Si duæ ſint differentiæ, vna quidem duorum numerorum, alia verò duorum aliorum: idem eſt duos numeros differentes, à duobus numeris differentibus, ſingillatim ſubducere, & differentiam minorum emergentem, à maiorum differentia, ſubtrahere, eſt idem inquam, ac differentiam duorum, ab aliorum duorum differentia detrahere. Hinc inferebamus retinendum eſſe ſignum — &c.

Si ſint duo numeri differentes, & alij duo itidem differentes ita tamen, vt terminus minor inferior, maior ſit termino minore ſuperiore, differentia, qua differunt differentiæ numerorum, æqualis eſt differentiæ maiorum numerorum, plus differentia minorum. Ex quo deduximus, remanere ſignum + cum terminus ſuperior affectus ſigno — minor fuerit inferiore itidem affecto, ſigno —.

Si ſint duo numeri differentes, & itidem alij duo differentes; differentia iſtarum differentiarum, æqualis eſt differentiæ maiorum numerorum è differentibus, minus differentia minorum. Vnde deprehendebamus retinendum eſſe intercedens ſignum — cum terminus ſuperior maior extiterit.

Si fuerit numerus vtcunque diuiſus, & duo numeri differentes, quorum differentia ſubtrahi debet à numero illo diuiſo. interuallum inter illorum duorum numerorum differentiã, & numerum diuiſum, æquale eſt differentiæ numeri maioris è duobus differentibus, ab vna parte numeri diuiſi, plus aggregato ex alterius parte & altero è duobus numeris differentibus, nempe minore &c. Ex quo inferrendum duximus, retinendum eſſe ſignum ſuperioris termini, cum ſubtrahitur differentia duorum numerorum à numero diuiſo.

At verò de Poteſtatibus differentes, hæc in medium attulimus; Si duo numeri, in eundem numerum ducantur, & productum vnum, minorem ſcilicet à maiori ſubtrahamus, reſiduum æquale eſt numero, qui fit ſi ſubtracto minori, ex maiore duorum illorum, qui fuerunt multiplicati, & qui relinquatur, in illum eundem numerum tertium ducatur.

Numerorum Denominatorum Multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

Eadem numerorum diſtinctio in multiplicatione, quæ in cæteris operationibus.

EOdem pacto diſtinguendum eſt hìc de numeris in multiplicatione, vt ſuperiùs in Additione, & Subtractione dictum fuit. Ob id huiuſmodi diuiſiones non repetemus.

Multiplicatio numeri denominati per numerum abſolutum.

Si multiplicari debet numerus denominatus, per numerum abſolutum, fiat multiplicatio, vt in numeris abſolutis, productoq; idem character apponatur; prouenit enim numerus eiuſdem appellationis, Vt ſi 10 R, multiplicari debeant per 4, fiunt 40 R.

Multiplicatio numeri denominati per numerum denominatum.

Cùm autem numerus denominatus, per numerum denominatum multiplicatur, fiat multiplicatio, vt in numeris abſolutis; producto verò tribuatur character, qui debetur ſummæ exponentium characterum numerorum, qui multiplicantur.

Vt multiplicare debeamus 6 R, per 6 R, fit productum 36 Q, quoniam 1, exponens characteris R, ſi addatur ad 1, exponentem item ipſius R, facit 2, exponentem, cui debetur Q. Inſuper multiplicemus 6 Q, per 5 R, fit productum 30 C, quoniam exponentes multiplicatorum ſunt 2, & 1, ex quibus coaleſcit 3, cui debetur C: & ſic de reliquis.

Demonſtratio quoad numeros.

Demonſtratio quoad numeros patet. Cùm enim tunc numerus numerum multiplicare dicatur, cum toties compoſitus fuerit is, qui muliplicatur, quot ſunt in ipſo

multi-

multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis; Vnde multiplicatio numeri in numerum, eſt inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium, eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium, ad vnitatem. Hoc aliter autem fieri non poteſt, quàm ducendo vnum in alterum, ſic.n. indagatur numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eam habet rationem, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

Demonſtratio quoad characteres.

Quantum ad characteres; rectè nimirum inſtitui operationem additione exponentium, multiplicando partes, oſtenditur ex eo, quia.

Propoſitia.

Si fuerint quatuor numeri, & qui fit ex primo in ſecundum ducatur in factum, ex tertio in quartum [nihil refert num ſint proportionales, an non] hoc eſt producti ex primo in ſecundum, & ex tertio in quartum multiplicentur adinuicem [per primum, & tertium intellige numeros per quos poteſtates numerantur; per ſecundum, & quartum vero poteſtates ipſas] is, qui emergit æqualis eſt illi, qui fit ſi multiplicetur primus in tertium, & ſecundus in quartum, & producti multiplicentur inter ſe.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Hæc autem exemplis, facilè poſſunt illuſtrari, & ratiocinio demonſtrari. Etenim ſi ſint quatuor numeri 2, 4, 8, 16, & qui fit ex 2, in 4, ſcilicet 8, ducatur in 128, factum ex 8, in 16, fiet enim 1024; Idem autem numerus prouenit, ſi multiplicetur 2 per 8, & numerus productus 16, ducatur in 64, factum ex 4, in 16, nàm fiet 1024. Idem intellige, ſi forent quatuor numeri 3, 7, 4, 9. qui non ſunt proportionales.

3,	7,	4,	9.
36		63	
21		12	
36		126	
72		63	
756		756	

Demonſtratio ſupradictorũ.

Demonſtratur autem hoc modo. Sint numeri A, B, C, D; & numerus A, multiplicans B, producat E, multiplicans C, producat F; at numerus D, multiplicas C, producat G, multiplicans B, producat H, erit [a], vt C, ad B, ita F, ad E, & quia D, multiplicans C, & B, producit G, & H, erit [b], vt C, ad B, ita G, ad H, ſed vt C, ad B, ita F, ad E, ergo, vt F, ad E, ita erit G, ad H, quamobrem numerus factus ex F, in H, æqualis erit [d], facto ex E, in G, ſed numerus F, producitur ex A, in C, & numerus H, ex B, in D, & numerus E, ex A, in B, & numerus G, ex C, in D, ergo, &c. Quod oportebat oſtendere.

A	B	C	D
.3	7	4	9
F	E	G	H
12	21	36	63

a 17. *ſeptimi.*
b 17. *ſeptimi.*
d 19. *ſeptimi.*

SCHOLION.

Demonſtratur ſuperius dicta, per reductionẽ numerorum denominatorũ in numeros abſolutos.

SVpponamus 4 Q, ducenda eſſe in 3 R, ſit 1 R, pretium 5, ergo 1 Q, valebit 25, Inſtituta multiplicatione fiet productum 12 C. Modo primus numerus erit 3, ſecundus 5, tertius 4, & quartus 25, ſi reſoluamus 3 R, in numeros abſolutos, vtiq; trium radicum valor erit 15; & reſolutis 4 Q, in numeros abſolutos valor eorum erit 100; Itaq; ducere 4 Q, in 3 R, erit muliplicare 100, per 15, quorum productum eſt 1500, hoc eſt 15, numerus productus ex 3, primo in 5, ſecundum ſi ducatur in 100, numerum productum ex 4, tertio in 25, quartum producit 1500, quantum producit 12, numerus productus ex 3, in 4, primo in tertium, qui ſunt numeri poteſtatum in 125, numerum factum ex 5, ſecundo in 25, quartum, videlicet, in cubum ex 5; cùm 5, ſit radix quadrata numeri 25; vnde non mirum, ſi productum ex 4 Q, in 3 R, ſit 12 C; & ita de reliquis poteſtatibus intelligendum eſt.

3, 5, 4, 25;

Demonſtratio multiplicationis poteſtatũ.

Rectè verò fieri multiplicationem poteſtatum additione exponentium, &c. deducitur ex Elementis; oſtenditur enim ibi.

Propoſitio.

Ad 11. propoſ. lib. 9. Euclidis.

Si numerus in Geometrica progreſſione incipiente ab vnitate ſe ipſum multiplicet, numerum producit progreſſionis eiuſdem; qui tantùm ab eo excluſiuè diſtat, quantùm is ab vnitate.

Hæc autem diſtantia cum habeatur additione exponentium, & eadem habebitur poteſtas quæſita. Quamobrem ſi 1 Q, ducatur in ſe, fit 1 QQ, quæ quidem po-

teſtas

Digitized by Google

téſtas habebitur additione exponentium; etenim ipſa comparatur quotum locum occupet QQ, ab Q, excluſiuè exponens enim eſt 4, qui deſignat ſecundum locum excluſiuè à 2, exponente Q, qui item ſecundum locum occupat ab Vnitate excluſiuè. Cum itaq; res ita ſe habeat, ſequitur additione exponentium, quando poteſtas in ſe ducitur, comparari numerum, à quo deſignatur poteſtas emergens ex multiplicatione ipſa.

Additione exponentium comparatur numerus à quo deſignatur poteſtas emergens ex multiplicatione, quando poteſtas in ſe ducitur, quãdo etiam in aliam.

Pariter eadem de cauſa, quando multiplicatur poteſtas aliqua in aliam poteſtatem; etenim habetur eodem loco Elementorum.

Propoſitio

Ad 11 propoſ. l. 9. Euclidis.

Si minor quiſpiam numerus Geometricæ progreſſionis ab vnitate incipientis, multiplicet quempiam maiorem progreſſionis eiuſdem, producitur numerus, qui tantum à maiori diſtat excluſiuè in progreſſione eadem, quantum minor excluſiuè diſtat ab vnitate.

Vt ſi multiplicetur C, per R, producetur QQ, ſiquidem exponens R, eſt 1, & exponens C eſt 3, qui ſimul additi faciunt 4, exponentem ipſius QQ, tantum autem diſtat numerus 4, excluſiuè à 3, exponente characteris C, quantum 1, exponens ipſius R, excluſiuè ab vnitate, quæ eſt progreſſionis Geometricæ initium. Cum itaq; additione exponentium procreetur numerus deſignans locum diſtantem, &c. etiam poteſtas quæſita deſignabitur.

Tabula conducens plurimum ad poteſtatum multiplicationem.

Facilitatis autem gratia hæc tabella conſtructa eſt, vt quiſque oculorum ictu poſſit omnia conſpicere, quantum nimirum ad poteſtatum multiplicationem.

Einſdem vſus.

Huius autem Tabellæ vſus hic eſt. Vel in fronte, vel à latere ſiniſtro, quære exponentem characteris, ducendi in characterem alterum, cuius exponentem inſpice in fronte, vel à latere prout priorem exponentem in alterutro loco inſpexeris; tunc quære in angulo communi, vbi offertur character poteſtatis productæ.

Exponentes		1	2	3	4	5	6	7
Exponentes		R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
1	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC
2	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC
3	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC
4	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
5	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC
6	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC
7	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC	QCCCC

Quando

Quando autem numeri fuerint compoſiti, per quos tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & miſtos intelligo; habenda eſt ratio ſignorum †, & —, in cuius gratiam eorum multiplicationem addiſce.

Quando numeri fuerint compoſiti.

Signorum ✣, & — Multiplicatio.

✣ in ✣; facit ✣; Hoc eſt Plus ductum in Plus facit Plus.
— in —; facit ✣. Hoc eſt Minus ductum in Minus facit Plus.
✣ in —: facit —. Hoc eſt Plus ductum in Minus facit Minus.
— in ✣; facit —. Hoc eſt Minus ductum in Plus facit Minus.

Explicantur præcepta. Exemplis enucleatur ſuperior doctrina.

Itaq; ſiue numerum compoſitum ducere debeamus in numerum ſimplicem abſolutum, ſiuè in ſimplicem denominatum, ſiuè in compoſitum; inſtitui debet multiplicatio ſecundum partes; & habenda eſt ratio poteſtatum, characterum, & ſignorum †, & —. Exemplis autem res fiet illuſtrior. Ducantur 10 Q † 6 R, in 5, fiet productum 50 Q † 30 R; Hoc ſi ducatur in 4 R, fiet productum 200 C † 120 Q. Multiplicemus 8 Q † 5 R, in 6 Q † 4 R, fiet productum 48 QQ † 62 C † 20 Q; vel ſecundum alios 48 QQ † 20 Q † 62 C.

```
        10 Q ✣ 6 R
               5
   ------------------
        50 Q ✣ 30 R
               4 R
   ------------------
    200 C ✣ 120 Q

         8 Q ✣  5 R
         6 Q ✣  4 R
   ------------------
        32 C ✣ 20 Q
 48 QQ ✣ 30 C
   ------------------
 48 QQ ✣ 62 C ✣ 20 Q

         8 Q ✣  5 R
         8 Q ✣  4 R
   ------------------
        32 C ✣ 20 Q
 64 QQ ✣ 40 C
   ------------------
 64 QQ ✣ 72 C ✣ 20 Q
```

Etenim aliquibus viſum eſt ea, quæ fiunt ex multiplicatione exſtremorum ex vtraq; parte coſtitui, ſcribiq; debere in ſumma, priusquàm ea, quæ emergunt ex multiplicatione per crucem, & quidem quando intercedit ſignum —, melius eſt ita ſcribere, ſed illo non intercedente, nihil refert.

Itaq; cum multiplicamus 8 Q — 4 R, in 5 Q — 2 R, & fit productum 40 QQ — 36 C † 8 Q; ſenſus eſt quod ab aggregato ex 40 QQ, & 8 Q, ſubtrahi debent 36 C. Proindè melius fortaſſis erit ſcribere 40 QQ † 8 Q — 36 C. Quod enim C, maior Poteſtas, quam Q, poſtponatur, nihil refert.

```
        12 Q ✣  5 R                     8 Q —  4 R
         6 Q —  2 R                     5 Q —  2 R
   ------------------              ------------------
      — 24 C — 10 Q                  — 16 C ✣  8 Q
 72 QQ ✣ 30 C                    40 QQ — 20 C
   ------------------              ------------------
 72 QQ ✣  6 C — 10 Q              40 QQ — 36 C ✣ 8 Q vel
                                  40 QQ ✣ 8 Q — 36 C
```

Huius operationis demonſtratio.

Hæc autem ita demonſtrantur, & primò quidem rectè multiplicationis operationem inſtitui, multiplicando partes ſingillatim, &c. ex eo patet; quia.

Si fuerint duo numeri, & ipſorum alter in quotcunq; partes diuidatur: numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis eſt numero, qui ſub indiuiſo numero, & qualibet diuiſi numeri parte continetur.

Quod facilè demonſtrari poterit ex ijs, quę in Elementis oſtenduntur.

Itaq; idem eſt multiplicare diuiſum in indiuiſum; ac eſt multiplicare partes ipſius diuiſi in indiuiſum, productoſq; numeros in vnam colligere ſummam. Sit numerus 40, diuiſus in duas partes 30, & 10; Si multiplicemus 10, per 5, producentur 50. Si 30, per 5, fient 150, horum ſumma eſt 200. Idem autem numerus 200, producitur ex multiplicatione numeri 40, in 5; Si igitur ſint duo numeri, & ipſorum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis eſt numeris ſimul collectis, qui ſub indiuiſo numero, & qualibet diuiſi numeri parte continentur. Idem intellige, ſi numerus diuiſus ſit in plures partes, quàm in duas.

Exemplis explicatur ſuperior doctrina.

30 + 10
5
150 + 50
40
5
200
30 + 10 + 6
5
150 + 50 + 30

Demonſtratio

Hoc autem modo demonſtrabimus, quæ diximus. Sint duo numeri A B, & C, quorum A B, ſit diuiſus in duas partes A D, D B; vel in plures quotcunque exempli gratia tres A D, D E, E B, ſit autem F, qui ſit ex A B, in C, indiuiſus autem C, multiplicans A B, producat F, multiplicans A D, producat G H, multiplicans D B, in prima figura producat H K; In ſecunda verò multiplicans A D, producat G H, & multiplicans D E, producat H I; Deniq; multiplicans E B, producat I K. Dico F, in prima figura æqualem eſſe G H, H K, ſeu G K, toti compoſito ex G H, H K; In ſecunda verò æqualem eſſe G H, H I, I K; ſeu G K, compoſito ex G H, H I, I K. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F, metiatur A B, ipſum F, neceſſe eſt [a], per C; hoc eſt A B, erit pars ipſius F, denominata à C. Sic etiam ratione eadem A D, pars erit ipſius G H, & D B, ipſius H K, in prima figura; vt D E, ipſius H I, & E B, ipſius I K, in ſecunda figura; pars inquam erit à C, denominata; videlicet eadem pars, quæ eſt A B, ipſius F. Cum autem.

A 30	D 10		B
C 5	F 200		
G 150	H 50		K
A 30	D 10	E 6	B
C 5	F 230		
G 150	H 50	I 30	K

a 1. pronunciatum.

Si ſint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum; eadem pars; & omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Vt demonſtratur ad quintam propoſitionem lib. 7. ob id totus A B, totius G K, eadem pars erit, quæ A D, ipſius G H. Sed quæ pars eſt A D, ipſius G H, eſt A B, ipſius F: erit proinde A B, totus, pars totius G K, quæ idem A B, ipſius F; proinde G K, & F, erunt [b], inter ſe æquales. Hoc etiam ex ſupraposito diagrammate cognoſcere licet.

b 4. pronunciatū ſ primi.

At ſi loquamur de multiplicatione compoſiti in compoſitum; certè non minùs patet demonſtratio: quandoquidem.

Propoſitio.

Si duo numeri fuerint vtcunq; diuiſi; numerus planus comprehenſus ſub totalibus numeris, æqualis eſt aggregato illorum, qui ſub partibus comprehenduntur.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina.

Vt ſi ſint duo numeri 40, & 26, quorum ille diuiſus ſit in duas partes 30, & 10; hic autem in 20, & 6; Si 40, ducentur in 26, producentur 1040. Idem autem numerus fiet; ſi ducatur 10, in 6; item 30, in 6; mox 20, in 10; itemq; 20, in 30: numeri enim producti 600, 200, 180, & 60, ſimul ſumpti efficiunt 1040, vt patet ex hoc paradigmate.

40	600	30 + 10
26	380	20 + 6
	60	
240		180 + 60
80	1040	600 + 200
1040		600 + 380 + 60

Quòd

Quod attinet ad ſigna; nimirum † in † facere †, ex eo conſtat. *Demonſtratio quoad ſigna.*

Quod ſi duo fuerint vtcunq; numeri diuiſi: numerus emergens ex eorum multiplicatione, æqualis eſt numero plano comprehenſo ſub primis partibus; plus planis numeris, quorum vnus ſub prima vnius, & ſecunda alterius; alter autem ſub prima huius, & ſecunda illius; plus deniq; illo, quod fit ſub ſecundis. *Propoſitio.*

Si enim fuerint duæ rectæ, ſeceenturq; ambæ in quotcunq; ſegmenta; rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis. *Propoſitio.*

Quod demonſtrauit Commandinus in primam propoſitionem ſecundi Elementorum; quod vtiq; numeris etiam accommodari poteſt.

Sint numeri 70, & 30, quorum ille diuiſus in 40, & 30, hic in 20, & 10. Ex 70, in 30, fit 2100. Idem autem fit, ſi numerus planus 300, ex primis partibus 30, & 10, factus, addatur planis reliquis, vt patet. *Exemplo declaratur ſuperior propoſitio.*

```
    40 ✠ 30
    20 ✠ 10
   ─────────
   400 ✠ 300
800 ✠ 600
─────────────────────────
800 ✠ 600 ✠ 400 ✠ 300
```

Itidem perſpicua eſt demonſtratio, quoad ſigna —, & —: nimirum — in — efficere ✠. Etenim. *Demonſtratio quoad ſigna —, & —: nempe — in — efficere †.*

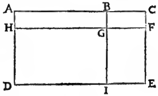
Si fuerint duo numeri differentes, itemq; & alij duo: numerus planus, qui ſub iſtis differentijs comprehenditur; æqualis eſt numero plano ſub maioribus ex ipſis differentibus, plus plano ſub minoribus, qui afficiuntur ſigno —, minus plano ſub minori vnius, & maiori alterius, & ita viciſſim. *Propoſitio.*

Hoc autem totum facilè deducetur ex Elementis. Quod certè conſtare poteſt exemplo numerorum 60 — 20, & 40 — 10.

Eſto rectangulum D C, comprehenſum ſub A C, C E, & in A C, ſit punctum B, vt in C E, ſit punctum F, ductæq; ſint H F, B I; ita vt H F, ſit * parallela ipſi A C, & B I, ipſi C E. Quoniam igitur A B, eſt differentia inter A C, & B C, itemque F E, eſt differentia inter C E, & C F, eſtq; H G, æqualis A B, & G I, æqualis F E, rectangulum igitur D G, comprehenſum ſub H G, G I, erit comprehenſum ſub huiuſmodi differentijs. Ad oſtendendum autem ex — in — fieri ✠, operæ pretium erit demonſtrare, ad habendum rectangulum D G, multiplicata A C, per C E, addendum eſſe producto D C, id quod fit ex B C, in C F; *Demonſtratio* *a 31. primi.*

	60—20	60
	40—10	20
	———	—
	—600 ✠ 200	40
2400—800		—
200		40
——	40	10
2600	30	—
1400	——	30
——	1200	
1200		

Cùm enim A B, perindè ſit, ac A C, minus B C, & E F, perindè ſit ac E C, minus C F, rectangulum quidem D G, comprehenſum ſub H G, G I, hoc eſt ſub A B, F E, erit illud, quod fit ex A C, minus B C, in E C, minus C F; & quoniam in operatione multiplicationis, de qua agimus, ad habendum productum D G, quod intenditur, inſtituitur multiplicatio maiorum nominum, A C, C E, inter ſe; Oſtendendum eſt igitur producto ex A C, in C E, addendum eſſe productum ex B C, in C F; ita enim conſtabit ex — in — fieri ✠, hoc enim nil aliud eſt, quàm productum G C, factum ex B C, in C F, quæ afficiuntur nota —, addi debere ipſi D C, vt inde ſubtractis A F, B E, quorum illud comprehenditur ſub A C, C F, hoc autem ſub B C, C E, proueniat D G, idque ſic facilè demonſtrabitur. *Concluditur ex — in — fieri ✠.*



Quoniam additum eſt G C, ipſi D C, erit rectangulum D C, vna cum rectangulo G C, æquale rectangulo D G, vna cum rectangulis A F, I C; ergo ſi ad rectangulum D C, addatur rectangulum G C; & ex aggregato auferatur rectangulum A F, vna cum B E, prouenit D G, ergo ad habendum D G, ſub differentijs A B, F E, multiplicando A C, C E, inter ſe nomina maiora, oportet addere G C, ſub minoribus nominibus B C, C F, addere inquam producto D C, vt inde ſubtractis A F, B E, proueniat D G, productum ſub H G, G I; hoc eſt ſub A B, F E, differentijs nominum A C, B C, & C E, C F.

Hæc autem numeris ſuperioribus aptata faciliùs intelligentur; per A C, intelligamus 60, at per C E, 40, rurſus per B C, 20, & per C F, 10; Si igitur intelligatur A C, 60, ducta in C E, 40, vt proueniat D C, 2400, & huic producto intelligatur additum G C, 200, factum ex B C, 20, in C F, 10; prouenict 2600; ex quo ſi ſubducxeris A F, 600, factum ex A C, 60, in C F, 10, & rurſus B E, 800, factum ex B C, 20, in C E, 40, remanet D G, 1200, pro eo, quod fit ex H G, in G I, hoc eſt A B; differentia inter A C, B C, in F E, differentiam inter C E, C F. Inſtituendo igitur multiplicationem inter 60 — 20, & 40 — 10; vt habeatur productum, multiplicato 60, per 40, ei quod prouenit oportet addere id quod ſit, ex 20, in 10, ex aggregato enim ſubtracto, eo, quod fit ex 60, in 10, & rurſus, quod fit ex 40, in 20; prouenit factum ex multiplicatione differentiæ, inter 60, & 20; per differentiam inter 40, & 10, igitur ex — in — fit ✣.

Quoad ſigna ✣, & —, & è contra.

Quoad numeros ſurdos.

Et hinc etiam deducitur demonſtratio quoad ſigna ✣, & —, itaut non ſit opus vlteriori declaratione. Quoad numeros verò ſurdos, nihil occurrit dicendum; ex generali ſiquidem doctrina illorum perſpicuum remanet, quid agendum in multiplicatione, quando afficiuntur characteribus Poteſtatum, &c.

Explicatur multiplicatio poteſtatum numeratorum à numeris irrationalibus.

Multiplicentur itaq; numeri irrationales, & in vnam ſummam colligantur exponentes poteſtatum; videatur character, qui huic debetur ſummæ, tribuaturq; producto ex multiplicatione, &c. Multiplicemus ℞ 5 R in 2, fit productum ℞ 20 R. Præterea ex ℞ 6 R, in 3 R, fit ℞ 54 Q. Inſuper ex ℞ 7 R, in ℞ 3 R, fit ℞ 21 Q; & ſic de reliquis.

Difficultas.

Occurrit autem circa hoc vnum certè notatu dignum. Si ſit iniunctum ducere numerum ſurdum dignitate affectum, in numerum abſolutum affectum quoq; dignitate; vt ℞ 7 R in 2 R: vtrum quadrantes numerum, vt illum nimirum ad alterius naturam reuocemus, nempè irrationalis, debeamus quadrare pariter ipſam dignitatem, itaut non ſit inſtituenda multiplicatio inter ℞ 7 R, & 4 R, ſed inter ℞ 7 R, & 4 Q. Rationes non deſunt hinc inde,

Quid agēdū.

Sed negatiuam ſententiam eſſe probabiliorem opinor, & ſuſtineri poſſe faciliùs; nempè intactam relinquendam eſſe poteſtatem. Etenim Radix (vt aduertit Bombellius) nihil eſt aliud, quàm numerus in potentia: quapropter ſolùm diſcrimen eſt inter numeros; itaut ad dignitatem ipſam hoc non attineat. Id autem ita ſe habere perſpicuum erit ex noſtrorum Problematum reſolutionibus, in quibus id, cum ſe obtulerit occaſio, demonſtrabimus.

Num in multiplicatione, numeri irrationalis dignitate affecti debeat dignitas redigi ad naturam &c. Itaut quadratice multiplicando numerum abſolutum, etiam dignitatem non diſſimili modo multiplicare debeamus. Exemplis res illuſtratur.

Quòd attinet ad alteram operationem, quam ſuperiùs explicuimus, ſcùm ſcilicet iniungitur ducere numerum ſurdum dignitate affectum, in numerum abſolutum affectum quoq; dignitate, vt ℞ 7 R, in 2 R, vtrum quadrantes numerum, vt illum nimirum ad alterius naturam reuocemus, nempè irrationalis, debeamus quadrare pariter ipſam dignitatem, ita vt non ſit inſtituenda multiplicatio inter ℞ 7 R, & 4 R; ſed inter ℞ 7 R, & 4 Q. Negatiuam partem amplexi ſumus, ea ratione ducti quoniam irrationalitas, non afficit dignitatem; vnde cùm nos multiplicare volumus numerum dignitate affectum; ſi numerus irrationalis fuerit, attendi tantùm debet natura iuſius numeri, conferenda tantùm cum numero multiplicante.

Quod exemplo, nos magis declarabimus.

Sit iniunctùm ducere ℞ 16 R, in 4 R, ſenſus redditur hic, quòd nimirum prætinm radicis ductum in radicem quadratam numeri 16, multiplicetur per productum ex pretio radicis multiplicato per 4. Vnde ſi ſupponamus 1 R, pretium eſſe 6; certè ℞ 16 R, valebit 24, & 4 R, valebunt 24; idem eſt igitur ducere ℞ 16 R, in 4 R, ac ducere 24, in 24, fitque productum 576. Quod ſanè prouenict etiam, relicta

dignitate

dignitate R, & numero 4, multiplicato quadraticè, ac inſtituta multiplicatione inter quadratum ex 4, nempè 16, & 16, qui afficiebatur dignitate radicis; fit enim productum 256, cui affigi debet Q, nempè quadratum R, ortum ex multiplicatione R, in ſe; Itaque productum erit ℞ 256 Q, cuius eſt ſenſus, vt pretium quadrati ductum ſit in radicem quadratam numeri 256, quæ eſt 16; & res ita ſe habet, nam 16 Q, valent 576, quantum erat, quod prouenicbat ex multiplicatione pretij ℞ 16 R, in pretium 4 R, nempè 24, in 24.

Ita etiam ſi ſit iniunctum multiplicare ℞ 25 R, per 4 R, oportet quadraticè multiplicare 4, vt fiat 16, ducendus in 25, vt fiat 400. Radix autem in R, facit quadratum; itaque productum erit ℞ 400 Q, cuius eſt ſenſus, vt quadrati pretium, ducendum ſit in radicem quadratam numeri 400, nempè in 20.

Demonſtratio ea eſt, quàm paulopoſt afferemus.

Quando Radices ſunt natura diuerſæ.

Quòd ſi Radices fuerint natura diuerſę, reducantur ad eandem naturam; vt ſuo loco de multiplicatione irrationalium numerorum tractauimus. Eodem pacto procedendum erit in multiplicatione numerorum compoſitorum; vt de ipſis ſine poteſtatum characteribus ſuo loco dictum eſt: additis tamen præceptis poteſtatum multiplicationis.

Quando Radices ſunt vniuerſales.

Quòd ſi fuerint Radices vniuerſales, tàm ſimplices, quàm compoſitæ, nihil hìc dicendum ſe offert; cùm eodem modo fiat horum numerorum multiplicatio, quemadmodum ſit numerorum irrationalium, ſimplicium, & compoſitorum, cum ipſis poteſtatibus non ligatorum, de quibus iam egimus: nihil enim aliud in his præterea requiritur, quàm liberare numeros à clauſulis, ſeu parentheſi, & eodem modo procedere, vt in illis; proindè hìc ſilentio hanc operationem inuoluimus.

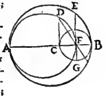
Ad multiplicationem quod attinet. Geometricè quidem oſtendemus præceptum, cùm radices vniuerſales ſimplices, fuerint quadratæ; numerique dignitate radicis affecti extiterint.

Huius multiplicationis partitio.

Poteſt autem ſimplex vniuerſalis radix multiplicari, vel per numerum abſolutum, vel per numerum irrationalem, vel per radicem ſimplicem ligatam, ſiuè vniuerſalem &c. Vt ſi multiplicari debeat ℞ (9 R) per 4; tunc multiplicabitur radix ſimplex vniuerſalis per numerum abſolutum. Si verò multiplicari debeat ℞ (9 R) per ℞ 4 (Placet autem adhibere numeros rationales, eoſque tractare, non ſecus ac ſi irrationales eſſent; iuuat enim plurimùm ad veritatem indagandam) tunc multiplicabitur radix ſimplex vniuerſalis per numerum irrationalem. Si deinde multiplicari debeat ℞ (9 R) per ℞ (4 R) multiplicabitur tunc radix vniuerſalis ſimplex per radicem ſimplicem vniuerſalem.

Quoniam verò faciliùs Geometricè tractatur multiplicatio radicis vniuerſalis, per radicem vniuerſalem; propterea hinc exordiri iuuabit.

Hic itaque Geometrica ratione oſtendemus præceptum, cum radix ſimplex vniuerſalis fuerit quadrata; & numerus affectus extiterit dignitate radicis.



Sint autẽ numeri radicis dignitate affecti A F, C F; radicis autem pretiũ, eſto F B. Ducatur A F in F B, vt proueniat quadratũ F E; ducatur præterea C F in F B, vt proueniat quadratũ F G, inſuper ducatur A F in C F, vt oriatur quadratũ F D;

Oſtendendum eſt rectangulum ſub D F, F B, æquale eſſe rectangulo E F G.

Demõſtratio.

Præceptum enim iubet, vt ducamus numerum in numerum, & producto affigamus Q dignitatem ortam ex multiplicatione radicis in radicem. Geometra autem rectè ſubrogabit rectangulum ſub lateribus, in locum eius, quod apud Arithmeticum eſt latus producti ex plano quidem in planum, quod inuecta vnitate in Geometriam optimè poteſt oſtendi imaginaria quantitate de medio ſublata, à qua quantum fieri poteſt in Geometricis eſt abſtinendum Maioris tamen claritatis gratia.

Declaratio.

Intelligamus per E F, ipſam ℞ (9 R), & per F G, intelligamus ℞ (4 R). Iuxta præceptum ducere quidem oportebit 9 in 4, vt proueniat 36; & præterea multiplicare R in R, vt oriatur Q, quo affixo ipſi 36 fiat 36 Q, quod eſt parentheſi compre-

comprehendendum, vt fiat ℞ (36 Q), cuius eſt ſenſus, vt ducto 36 numero, qui prouenit per multiplicationem 9, in 4, ducto inquam in pretium quadrati v. g. 25; ſi radicis valor fuerit 5, & producti ſumatur latus, quod erit 30, hoc enim erit ęquale producto ex ℞ (9 R) in ℞ (4 R), quarum pretia ſunt ℞ 45, & ℞ 20, quibus inter ſe ductis, fit ℞ 900, hoc eſt 30. Quoniam autem 36. nempe productum ex A F, in C F, videlicet quadratum D F, ſi ducatur in 25, quadratum ipſius F B, præſupponitur enim 5, pretium radicis, & producti ſumatur latus, huic ęquale eſt apud Arithmeticum, quod fit ex D F, in F B, nempè productum ex multiplicatione laterum. Propterea ſubrogabit Geometra rectangulum ſub D F, & F B, in locum lateris, cuius quadratum eſt productum ex quadrato D F, in quadratum F B.

Perinde igitur erit oſtendere ex E F in F G, fieri id, quod, ęquale eſt lateri producti, ex quadrato D F, in quadratum F B, ac demonſtrare productum ex E F, in F G, ęquale eſſe producto ex D F, in F B.

Rectè autem ſubſtitutionem hanc fieri vnitatis vſu, egregiè Geometra poterit oſtendere.

Demonſtratio ſupradictorū. Conſtat autem rectangulum E F G, ęquale eſſe rectangulo ſub D F, & F B. Superius [b] enim demonſtrauimus, ita eſſe F G ad F B, vt D F ad F E.

Subſtitutio commemorata qua arte fiat à Geometra. Verum enim verò ſubſtitutionem illam aggrediens Artifex, hunc in modum ratiocinationem inſtituit, & quaſi dixerim, in re difficili, dexterè, ac πανούργως προσέρχεται τη πραγματεία, admittit μονάδος vſum in Arte; vnde ſibi προσπορίζει τὴν δύναμιν aduerſus πλάσμα; ne is πλασματίας videatur. Sed quantum fieri poteſt, de quantitate diſputans, tantùm id, quod Natura permiſit, contemplatione perſequitur.

Intellecta igitur vnitate, quam poſitam quantitatem non incongruè appellat; dum opus aggreditur, conſtanti aliquo ſimbolo deſignat, exempli gratia P; atq; adeo, faciens, vt P, ad C F, ita A F, ad aliam, quæ ſit I, inter I, & P, mediam proportionalem admittit H. Mox verò, vt P, ad F B; quàm appellat exempli gratia K, ita hanc facit ad aliam, puta L, vnde ſunt duæ ſeries in ratione continua incipiente ab ipſa P.

Vt autem P, ad H; ita facit K, ad M, & vt P, ad I, ita L, ad N. Hinc emergit ſeries, productorum, inter ſe rationes eaſdem habentium; ac proinde primum factum ſub P, & M; ad aliud ſub P, & N, rationem habebit, eandem, quàm latus, ad ſui quadratum in ſerie illa continua ducente ortum ab ipſa P.

Quamobrem non ſecus, productum ex H, in K, ad productum ex I, in L; Vnde omnis imaginaria quantitas de medio ſublata erit.

Vnitatis vſus in rebus Geometricis, magni momenti eſt. Ex quo facilè intelliges, quàm magni momenti eſſe vnitatis vſum in Geometricis, qua de re nos in tractatu de reſolutione, & compoſitione Mathematica, abundè differemus; Obiter propterea hæc dicta ſint.

L E M M A I.

SIT numerus A, cuius latus B, ductum in C, producat D, cuius quadratum E.

Deinde A, ductus in F, quadratum ipſius C, producat G.

Oſtendendum eſt G, eſſe æqualem E.

Quandoquidem A, & F, ſunt quadrata ipſorum B, & C. Proinde productum ex B, in C, nèmpe D, erit latus producti ex A, in F, vt conſtat, ex ijs, quæ ſuperiùs [a] à nobis oſtenſa ſunt; quare G, erit quadratum ipſius D, ſed E, ex hypotheſi, eſt quadratum ipſius D; Propterea G, & E,

a Ex ſupra Demonſtratis.

A 64	A 64
B 8	F 9
C 3	
D 24	G 576
E 576	

dratum

erunt inter ſe æquales. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

Hęc autem aptabis ei, quod ſequitur Lemmati, ſubſtituendo literas, & numeros, vt oportet; quod, & alibi, vbi opus fuerit, maioris facilitatis gratia præſtabit efficere.

LEMMA II.

SINT duo numeri A, & B; qui inter ſe multiplicati producant C, cuius latus ſit D, quod ductum in E, faciat F; cuius quadratum ſit O. At vero G, quadratum ipſius E, ductum in A, producat N.

Oſtendendum eſt ita eſſe A, ad C, vt N, ad O.

Quandoquidem D, latus ipſius C, ductum in E, facit F, cuius quadratum eſt O; proinde G, quadratum ipſius E, multiplicando C, producet ᵃO; at verò G, multiplicando A, fecit N; ergo erit ᵇ vt A, ad C, ita N, ad O. Quod oportebat oſtendere. His autem demonſtratis, facilè erit oſtendere, quod principaliter intenditur.

G16 A.9. B25.
N144 C225
D15
E 4

F60
O3600

a. ex præmiſſo Lemmate.
b. 18. ſeptimi.

Arithmetica demonſtratio ad oſtendendum præceptũ multiplicationis inter numerum abſolutum, & radicem ſimplicẽ vniuerſalem.

SINT duo numeri A, B, qui inter ſe ducti, producant C, cuius latus ſit D, hoc autem ductum in E, producat F.

Deinde A, ductus in G, quadratum ipſius E; producat N; qui ductus in B, efficiat L; cuius latus ſit M.

Oſtendendum eſt M, æqualem eſſe ipſi F.

Vel B, ductus in G, quadratum ipſius E, producat H, qui ductus in A, progignat I; cuius latus ſit K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe ipſi F.

Eſto O, quadratum ipſius F.

Quandoquidem eſt ex eo, quod præmiſſum eſt Lemmate, vt A, ad C, ita N, ad O, eſtque ᵃ vt A, ad C, ita vnum ad B, ſiquidem A, multiplicando B, fecit C, quoniam verò B, multiplicando N, fecit L, propterea erit ᵇ, vt vnum ad B, ita N, ad L; erat autem, vt vnum ad B, ita A, ad C, ergo erit ᶜ, vt A, ad C; ita N, ad L, ſed vt A, ad C, ita ex Lemm: præmiſſ: erat N, ad O, ergo N, ad L, habebit ᵈ eandem rationem, quam habet ad O; Quamobrem L, & O, erunt inter ſe æquales; atque adeo eorum latera, puta M, & F, inter ſe æqualia erunt. Quod erat nobis propoſitum demonſtrare.

G16. A9. B25 B25
N144 C225 H400
B 25 D15 A 9

L3600 E 4 I3600
M 60 K 60

F60
O3600.

a. ex definitione multiplicationis.
b. ex definitione multiplicationis.
c. Lemma 14. ſeptimi.
d. Lemma 14. ſeptimi.

Non diſſimiliter procedemus in demonſtrando alio caſu &c.

LEMMA

Digitized by Google

L E M M A.

SINT duo numeri A, B, qui multiplicati per C, producant D, E; qui inuicem ducti producant Q; At verò ijdem A, B, inter ſe multiplicati producant K, qui ductus in L, quadratum ipſius C, producat M.

Oſtendendum eſt M, æqualem eſſe ipſi Q.

A 25. B 9.
C 4
D 100 E 36
Q 3600

A 25 B 9
K 225
L 16

M 3600

Quandoquidem L, eſt quadratum ipſius C; habebit [a] L, ad vnum, duplicatam rationem, eius quam habet C, ad vnum; quia verò L, multiplicans K, producit M, ergo [b], vt L, ad vnum, ita erit M, ad K, quare [c], M, ad K, duplicatam habebit rationem eius, quæ eſt ipſius C, ad vnum; ſed vt C, ad vnum; ita [d], D, ad A, cum C, ductus in A, fecerit D, ergo M, ad K, duplicatam rationem habebit [e], eius, quæ eſt D, ad A. Quoniam verò Q, fit ex D, in E, & K, fit ex A, in B, ergo Q, ad K, habebit [f], rationem compoſitam ex ratione D, ad A, & E, ad B; Sed eadem eſt [g] ratio D, ad E, quæ A, ad B, atque adeo permutando quidem eſt [h], D, ad A, quemadmodum eſt E, ad B; proinde Q, ad K, rationem habebit duplicatam eius [i], quæ eſt D, ad A; Sed M, ad K, rationem habet quoq; duplicatam, eius, quæ eſt D, ad A, vt oſtenſum eſt, ergo Q, ad K, rationem habebit [k], eandem, quam habet M, ad K; Quare M, & Q, erunt inter ſe æquales; Quod erat operæ pretium oſtendere.

a. Schol. ad 10. octaui Elementorum.
b. Ex defin. mult.
c. Lemm. 14. 7.
d. Ex defin. mult.
e. Lem. 14. 7.
f. 5. Octaui.
g. 18. ſeptimi.
h. 13. ſeptimi.
i. Lemma ad 14. ſeptimi.
k. Lemma ad 14. ſeptimi.

Arithmetica demonſtratio cum radix ſimplex vniuerſalis ducitur in radicē ſimplicē vniuerſalem.

SINT numeri A, B, qui multiplicati per C, producant D, & E, quorum latera ſint F, & G, quæ ducta in ſe inuicem producant H.

Iidem verò A, & B, inter ſe multiplicati producant K, qui ductus in L, quadratum ipſius C; producat M, cuius latus ſit N.

Oſtendendum eſt N, æqualem eſſe ipſi H.

A 25 B 9
C 4
D 100 Q 3600 E 36
F 10 H 60 G 6

A 25 K 225 B 9
L 16

M 3600
N 60

Ducatur D, in E, & proueniat Q. Quoniam igitur D, ductus in E, producit Q; & F, latus ipſius D, ductum in G, latus ipſius E, producit H; ergo ex ijs, quæ ſuperiùs oſtendimus, erit [a], quidem H, latus ipſius Q.

a. ex ſupra demonſtratis.

Quia verò A, multiplicando B, produxit K, qui ductus in L, quadratum ipſius C, produxit M, & C, quidem multiplicando A, fecit D, & idem C, multiplicando B, fecit E; ob id, ex eo, quod præmiſſum eſt Lemmate, productum ex D, in E, nempe Q, æquale erit ipſi M; Sed latus ipſius Q; eſt H, vt oſtendimus, & latus ipſius M, eſt N, proinde N, æquabitur H.

Cæterùm

Cæterùm multiplicationis probatio rectè inſtituitur per diuiſionem, de qua infra; quemadmodum diuiſio per multiplicationem, vt poſtea conſtabit. *Multiplicationis probatio*

Deinde inſtitui poteſt examen, & probatio multiplicationis, per reſolutionem numerorum denominatorum, ſecundum aliquam radicem Geometricæ progreſſionis: etenim numeri denominati reſoluti, ſi multiplicentur ad inuicem, tantum efficere debent, quantum numeri denominati producti, ſi iuxtà radicem eandem reſoluantur. *Primus probationis modus.* *Secundus modus probationis.* *Exemplo declaratur ſuperior doctrina.*

Vt ex ductu 4 R † 2 in 3 R † 3 fiunt 12 Q † 18 R † 6.

Reſoluamus numeros denominatos ſecundum radicis æſtimationem 3: erunt ergo 4 R † 2, idem quod 14; & 3 R † 3 idem quod 12: ex ductu autem 14 in 12, fiunt 168; quantum ſanè fit ex reſolutione iuxtà eandem radicis æſtimationem ipſius producti 12 Q † 18 R † 6. Etenim 12 Q, idem eſt, quod 108, hoc eſt, 12 Q, valent 108; Si 1 R, valor ſit 3: & 18 R, idem, quod 54; nam ſi 1 R, valor eſt 3, vtiq; 18 R, valebunt 54: modò ſi ad 108, addantur 54 † 6, fiet ſumma 168; vt patet.

	4 R ✣ 2
	3 R ✣ 3
	12 R ✣ 6
12 Q ✣ 6 R	
12 Q ✣ 18 R ✣ 6	
	108
	54
	6
	168

Hinc manifeſtum eſt, quod ſupra dicebamus; additionem terminorum Arithmeticæ progreſſionis reſpondere multiplicationi terminorum Geometricæ progreſſionis: etenim, vt ex additione 3, ad 5, fiunt 8; ita in via communi ex ductu S S, in C, quorum exponentes ſunt 5, & 3, nimirum 32, in 8, producentur 256, ſeu Q Q Q, cuius exponens eſt 8, & in via Diophantæa, ex ductu QC, in C, fiet QCC: quapropter ſi character in characterem ducatur; producitur character tantùm diſtans à maiori excluſiuè quantùm ab vnitate minor. *Additio terminorum Arithmetica progreſſionis reſpondet multiplicationi Geometrica progreſſionis.*

S C H O L I O N.

De Multiplitione igitur agentes; hæc enunciauimus. Et primò quantum ad characteres:

Si fuerint quatuor numeri, & qui fit ex primo in ſecundum, ducatur in factum, ex tertio in quartum (nihil refert, num ſint proportionales, an non) hoc eſt producti ex primo in ſecundum, & ex tertio in quartum multiplicentur ad inuicem (per primum, & tertium, intellige numeros, per quos poteſtates numerantur, per ſecundum, & quartum verò poteſtates ipſas) is, qui emergit, æqualis eſt illi, qui fit, ſi multiplicetur, primus in tertium, & ſecundus in quartum, & producti multiplicentur inter ſe.

Vnde inferebamus rectè operationem inſtitui additione exponentium multiplicando partes &c. Praterea.

Si numerus in Geometrica progreſſione incipiente ab vnitate, ſe ipſum multiplicauerit, numerum producet progreſſionis eiuſdem, qui tantum ab eo excluſiuè diſtat, quantum is ab vnitate. Hinc deduximus demonſtrationem multiplicationis poteſtatum. Inſuper.

Si minor quiſpiam numerus Geometrica progreſſionis ab vnitate incipientis, multiplicet quempiam maiorem, progreſſionis eiuſdem, producitur numerus, qui tantum à maiori diſtat excluſiuè, in progreſſione eadem, quantum minor excluſiuè diſtat ab vnitate. Vlterius.

Si fuerint duo numeri, & ipſorum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis eſt numero, qui ſub indiuiſo numero, & qualibet diuiſi numeri parte continetur. Vnde deduximus rectè multiplicationem inſtitui multiplicando partes ſingillatim &c.

Si ſint quotcunque numeri, quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum eadem pars, & omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Si duo numeri fuerint vtcunq; diuiſi, numerus planus comprehenſus ſub totalibus numeris, æqualis eſt aggregato illorum, qui ſub partibus comprehenduntur. Hæc loquentes de multiplicatione compoſiti in compoſitum.

Quod ſi fuerint vtcunque numeri diuiſi, numerus emergens ex eorum multiplicatione, æqualis eſt numero plano comprehenſo ſub primis partibus, plus planis numeris, quorum vnus, ſub prima vnius, & ſecunda alterius, alter autem ſub prima huius, & ſecunda illius, plus; deniq; illo, qui fit ſub ſecundis; Et hæc pro demonſtratione multiplicationis ſigni ✣ in ✣.

Denique ſi fuerint duo numeri differentes, itemq; & alij duo; numerus planus, qui ſub iſtis differentijs comprehenditur, æqualis eſt numero plano, ſub maioribus ex ipſis differentibus, plus plano ſub minoribus, qui afficiuntur ſigno — minus plano ſub minori vnius, & maiori alterius, & ita viciſſim. Quæ nos ad oſtendendum præceptum pro multiplicatione ſignorum —, & —, ſtatu faciant ✣ attulimus.

Numerorum Denominatorum Diuiſio.

OPERATIO QVARTA.

In diuiſione, vt in cæteris operationibus occurrit numerorum varietas atq; diſtinctio.

NON minus in diuiſione, quàm in cæteris operationibus occurrere poteſt numerorum varietas in ſuperioribus à nobis inſtituta.

Quando numerus denominatus diuidi debet per numerum abſolutum.

Si numerus denominatus diuidendus ſit per numerum abſolutum, & denominatum à poteſtatis charactere; inſtituatur diuiſio, vt in numeris abſolutis, ſeù vulgaribus: etenim pro quotiente numerus emerget appellationis eiuſdem cum numero diuiſo. Vt ſi diuidantur 100 R, per 25, fiet quotiens 4 R: inſuper diuiſis 30 Q, per 10, fit quotiens 3 Q: item ſi diuidantur 40 C, per 2, quotiens emerget 20 C; & ſiç de reliquis.

Exemplo declarãtur præcepta.

Quando numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatum.

At verò ſi numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatum; inſtituatur diuiſio, vt in numeris vulgaribus, ſiuè abſolutis, & emerget numerus alterius denominationis, quæ hac dignoſcetur arte.

Diuiſionis ſupradicta præcepta.

Exponens denominationis diuidentis ſubtrahatur ab exponente denominationis diuiſæ, & numerus proſiliens erit exponens denominationis quotientis.

Exemplis doctrina tradita illuſtratur.

Vt diuidere debeamus 12 R, per 3 R: diuidantur 12 per 3, fiet quotiens 4: modo ad indagandam eius denominationem 1, exponens ipſius R, denominationis diuidentis ſubtrahatur ab 1, exponente ipſius R, denominationis diuidendæ; factaq; ſubtractione, nihil remanebit. Ob id dicemus quotientem ipſius diuiſionis, nimirum illorum denominationem eſſe 0; atq; adeò diuiſis 12 R, per 3 R, fieri quotientem numerum abſolutum. Diuidere operæ pretium ſit 20 C, per 5 Q. Diuidantur 20, per 5, fit quotiens 4; deindè ſubtracto numero 2, exponente quadrati, abs 3, exponente ipſius C, remanebit 1, exponens huius denominationis Radicis: ob id dicemus diuiſis 20 C, per 5 Q, fieri qnotientem 4 R: Item diuiſis 15 Q, per 3 R, fiet quotiens 5 R: præterea diuiſis 24 Q C, per 12 C, fiet quotiens 2 Q. &c.

In huius autem operationis gratiam, hæc à nobis ſubijcitur tabella; in qua totum hoc perſpicuè cernere licet: huius autem vſus facilis eſt, & relinquitur manifeſtus ex explicatione iam tradita Tabellæ ſuperiùs poſitæ in gratiam multiplicationis.

Demonſtratio.

Demonſtratio hæc eſt, Cum diuiſio numeri, per numerum nihil aliud ſit, quàm inuentio numeri, ad quem diuiſus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem. Hoc certè aliter fieri non poteſt, quàm applicando diuidendum, ad diuidentem: exhibetur enim numerus quotiens; nimirùm oſtendens, quoties diuidendus diuiſorem complectitur, & hic ad diuiſum eam rationem habeat, quàm vnitas ad diuiſorem. Numerus enim numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui ſuis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiſo continetur.

Exponen-

Digitized by Google

Exponentes		1	2	3	4	5	6	7
		R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
1	R	N	R	Q	C	QQ	QC	CC
2	Q	R	N	R	Q	C	QQ	QC
3	C	Q	R	N	R	Q	C	QQ
4	QQ	C	Q	R	N	R	Q	C
5	QC	QQ	C	Q	R	N	R	Q
6	CC	QC	QQ	C	Q	R	N	R
7	QQC	CC	QC	QQ	C	Q	R	N

Supponamus 100, diuidi per 5; fit quotiens 20, numerus oſtendens, quoties 5, continetur in 100, habet autem 100, ad 20, rationem eandem, quam habet 5, ad vnitatem. *Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina.*

$$\frac{100}{5}\ 20$$

Quod attinet ad poteſtates, ſic oſtenditur rectè operationem inſtitui diuidendo poteſtates; nam. *Demonſtratio quoad poteſtatem ſpectat.*

1; 5; 20, 100;

Si fuerint quatuor numeri [per primum, & tertium intelligo numeros, à quibus poteſtates numerantur; per ſecundum, & quartum poteſtates ipſas] diuidatur autem primus per tertium, & quotiens ducatur in quotientem ſecundi diuiſi per quartum: producto numero aequalis eſt ille, qui emergit ex diuiſione producti ex primo in ſecundum, per productum ex tertio in quartum, ita vt in idem recidat, vtrouis modo procedatur. *Propoſitio.*

Sint quatuor numeri, vt vides. *Exemplo explicatur ſuperior doctrina.*

140, 20, 10, 5.

Diuiſis 140, per 10, fit quotiens 14: hic ſi ducatur in 4, numerum quotientem in diuiſione numeri 20, per 5, producentur 56; modo ſi ducantur 140, in 20, pro-

ducentur 2800: his porrò diuiſis per 50, numerum productum ex multiplicatione numeri 10, per 5, fit quotiens 56. Hoc idem cernere licet in his alijs numeris 16, 8, 12, 4. Si 16, diuidamus per 12, fit quotiens $1\frac{1}{3}$; ſi verò 8, diuidamus per 4, fit quotiens 2; ſi verò $1\frac{1}{3}$, multiplicetur per 2, fiet numerus productus $2\frac{2}{3}$: modo ſi 16, multiplicemus per 8, producentur 128; his autem diuiſis per 48, numerum productum ex 12, in 4, producetur quotiens $2\frac{2}{3}$, vt patet.

Demonſtratio. Sint numeri B, C, D, E; & quidem D, multiplicans B, producat G; & E, multiplicans C, producat I: diuidatur B, per C; proueniat A: diuidatur D, per E; & proueniat F: multiplicetur A, per F; & producatur H: ſi ducatur H in I, producatur K. Dico K, æqualem eſſe G. Quoniam enim ſunt

	A 14		
B 140			C 10
D 20			E 5
	F 4		
G 2800	H 56		I 50
	K 2800		
D 20	H 56	I 50	B 140

quatuor numeri A, F, C, E, & ſi E, multiplicetur per F, producitur D, toties continebitur E in D, quoties vnitas continetur in F; & quia F, multiplicans A, producit H, toties continebitur A, in H, quoties vnitas in F. Ergo, vt E, ad D, ità A, ad H; & permutando [a] vt E, ad A, ita D, ad H; & quia C, multiplicans A, producit B; quoties vnitas continetur in C, toties A, continebitur in B; & quia C, multiplicans E, producit I; quoties vnitas continetur in C, toties E, continebitur in I. Vt igitur E, ad I, ità A, ad B, & permutando [b], vt E, ad A, ità I, ad B; ſed vt E, ad A, ità eſt D, ad H: ergo, vt D, ad H, ità I, ad B. Sunt igitur proportionales D, H, I, B; proinde numerus factus ex D in B, nimirum G, æqualis erit [c], numero K, facto ex H, in I; quod erat oſtendendum &c.

a 13. ſeptimi. b 13. ſeptimi. c 19. ſeptimi.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina. Sint 6 C, diuidendi per 12 Q: ſupponamus 1 R, valorem eſſe 5: ſi primus 6, diuidatur per tertium 12, prouenit quotiens $\frac{1}{2}$: diuidatur autem ſecundus 125 per 25, fiet quotiens 5; ducatur in $\frac{1}{2}$, fiet numerus productus $2\frac{1}{2}$; ſi multiplicemus 125, per 6, producentur 750; ſi verò 25, per 12, fient 300. At verò diuiſis 750, per 300, emerget pro quotiente $2\frac{1}{2}$, nempe dimidium radicis. Rectè igitur dicebamus, &c. ſi namq; diuidantur 6 C, per 12 Q, proſilit in quotiente $\frac{1}{2}$ R.

6	$\frac{1}{2}$	12
125		15
	5	
750	$2\frac{1}{2}$	300

$$\frac{750}{300} \; 2\frac{1}{2}$$

Additione exponentium recte fieri poteſtatum multiplicationem oſtenditur. Optimè verò fieri diuiſionem poteſtatum ſubtractione exponentium, patet ex eo quia, vt additione fit multiplicatio, ita ſubtractione fit diuiſio: quapropter vt addendo exponentem 2, ad exponentem 3, fit exponens 5, & cenſetur produci primus relatus, in via communi, & quadrato cubus iuxta Diophantum; ita etiam in eadem communi via ſubtrahendo 2, abs 5, remanebit exponens 3, cui reſpondet cubus in vtraq; via, & ſic de reliquis obſeruato diſcrimine inter Diophantum, & alios.

Cum numerum denominatum, per numerum abſolutum, vel per denominatum, tàm ſimplicem, quàm compoſitum diuidere debeamus (per compoſitos intelligo tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & mixtos) habenda eſt ratio ſignorum †, & —: proinde aduertendum eſt, quid agendum circa hæc ſigna.

Diuiſio

Diuiſio Signorum ✣, & —

✣ per ✣, emergit ✣; Hoc eſt, ſi Plus diuidatur per Plus emergit Plus.
— per —, emergit ✣. Hoc eſt Minus ſi diuidatur per Minus emergit Plus.
✣ per —, emergit —. Hoc eſt, Plus ſi diuidatur per Minus emergit Minus.
— per ✣, emergit —. Hoc eſt, ſi Minus diuidatur per Minus, emergit Minus.

Cæterum potius vberioris doctrinæ gratia hæc adiecimus; vt plurimum enim numerus compoſitus per compoſitum diuiſionem non patitur; ſed pro quotiente proſilit fractio, vt infra dicemus.

Si † diuidatur per †.

Et quod ad ſignorum, quæ iam recenſuimus †, & —, diuiſionem attinet; nempè ſi †, diuidatur per †, fieri †, ex ijs fit manifeſtum, quæ ſuperiùs circa multiplicationem in medium attulimus. Cum enim diceremus † in †, efficere †, neceſſe eſt ex diuiſione † per † fieri †.

Si † diuidatur per † fieri † oſtenditur.

Secundò — per — emergere ✣, hoc eſt ſi — per — diuidatur emergere ✣, patet; ſiquidem ducendo — in ✣ concluſimus ſupra produci —; ergo diuidendo — per — emerget ✣. Vt ſi ducantur ✣ 12, in — 3, fiet productum — 36, quibus diuiſis per — 3, emerget pro quotiente ✣ 12. At verò diuidendo ✣ per —, & è contra, produci —, ex eo conſtat; quod ſi ✣ ducatur in —, producitur —, & è contra: ergo — ſi diuidatur per ✣, emerget —; ſic etiam è contra, &c.

Si — diuidatur per — fieri † demonſtratur.
Quando † diuidatur per —, vel contra &c.

Iniunctum ſit diuidere 12 Q ✣ 6 R per 3, fiet quotiens 4 Q ✣ 2 R: diuidantur 16 C ✣ 4 Q per 2 Q, fiet quotiens 8 R ✣ 2: inſuper ſi diuidere debeamus 20 C ✣ 12 Q per 4 R, fiet quotiens 5 Q ✣ 3 R.

Exemplis explicatur ſuperior doctrina.

Cùm autem diuiſor fuerit numerus compoſitus, vt plurimum non poteſt inſtitui diuiſio, ſed in quotiente proſilit fractio; tunc autem diuiſio poterit inſtitui, quando partes diuidendi, ad partes diuiſoris eandem rationem habent; vt ſi diuidere deberemus 12 Q ✣ 8 per 6 Q ✣ 4. Quæ proportio eſt enim 12 Q, ad 6 Q, ea eſt 8, ad 4; proindè quotiens ex hac diuiſione proſiliens erit 2. Ita ſi 12 Q ✣ 18, diuidere deberemus per 4 Q ✣ 6, fiet quotiens 3.

Quando diuiſor fuerit numerus compoſitus.
Quando per numerum cõpoſitum inſtitui poteſt diuiſio.

Prꝫtereà diuidere ſit opus 16 Q ✣ 6 R, per 8 R ✣ 3. Fiet quotiens 2 R; eadem enim eſt proportio 16 Q ad 8 R, quæ eſt 6 R, ad 3: poſſunt etiam alij caſus excogitari, in quibus diuiſio poterit inſtitui, ſed ex ijs facilè deprehendi poterunt.

Cum autem non poteſt fieri diuiſio, abſoluetur fractione. Vt ſit opus diuidere 7 Q ✣ 15 R ✣ 10 per 2 R ✣ 2, fit quotiens $\frac{7\,Q ✣ 15\,R ✣ 10}{2\,R ✣ 2}$. Inſuper diuidantur 10 C ✣ 7 Q per 5 R, fit quotiens $\frac{10\,C ✣ 7\,Q}{5\,R}$. Inſuper diuidantur 3 R ✣ 16, per 2, fit quotiens $\frac{3\,R ✣ 16}{2}$, Item 8 R — 12, per 5, fit quotiens $\frac{8\,R - 12}{5}$.

Quando diuiſio per numerum compoſitum inſtitui nequit, fit fractio.

Contingit etiam fractio, quando numerus denominatus tàm ſimplex, quàm compoſitus, per numerum ſimplicem denominatum appellationis maioris extiterit diuidendus. Vt ſi diuidere deberemus 10 R, per 5 C, fit quotiens $\frac{10\,R}{5\,C}$. Item diuiſis 12 Q, per 6 QC, fiet quotiens $\frac{12\,Q}{6\,QC}$.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.
Quando diuiſor eſt numerus denominatus maioris appellationis.

Supereſt, vt de numeris irrationalibus denominatis verba faciamus &c. In his poſſunt varij contingere caſus, quemadmodum ſuperiùs dictum eſt. Diuidatur numerus per numerum, & quotienti præponatur ſignum radicale illius radicis, quæ diuiditur, &c.

Diuiſio per numeros irrationales.

Si numerum irrationalem per numerum æqualem, ſeu per radicem eiuſdem numeri, & naturæ diuidi debet. Diuidatur radix per Radicem, nàm quotiens erit Vnitas; vt ex diuiſione ℞ 6 Q, per ℞ 6 Q, fit quotiens 1: inſuper diuerſæ denominationis; vt ℞ 7 Q, per ℞ 7 R, fit quotiens 1 R: & ſic de reliquis radicibus naturæ eiuſdem, nempè diuidendo Radicem per Radicem, & dignitatem per dignitatem.

Quãdo numeri irrationale ſũt eiuſdem denominationis, & ſunt æquales.

Si fuerint naturæ eiuſdem, ſed numeri diuerſi, vt ſi diuidere oporteat ℞ 60 Q, per ℞, 5 R, fiet quotiens diuidendo numerum per numerum, & dignitates per dignitates

Quãdo numeri ſũt eiuſde natura at

verò fuerint inæquales, quid agendum.

gnitates; emerget itaq; pro quotiente ℞ 12 R: item ℞ 48 Q, per ℞ 3 R, fiet quotiens ℞ 16 R, hoc eſt, 4 R; ita diuiſa ℞ 80 C, per ℞ 5 R, fit quotiens ℞ 16 Q ſeu 4 Q.

Num dũ numerũ quadramus, etiam dignitatẽ quadrare debeamus.

Sed hic occurrit eadem dubitatio ſuperiùs inſinuata, vtrum dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus. Exiſtimo dignitatem relinquendam eſſe intactam; etenim ℞ 9 R, ducenda ſit in 2 R, fit productum ℞ 36 Q ſeu 6 Q, quod ita declaratur.

Exẽplis enucleatur ſuperior doctrina.

Supponamus 1 R, pretium eſſe 2, erit ergo dicendum ℞ 9 R, eſſe 6, idem eſt enim ℞ 9 R, ac eſt 3 R; inſuper 2 R, erunt 4: itaq; ducendo ℞ 9 R, in 2 R, debet fieri numerus denominatus; qui reſolutus tantum efficiat, quantum numeri illi denominati reſoluti, ſi inter ſe ducantur. Conſtat autem ſi productum ex ℞ 9 R, in 2 R, dicatur eſſe 6 Q, hoc ſi reſoluatur, ſuppoſito 1 R, pretio 2, erit 24. quantum efficiunt numeri denominati ℞ 9 R, & 2 R. reſolutæ ſi ducantur inter ſe, namque 6, ſi ducantur in 4, producunt 24: at ſi quadraremus etiam dignitatem, fieret numerus productus 6 C, quod falſum eſt.

Quando radices ſũt tàm numero, quàm natura diſſimiles.

Si verò radices fuerint, tàm numero, quàm natura diſſimiles, opus eſt illas reducere ad naturam eandem, vt ſuo loco de irrationalibus numeris agentes verba fecimus.

Quãdo numerus per radicem vel è contra.

Quod ſi numerum per Radicem, vel è contra, diuidere debeamus, reuocetur numerus ad radicis naturam. Vt diuidere debeamus 10 Q, per ℞ 20 R, fiet quotiens ℞ 5 R. Sic etiam 6 Q C. per ℞ 3 Q; fit quotiens ℞ 12 C. Item ſi radicem per numerum partiri deberemus, vt ℞ 80 Q, per 2 R, fiet quotiens ℞ 20 R, & ſic de reliquis. Hæc autem numeris abſolutis declarare facillimum eſt, vt patet ex hactenus explicatis.

Quando numeri irrationales fuerint compoſiti.

Verùm cum numeri irrationales fuerint compoſiti, ea ſunt obſeruanda, quæ de huius generis numeris ſuo loco traduntur; ex ijs enim, & quæ modo diximus, facilè dignoſcetur quid agendum: vt etiam de numeris illis, qui dicuntur radices vniuerſales, tàm ſimplices, quàm compoſitæ. Horum enim numerorum diuiſio, ſe habet inſtar diuiſionis numerorum compoſitorum cum poteſtatibus, de quibus ſupra, qui nimirum ligati non ſunt, obſeruata ligatione tamen cum opus fuerit.

Si oporteat diuidere ℞ (20 R) per 2. fit ℞ $(\frac{20\,R}{4})$ &c.

Quæ autem de diuiſione tradita ſunt facile oſtendi poterunt; Et quidem cum numerus dignitate affectus diuidi debet per numerum abſolutum.

Demonſtratio eſt, quoniam, dum iniungitur diuidere numerum dignitate affectum per numerum abſolutum, perinde eſt, ac diuidere planum contentum ſub numero, & ſub dignitatis pretio, hoc autem fit diuidendo latus, reſpondens numero affecto, quotiens enim ductus in pretium dignitatis, exhibet quotientem quæſitum.

Geometricè verò hæc eadem oſtendi poterunt aſcita vnitate; ad quam tamen priùs referre oportet rectangulum propoſitum, vt ſuo loco planum fiet.

Facili etiam negotio, & alij caſus poterunt demonſtrari.

Diuiſionis probatio.

Diuiſionis autem probatio rectè inſtituitur per multiplicationem, quam per diuiſionem comprobari ſuperiùs dicebamus. Comprobari etiam poteſt reſolutione numerorum denominatorum in numeros abſolutos. Vt ſi diuidamus 20 Q, per 4 R, fit quotiens 5 R: reſoluamus 20 Q, in numeros abſolutos, ſuppoſito, R pretio 2, erunt 20 Q (facta reſolutione in numeros abſolutos, vt dictum eſt) idem, quod 80, & 4 R, idem, quod 8, & 5 R, idem, quod 10: diuiſis autem 80, per 8, fit quotiens 10, quantum ſi reſoluatur quotiens 5 R, ſecundum eandem radicem; diuidendus enim numerus denominatus reſolutus, tantum efficere debet diuiſus per diuiſorem reſolutum, quantum quotiens ſecundum eandem radicem pariter reſolutus.

Additio numerorum Arithmetica progreſſionis reſpondet multiplicationi terminorum progreſſionis Geometricæ.

Ex hactenus explicatis perſpicuum remanet, ne dum additionem numerorum Arithmeticæ progreſſionis reſpondere multiplicationi terminorum progreſſionis Geometricæ, vt ſuperiùs innuimus; verùm etiam ſubtractionem diuiſioni. Vt enim ſubtrahendo 4, ex 7, relinquuntur 3, ita diuiſo BSS, per QQ, fit C, in via communi. Ita namq; diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens eſt 7, per QQ, hoc eſt per 16, cuius exponens eſt 4, proſilit numerus 8, nempè C, cuius exponens eſt 3. Et iuxta Diophantum, ſicut ſubtrahendo 4, ex 7, remanent 3, ſic diuiſo QQC, per QQ, proſilit C, & ita de reliquis.

SCHO-

SCHOLION.

AD diuiſionem, quod attinet; nihil amplius dicendum remanet, neque quantum ad ſigna ✠, & —, neque quantum ad poteſtates; & quidem hæc enunciauimus, nimirum plus per plus, ſi diuidatur emergit plus; & ſi minus diuidatur per minus euenit plus. Quod ſi plus per minus diuidatur prouenit minus. Si deniq; minus per plus diuidatur, emergit minus; Quæ ex ſupra iam oſtenſis deduximus; atq; etiam de Poteſtatibus loquentes, pauca illa protulimus; Si fuerint quatuor numeri &c.

Videor nonnulla paulò obſcuriùs explicaſſe; in gratiam Tyronum, libet quædam aduertere. Cùm itaq; ſupra diceremus radices natura, numeroq; ſimiles, duplicandas, triplicandas, &c. ſeù multiplicandas per 2, per 3, &c. id intelligendum eſt iuxta Radicum numerum. Si fuerint duæ, multiplicentur radices per 2, ſi tres per 3, & ita deinceps. Hoc autem fieri debet reducto numero in quem ducuntur, ad naturam radicis. Si radices fuerint quadratæ debet numerus 2, vel 3, vel 4. &c. quadratè multiplicari. Si radices fuerint cubicæ, debent cubicè multiplicari, &c. pro vt ſuo loco de numeris ſurdis egimus. Inſuper cum dicebamus, quando numerus irrationalis addendus eſt irrationali commenſurabili; oportere radicem in radicem ducere, & producti latus duplicare, mox addendum hoc eſſe ad ſummam illorum numerorum, & numero emergenti ſignum radicale præfigendum eſſe, & characterem apponendum ſenſus eſt; vt ſi ad ℞ 20 R, addere ſit opera pratium ℞ 5 R, multiplicentur inter ſe, & fiet 100, cuius latus quadratum eſt 10, huius duplum 20, addatur ad 25, ſummam ex 20, & 5, & fiet ſumma 45, cui præponatur ſignum ℞ Q, & apponatur R. erit ſumma radicum propoſitarum ℞ 45 R: hoc intelligendum eſt de radicibus quadratis. De numeris autem ſurdis ſuo loco egimus: de cæteris verò radicum generibus, alia eſt obſeruanda regula, quæ etiam radicibus quadratis inſeruit, & generaliſſima eſt,

Quæ paulò obſcurius tradita ſunt hic maximè declarãtur, & exēplis præcipuè illuſtrantur.

Additionis doctrina magis declaratur.

Nempè reperire oportet communem diuiſorem per quem diuiſis numeris ſurdis addendis à quotientibus extrahantur latera iuxtà radicum naturam, & hæc in vnam ſummam colligantur; mox multiplicetur in ſe quadratè, vel cubicè &c. iuxtà radicis conditionem, & productum ducatur in communem diuiſorem: nam ſi producto numero ſignum radicale præponatur, & eidem apponatur character poteſtatis, habebitur ſumma quæſita. Vt ſi proponantur ſuperiores radices ℞ 20 R, & ℞ 5 R; communis diuiſor horum numerorum 20, & 5, eſt 5, hic enim diuidens 20, facit quotientem 4, & 5, diuidens 5, facit quotientem 1, horum latera quadrata 2, & 1, quorum ſumma 3, ſi quadratè multiplicetur fiunt 9: modo hic numerus ducatur in 5, communem diuiſorem, & fiunt 45; præponatur ſignum radicale, & apponatur character, fit ſumma ℞ 45 R, vt priùs. Inſuper propoſita ſint ℞ 20 R, & ℞ 45 R, communis diuiſor eſt 5, qui diuidens 20, facit quotientem 4, & diuidens 45, facit quotientem 9. Horum latera ſunt 2, & 3, quorum ſumma 5, huius quadratum eſt 25, quo multiplicato per 5, communem diuiſorem, producitur numerus 125, cui præpoſito ſigno radicali, & appoſito charactere, erit ſumma quæſita ℞ 125 R, quæ etiam habetur alio modo ſuperiùs explicato.

Methodus generaliſſima pro omnibus radicibus.

Si proponatur ℞ C 81 R, & ℞ C 24 R, communis reperiatur diuiſor, nempè 3, qui diuidens 81, facit quotientem 27, diuidens 24, facit quotientem 8, quorum latera cubica ſunt 3, & 2, horum ſumma 5, huius cubus eſt 125, hic multiplicetur per 3, communem diuiſorem fient 375: dicemus itaq; ex ℞ C 24 R, ad ℞ C 81 R, fieri ℞ C 375 R, & ita de cæteris.

Alia exēpla ad adem illuſtranda præcepta.

Quod de additione dicimus, de ſubtractione ſuo modo intelligendum eſt. Per primum modum, pro radicibus quadratis, ducantur ad inuicem, & productum latus duplicetur, hoc ſubtrahatur à ſumma numerorum ſurdorum, & reſiduo præpoſito ſigno radicali, & appoſito charactere habetur reſiduum quæſitum. Vt ex ℞ 45 R, ſubtrahere ſit opus ℞ 5 R, ducantur inter ſe, fiet numerus 225, cuius latus quadratum eſt 15; huius duplum 30, ſubtrahatur ex 50, nimirum à ſumma ex 45, & 5, & reſiduo 20. præpoſito charactere ℞, & poſtpoſito R, fiet pro reſiduo quæſito ℞ 20 R, & ita de reliquis. Si verò Radices fuerint cubicæ, vel aliæ alterius generis, &c. obſeruetur ſecundus modus.

Subtractionis præcepta explicantur.

Exemplis explicatur ſuperior doctrina. Quādo radices ſunt quadratæ.

Proponatur

Digitized by Google

Quando radices ſunt cubica, vel cuiuſq; alterius generis,

Preponantur ℞C 135 R, & C℞ 625 R, communis diuiſor eſt 5, qui diuidens 135, facit quotientem 27, & diuidens 625, facit 125, quorum latera cubica ſunt 3, & 5; horum interuallum 2, cubicè multiplicetur, & fiet numerus 8, multiplicetur per 5, communem diuiſorem, & producetur numerus 40, cui præpoſito ſigno radicali, & poſtpoſito charactere, fiet reſiduum quæſitum ℞ C 40 R, & ita de reliquis.

Quando ſūt numeri irrationales compoſiti,

Cum diceremus obſeruandam eſſe legem numerorum ſurdorum, tractantes de numeris irrationalibus compoſitis, & de radicibus vniuerſalibus, tàm ſimplicibus, quam compoſitis, remiſimus Lectorem, ad tractatum noſtrum de huiuſmodi numeris, adhibitis præceptis ſignorum ✠, & —. Itaq; ſi ad ℞ 24 R ✠ ℞ 20 R, addere deberemus ℞ 6 R ✠ ℞ 5 R, fiet ſumma ℞ 54 R ✠ ℞ 45 R. Item ad ℞ 40 R ✠ ℞ 20 R, addere debeamus ℞ 10 R — ℞ 5 R, fit ſumma ℞ 90 R ✠ ℞ 5: nam ex ℞ 10 R, ad ℞ 40 R, fit ſumma ℞ 90 R, & ex — ℞ 5 R, ad ✠ ℞ 20 R, fit ✠ ℞ 5 R; etenim — ad ✠, ſubtrahitur, & notatur maius, &c. ita de reliquis radicum generibus intelligere oportet.

Subtractionis præcepta explicantur.

Eodem modo ſentiendum eſt ſuo modo de ſubtractione. Si ſint Radices vniuerſales, eaq; ſimplices, vt ex ℞ (12 R), & ℞ (3 R) fit ſumma ℞ (27 R): ſiquidem communis diuiſor eſt 3, qui diuidens 12, facit quotientem 4, & diuidens 3, facit quotientem 1, horum latera quadrata ſunt 2, & 1, quorum ſumma eſt 3, cuius quadratum eſt 9, quod ſi ducatur in 3, communem diuiſorem, producetur 27: itaq; ſumma quæſita erit ℞ (27 R). Inſuper eodem pacto ex ℞ C (40 Q) ad ℞ C (135 Q) fit ſumma ℞ C (625 Q): nam communis diuiſor eſt 5, qui diuidens 40, facit 8, diuidens autem 135, facit 27, horum latera cubica ſunt 2, & 3, quorum ſumma ſcilicet 5, cubus eſt 125, ducatur hic numerus 125, in 5, communem diuiſorem, & fit 625, & ita erit quæſita ſumma ℞ C (625 Q): eadem arte procedendum eſt in reliquis.

Exempla quibus ſuperior doctrina explicatur.

Quæ de additione dicta ſunt etiam de ſubtractione ſunt intelligenda,

Quod de additione diximus, ſuo modo de ſubtractione intelligendum eſt, vt ex ℞ (27 R) ſubtracta ℞ (12 R) remanet ℞ (3 R): nam communis diuiſor eſt 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 12, facit 4, quorum latera quadrata ſunt 3, & 2, horum differentia eſt 1, cuius quadratum eſt 1, ducatur in 3, communem diuiſorem, fit numerus 3: itaq; ℞ (3 R) erit reſiduum quæſitum. Et ex ℞ C (750 Q) ſubtracta ℞ C (48 Q) fit reſiduum ℞ C (162 Q): communis enim diuiſor eſt 6, qui diuidens 750, facit 125, & diuidens 48, facit 8, quorum latera cubica ſunt 5, & 2, horum differentia eſt 3, cuius cubus eſt 27, qui ſi ducatur in 6, communem diuiſorem, producuntur 162, &c. & ita de reliquis radicum generibus.

Quando radices ſunt vniuerſales compoſita, & commenſurables earū additio explicatur,

Inſuper ſi radices extiterint vniuerſales compoſitæ, & commenſurabiles, vt ex ℞ (27 C ✠ 45 R) ad ℞ (48 C ✠ 20 R) fit ſumma ℞ (147 C ✠ 125 R): etenim communis diuiſor numerorum, qui afficiuntur C, eſt 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 48, facit 16, quorum radices ſunt 3, & 4, horum ſumma eſt 7, cuius quadratum 49, ſi ducatur in 3, communem diuiſorem fiet numerus 147, & erit numerus cuborum: deinde quoad numeros radicum; Communis diuiſor eſt 5, qui diuidens 45, facit 9, & diuidens 20, facit 4, quorum radices ſunt 3, & 2, ſumma horum numerorum eſt 5, cuius quadratum 25, ſi ducatur in 5; communem diuiſorem, fit numerus radicum 125, & ✠, ad ✠, facit ✠; ob id erit ſumma quæſita ℞ (147 C ✠ 125 R): eodem pacto in reliquis radicum generibus, habita ſemper animaduerſione ſignorum ✠, & —.

Explicatur ſubtractio radicum vniuerſalium,

Quod autem de additione diximus; facilè poteſt etiam applicari ſubtractioni, adeò vt non ſit opus vlteriori declaratione. Itaq; ſi ℞ (175 C ✠ 20 R) ſubtrahatur ex ℞ (252 C ✠ 80 R), fiet reſiduum ℞ (7 C ✠ 20 R): & ex ℞ C (1512 Q — 320 R) ſubtracta ℞ C (875 Q — 40 R), fit reſiduum ℞ C (7 Q — 40 R): etenim numerorum qui Q, afficiuntur communis diuiſor eſt 7, qui numerum 1512, metitur per 216, & numerum 875, metitur per 125; at verò ℞ C, numeri 216, eſt 6, vt numeri 125, eſt 5, hoc ex illo ſubtracto remanet 1, cuius cubus eſt 1, ducatur hic in 7, communem diuiſorem, & producentur 7 Q: communis diuiſor numerorum, qui afficiuntur R, eſt 5, qui numerum 320 metitur per 64, & numerum 40, metitur per 8; at verò ℞ C numeri 64, eſt 4, vt numeri 8, eſt 2, hic ſi ſubtrahatur ex 4, remanet numerus 2, cuius cubus eſt 8, qui ductus in 5, communem diuiſorem facit 40 R; & fit —, cum ex — ſubtrahatur —: ob id reſiduum erit ℞ C (7 Q — 40 R). Item ex ℞ (75 C ✠ 18 R) ſubtracta ℞ (48 C ✠ 32 R) remanet ℞ (3 C — 2 R), obſeruatis præceptis ſignorum ✠, & —. Cæterum vnuſquiſq; poterit præceptorum veritatem intueri, reducendo exempla numerorum denominatorum ad numeros abſolutos.

Aduer-

Digitized by Google

Aduertendum autem, quando loquentes de radicibus vniuerſalibus ſimplicibus, dicebamus numeros claudendos intra parentheſim; non reddi ſenſum per huiuſmodi incluſionem, vt radix ſit extrahenda coniuncti: ſed quòd latus, ſeù radix vnius tàm ſcilicet numeri, quàm dignitatis, loquendo de additione, intelligatur addita lateri alterius, ſcilicet tàm numeri, quàm dignitatis, ſi nimirum radix vniuerſalis ſimplex, radici quoq; vniuerſali ſimplici addi debet. Quamobrem ſi ad ℞ (18 C) addere deberemus ℞ (9 C) fit ℞ (18 C + 9 C) cuius ſenſus eſt, vt radix tàm numeri, quàm dignitatis ipſius 9 C, addita ſit ipſius 18 C, radici, tàm numeri, quàm dignitatis; Ad 18 C, ſiquidem non addimus 9 C, nàm fieret ſumma 27 C, neque ad ℞ 18 C, addimus ℞ 9 C, ſed ad ℞ (18 C) addimus ℞ (9 C) hoc eſt enim addere radicem vniuerſalem, ſiuè ligatam ad ligatam; neq; eſt ſenſus, vt ſumma ſit latus illius compoſiti. Quod per analyſin in numeros abſolutos perſpicuum fiet. Sit opus ad ℞ (18 C) addere ℞ (8 R): ſit 1 R, pretium 2, ergo C, erit 8, quamobrem 18 C, valebunt 144, huius autem ℞ eſt 12; inſuper 8 R, valebunt 16, cuius ℞ eſt 4; at verò ex 12, & 4, fit 16. Itaq; ſi ex ℞ (18 C) & ℞ (8 R) dicamus fieri ℞ (18 C † 8 R); ſenſus erit, vt latera illarum radicum vniuerſalium, intelligantur in vnam ſummam collecta, non quod ſumma illarum radicum, ſit radix illius compoſiti ex 18 C, & 8 R, ſiquidem radix hac eſſet ℞ 160: conſtat autem ex additione illarum radicum vniuerſalium ſimplicium, nempe 12, & 4, non fieri ℞ 160, ſed 16; Si quis autem ad euitandam aquiuocationem, vti vellet commatibus ſuis debitis locis, opportunè ageret: ita vt hoc modo ſcribatur ſuperius exemplum ℞ (18 C, †, 8 R): & ita de reliquis exemplis intelligendum eſt.

Annotatio circa ea, qua hactenus dicta ſunt de radicibus vniuerſalibus ſimplicibus.

Exemplis elucidatur ſuperior doctrina

Si verò ℞ (12 𝒬 † 8 R) addere deberemus ad ℞ (3 𝒬 † 2 R): certè ſumptis radicibus iſtis, tanquam vniuerſalibus, ſiue ligatis compoſitis, fiet ſumma ℞ (27 𝒬 † 18 R.) Hoc autem innoteſcet reſolutione horum numerorum in numeros abſolutos: nam ſi ſupponamus 1 R, pretium eſſe 2, ergo trium quadratorum pretium erit 12, & duarum radicum pretium erit 4, ob id 3 𝒬 † 2 R, valebunt 16, quamobrem ℞ (3 𝒬 † 2 R) valebit 4. At verò eodem radicis pretio exiſtente 2, certè 12 𝒬, valebunt 48, & 8 R, valebunt 16, horum ſumma eſt 64, proinde 12 𝒬 † 8 R, valebunt 64, huius radix quadrata eſt 8. Itaque ℞ (12 𝒬 † 8 R) valebit 8; At ſi 4, valor ipſius ℞ (3 𝒬 † 2 R) addatur ad 8, valorem ipſius ℞ (12 𝒬 † 8 R) fit 12, quantum ſanè eſt pretium ipſius ℞ (27 𝒬 † 18 R): Nam 27 𝒬, valebunt 108, & 18 R, valebunt 36, at verò ex 108, & 36, fit numerus 144, cuius radix quadrata eſt 12, itaq; pretium ipſius radicis ligata ℞ (27 𝒬 † 18 R) erit 12.

Adſigna + & — quod ſpectat, aduerte propoſitiones à nobis indefinitas prolatas; Si manis illas ad ſpeciales numeros expreſsè coarctare, ne dicas ſi ſint duo numeri &c. Sed ſi ſint duo quidam numeri &c. ita, ne dicas duorum numerorum; ſed duorum quorundam numerorum differentia &c. Nota igitur ſi placet, ac diligenter aduerte propoſitionem illam ſuprapoſitam; Si ſint duo numeri inæquales &c. Intelligendam eſſe, cum numerus minor è duobus differentibus, confertur, cum parte numeri diuiſi, ita vt numerus ſit minor parte, Alioquin, ſic erit enuncianda. Si ſint duo quidam numeri inæquales, quorum differentia, numero diuiſo addi debeat; idem eſt de minore, ex duobus differentibus, minuere partem, qua eſt minor ipſo numero, & differentiam detrahere ab aggregato ex alia parte, & numero maiori &c. ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum diuiſum.

Cũ terminus minor afficitur ſigno —, maior +.

Vt ſi ſit 60 + 40, cui addere oporteat 92 — 50, idem eſt addere 92 ad 60, & ex aggregato 152, ſubtrahere 10, differentiam. qua 50, ſuperat 40, vt remaneat 142, ac addere 42, differentiam inter 92, & 50, ad 100, aggregatum ex 60 & 40.

Si maior afficitur ſigno — & minor +.

Ita propoſitio altera; Si fuerit numerus quiſpiam vtcunque diuiſus &c. intelligi debet cum minor è duobus differentibus confertur cum parte numeri diuiſi, qua ſit maior ipſo numero, vt cum ad 60 + 40 addere debeamus 32 — 15, fit enim 92 + 25.

Alioquin ſi pars fuerit minor, ſic enunciabitur. Si fuerit numerus quiſpiam vtcunq; diuiſus, & ei adlatur numerorum quorundam differentia, ſumma æqualis erit aggregato, ex numero maiori è duobus differentibus, ex altera parte numeri diuiſi, multatus differentia inter partem alteram numeri diuiſi, & minorem è duobus differentibus.

Vt ſi ſit 60 + 40, cui addi debeat 92 — 50, vt fiat 152 — 10, vel 60 + 40, cui addi debeat 92 — 70. Vt fiat 152 — 30. Vel 40 + 60, cui addi debeat 92 — 70; Vt fiat 132 — 10. Hinc ad huc tamen inoteſcit præcepti veritas.

Ad ſubtractionem, quod attinet. Plures caſus attulimus, vt cum ex 60 + 10, ſubtrahi debet 40 — 7, vt remaneat + 20 + 17, cum nempe numerus minor è duobus diffe-

Afficitur ſymbolo —, at maior à quo fit ſubtractio notatur ſigno +. *rentibus, confertur cum parte numeri diuiſi, itaut pars, ſit maior numero, & numerus maior è duobus differentibus confertur, cum parte numeri diuiſi, itaut etiam pars ſit numero maior.*

Alioquin in alijs caſibus, ſua debent enunciationes efformari quas induſtriæ Lectoris relinquimus. Ex ijs tamen, quod intenditur, confirmabitur.

pag. 40. v. 20. Explicantur ſuperius dicta. *Vnde propoſitio illa. Si duo numeri vtcunque diuiſi fuerint &c. intelligenda eſt quando terminus affectus ſigno + fuerit minor, eo, qui eodem afficitur ſigno, à quo fieri debet ſubtractio. Alioquin aliter enuncianda erit. Vt ſi ex 60 + 48, ſubtrahi debet 10 + 62; remanet enim 50 — 62; nam + à + ſubtrahitur, & remanet + termino ſuperiori exiſtente maiori, aliàs remanet —. Alia igitur enunciabitur propoſitio, huic ςυμπτώματι conſentanea, ex qua intelliges rectè operationem inſtitui auferendo partes; à partibus.* *Ad retentionem ſignorum + & — quod ſpectat. Propoſ. illa; Si fuerint duo numeri vtcunq; diuiſi; atq; adeo intercedat ſigno + &c. intelligenda eſt cùm terminus ſubtrahendus, fuerit minor eo, à quo fieri debet ſubtractio, & vterq; afficitur ſigno +. Alioquin ſi terminus ſubtrahendus fuerit maior, aliter enunciabitur. Vt ſi ex 60 + 48, ſubduci debeat 10 + 62. Fit reſiduum 50 — 14; Hoc enim ςύμπτωμα. ſuam habet conſentaneam enunciationem; vt conſtat: Vde innoteſcit retinendum eſſe ſignum + ſuperiori termino exiſtente maiori, alioquin remanere —. Sic etiam, & propoſitio illa; Si duæ ſint differentiæ &c. intelligi debet vt diximus &c.*

pag. 40. v. 31. Explicantur quæ ſupra dicta fuerunt.

pag. 40. v. 35.

p. 41. v. 31. Supra dictorum explicatur. *Deniq; Illa. Si fuerit numerus vtcunq; diuiſus, & duo numeri differentes &c. intelligenda eſt, cum reſiduum ſubtrahi debet a compoſito &c. Alioquin ſuam habet diuerſam enunciationem, vt ſi ex 40 — 7, auferri debeat 20 + 10; remanet enim 20 — 17; ergo ſummatim, vt hæc proferantur; & primò pro Additione.*

In additione caſuum ſufficientia.

60 + 40	60 — 40	60 + 40	60 + 40
92 + 50	92 — 30	92 — 30	92 — 50
152 + 90	152 — 70	152 + 10	150 — 10

Vel enim terminus addendus afficitur eodem ſigno, quo is, cui fit additio, vel diuerſo; Si primum, vel ſigno + vel — vterque eſt affectus. Si ſecundum vel addendus afficitur —, & is cui fieri debet additio + aut contra, & vtroq; modo vel addendus eſt minor, vel maior, eo cui debet addi &c.

Pro ſubtractione.

Idem in ſubtractione.

60 + 25	60 — 24	80 + 20	90 — 20	80 + 20	110 + 20
20 + 10	20 — 15	30 + 25	50 — 30	48 — 10	42 — 25
40 + 15	40 — 9	50 — 5	40 + 10	32 + 30	68 — 45

Aut vterq; terminus afficitur eodem, aut diuerſo ſigno. Si primum vel + vel —; At vtroq; modo, vel ſubtrahendus eſt minor, vel maior eo, à quo fit ſubtractio. Si diuerſo vel +, eſt ſupra, vel infra. Vtroq; modo vel ſubtrahendus eſt minor, vel maior &c. ſed de hoc ſignorum Algorithmo, Geometricè in ſpecioſa, diſſeremus, præcepta quæ demonſtrabimus.

APPENDIX.

TAm etſi nimium ſuperiùs, de radicibus vniuerſalibus ſimplicibus, egerimus; tamen argumenti quidem amplitudo nos ad iterum eadem de re ſcribendum compellit; Non me latet ab Euripide rectè vſurpatum illud fuiſſe.

Παῖδες, σοφοῦ πρὸς ἀνδρὸς, ὅστις ἐν βραχεῖ
πολλοὺς λόγους οἷός τε συντέμνειν καλῶς.

Non ſemper tamen res de qua diſſeritur, ſermonis breuitatem permittit; plerumq; cum tot implicata ſit difficultatibus, vt paucis peſtringi minime patiatur.

Primum tamen in gratiam ſupradictorum mihi lector eſt admonendus, vt nomine lateris cùm à nobis nulla adiuncta denominatione prolatum illud fuerit, ſemper latus quadratum intelligat,

intelligat,

Digitized by Google

intelligat, vt initio, cùm ſcribitur ℞ nullo charactere appoſito, quadratam radicem, intelligendam eſſe notauimus.

Iuuabit inſuper aduertere ſuperiùs à nobis demonſtrationes allatas, fuiſſe ad operationes perficiendas, cùm ſermo fuerit de radicibus vniuerſalibus quadratis numerorum dignitatis aliquo genere affectorum; ſiue inter eas, exerceri debeat additio, vel ſubtractio; ſiue multiplicatio, vel diuiſio. Idq; non inconſultò factum à nobis fuit, quoniam hunc in modum, faciliùs hæc percipi poſſe exiſtimauimus. Et quidem tradidimus generalem methodum, additionis, & ſubtractionis; ſed radicibus quadratis tantùm applicatam.

Nomine lateris, abſolutè prolati intelligendum eſt latus quadratum.

Omnia tamen aptari commodè poſſunt, radicibus cuiuſcunq; generis. Itaq; ſi primum, quod attulimus Lemma, ad Arithmeticam demonſtrationem de Additione tractantes, ad cubicas radices transferre velimus; ſic enunciabitur.

Generale præceptū traditū eſt, ſed quadratis radicibus tātum applicatū facilitatis gratia.

Hic ad aliarū radicū genera quomodo trāſferendū oſtēditur.

L E M M A.

SINT duo numeri A, B, qui multiplicati per C, producant E, G, ipſorum autem A, & B, latera cubica ſint L, M, quorum aggregatum ſit D; latera autem cubica ipſorum E, G. Sint F, H, quorum aggregatum ſit I. Cuius cubus ſit X; at cubus ex D, ſit T. Oſtendendum eſt eſſe, vt C; ad vnum, ita X, ad T.

A 64		B 1728
L 4	D 16	M 1 2
E 512	C 8	G 13824
F 8	I 32	H 2 4
	X 32768	
	T 4096	

Quandoquidem C, multiplicans A, & B; fecit E, & G, erit [a], vt A, ad B, ita E, ad G, & proindè vt L, ad M, ita F, ad H, [b], & componendo vt [c], L plus M, hoc eſt D, ad M, ita F, plus H, hoc eſt I, ad H; & permutando [d], vt D, ad I, ita M, ad H, ſeu L, ad F. At verò A, ad E, triplicatam habet [e], rationem, eius quàm habet L, ad F, ergo A, ad E, etiam habebit [f] triplicatam rationem, eius, quæ eſt D, ad I; At verò A, ad E, eſt [g], vt vnum ad C, ergo vnum ad C, habebit [h], triplicatam rationem eius quæ eſt D, ad I; Sed T, ad X, habet [i], triplicatam rationem eius quæ eſt D, ad I, eſt enim T, cubus pſius D, & X, cubus ipſius I; ergo T, ad X, habebit [k], rationem, quam habet vnum, ad C; atq; adeo conuertendo [l], vt C, ad vnum, ita erit X, ad T.

a 17. ſeptimi.
b. ex Elementis.
c. Schol. prop. 22. ſeptimi.
d. 13. ſeptimi.
e. 12. Octaui.
f. Lemma 14. ſeptimi.
g. ex definitione multiplicationis.
h. Lemma 14. ſeptimi.
i. 12. Octaui.
k. Lemma 14. ſeptimi.
l. Schol. 22. ſeptimi.

Sed ad vniuerſalem formam redactum ſic enunciabitur.

SI duo numeri per quendam numerum multiplicati, duos numeros effecerint, poteſtas aggregati, ex lateribus iſtorum numerorum, ad poteſtatem aggregati, ex lateribus illorum, rationem habebit, vt numerus multiplicans ad vnum.

Intellige autem de aggregato laterum, quæ ab illa poteſtate denominantur.

Idem ad generalem formam redactū.

Non diſſimiliter ratiocinandum eſt, de ſecundâ huius Lemmatis parte, & de Lemmate ſecundo, atq; demum de Theoremate ipſo &c.

Quod autem de additione diximus, de ſubtractione ſuo modo intelligendum erit; Atq; adeo, Lemma illud, ad radices cubicas facilè transferri poterit, vt.

SINT duo numeri A, & B, quorum latera cubica ſint R, & S. Horum autem differentia ſit I, &c.

Diuiſis autem A, B, per K, &c.

De fractionibus, ſiuè minutijs numerorum denominatorum, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT IV.

Operationes occurrentes in fractionibus numerorum denominatorum.

NVmeri quoq; denominati ſuas habent fractiones ſiuè, minutias, quemadmodum, & vulgares; de his hæc agendum ſupereſt: circa quas ferè eædem operationes occurrunt, quæ circa fractiones numerorum vulgarium; additis præceptis numerorum integrorum denominatorum, de quibus jam ſuperiùs egimus, quantum nimirum ad characteres ipſos, & quoad ſigna $+$, & $-$ ſpectat.

Quo pacto numerentur fractiones numerorum denominatorum.

Numerantur autem hoc modo, exempli gratia $\frac{12}{15\,R}$, ſignificat duodecim vnitates diuiſas eſſe per quindecim radices; & $\frac{10\,R}{50}$, denotat decem, & octo radices diuiſas eſſe, per quinquaginta; $\frac{12\,QC + 10\,QQ}{7\,Q}$, ſignificat numerum 12 QC $+$ 10 QQ, diuiſum eſſe per 7 Q; præterea $\frac{20\,C + 16\,R}{5\,Q + 3\,R}$, ſignificat hunc numerum 20 C $+$ 16 R, diuiſum eſſe per 5 Q $+$ 3 R, & ita de reliquis, & pronunciantur ſuo modo &c.

Operationes fractionũ, quæ & quot.

Harum autem fractionum operationes hæ ſunt, Abbreuiatio, tàm numerorum, quàm characterum, Reductio ad eundem denominatorem, & præterea Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio.

Fractionum abbreuiatio quoad numeros.

Abbreuiatio fractionum, quoad numeros fit non diſſimili modo, ac fit in minutijs vulgaribus, vt fractio iſta $\frac{10\,Q}{15\,C}$, quoad numeros, ad hanc reuocatur $\frac{2\,Q}{3\,C}$; & hæc $\frac{16\,Q}{4\,QC}$ ad hanc $\frac{4\,Q}{1\,QC}$, & ita de reliquis. Ita quoq; $\frac{24\,QC + 16\,Q}{64}$ ad hanc $\frac{3\,QC + 2\,Q}{8}$; vel $\frac{24\,QC - 16\,Q}{64}$, ad hanc reuocabitur $\frac{3\,QC - 2\,Q}{8}$.

Abbreuiationis ars quoad numeros, in quo conſiſtat.

Huius autem abbreuiationis ars, quoad numeros in hoc conſiſtit; nempè in inuentione maximæ communis menſuræ: idq; fit eo modo, quo fieri demonſtratur in Elementis.

Datis duobus numeris non primis inter ſe maximam eorum exhibere menſuram.

Datis enim duobus numeris non primis inter ſe, ipſorum oportet maximam exhibere menſuram. Subtrahatur minor ex maiori, quoties fieri poteſt, & numerus reliquus ſubtrahatur ex minori, & ita deinceps, minor ſemper ex maiori ſubtrahatur alterna detractione, quoad in numerum perueniatur, qui præcedentem metiatur; etenim ſi ad vnitatem perueniretur, numeri propoſiti eſſent inter ſe primi contra hypotheſim. Modò reperiatur maxima communis menſura Numeratoris, & Denominatoris arte iam dicta, & factum erit, quod oportet. Subtrahatur à Denominatore Numerator, quoties fieri poteſt, & ſi quiſpiam relinquitur numerus, hic ſubtrahatur à numeratore, & ſi rurſus quiſpiam relinquitur, hic ſubtrahatur ab ipſo reſiduo, & ita deinceps donec perueniatur ad numerum, qui nihil in ſubtractione ipſa relinquat, ſed reſiduum numerum metiatur: hic erit maxima communis menſura.

Sint numeri A B, C D, ſubtrahatur C D, ex A B, relinquatur E B: hic ſubtrahatur ex C D, & remaneat F D, communis maxima menſura duorum A B, C D.

A.........E.....B
C.....F...D

Superior doctrina declaratur exẽplo.

Sit fractio $\frac{8}{22}$; ſubtrahatur 8, quoties fieri poteſt, nempè bis ex 22, remanebunt 6, quibus ſubtractis ab 8, remanent 2; itaq; dicemus 2, eſſe maximam communem menſuram; ac proinde diuiſis 8, & 22, per 2, fient quotientes 4, & 11, Quotiens autem numeratoris ſit numerator, & denominatoris, denominator: hæc emerget fractio illi æqualis $\frac{4}{11}$. Modus hic habetur apud Euclidem lib. 7. prop. 2. & modus, quo inueniri poſſit maxima menſura trium, aut plurium numerorum, colligitur ex prop. 3. eiuſdem libri: quod autem ope ſubtractionis facimus, idem diuiſionis beneficio conſequimur.

Operatio abbreuiationis fractionũ cõſi carum oſtenditur.

Demonſtratio facilis eſt, ad numeros enim quod attinet, Cùm minutiæ propoſitæ numeri per eundem numerum diuidantur, nimirum per maximam eorum communem menſuram, eadem erit proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuiſos.

Cùm

Cùm ergo per eundem numerum inſtituatur diuiſio dum fit abbreuiatio, ob id erit eadem proportio; quamobrem illæ fractiones erunt æquales; quandoquidem ſi ſint duæ minutiæ quarum denominatores, eandem habeant rationem ad numeratores ſunt inter ſe æquales, cùm eandem habeant proportionem ad vnitatem.

Hæc autem abbreuiatio ſic oſtenditur. Sint nnmeri A, B, non primi inter ſe (ſi namq; primi eſſent, vtique minutia A B, eſſet in minimis terminis conſtituta, neq; ad minores poſſet reuocari) ſitq; eorum maxima communis menſura C, quæ quidem metiatur A, per D, & B, per E. Dico iam minutiam D E, cuius eſt numerator D, & denominator E, eſſe æqualem datæ minutiæ A B, atq; in minimis terminis eſſe conſtitutam. Cum enim C, metiatur A, per D, & B per E; producentur [a] quidem A, B, ex C, in D, & E; quamobrem, vt A, ad B, ita erit [b] D, ad E; atque adeo minutiæ A B, D E, erunt inter ſe æquales; cum illæ minutiæ; quarum numeratores, ad denominatores eandem habent proportionem, ſint inter ſe æquales, vt alibi oſtendimus. Quia autem C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E, erunt proinde ex Corollario prop: 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B, quod propoſitum erat. *Demōſtratio.*

A 18	D 3
B 24	E 4
C 6	

[a] 29. pronūciat ſeptimi.

[b] 17. ſeptimi.

Abbreuiatio characterum fit detrahendo exponentes minoris characteris, ab aliorum characterum exponentibus; & reliquis numeris tribuendo proprios characteres. Exempli gratia, hæc fractio $\frac{12Q}{18QQ}$, hoc modo abbreuiabitur. Primò quod ad numeros attinet; reuocabitur ad hanc $\frac{2}{3}$, vt patet ex præceptis traditis. Quod ad characteres ſpectat Subtrahatur 2, exponens charecteris Q, numeratoris à 4, exponente characteris QQ, denominatoris, & reſiduo 2, tribuatur character Q, tanquam proprio exponenti, quo affici denominatorem pronunciabimus; ita vt fractio ſit $\frac{2}{3Q}$. Ita $\frac{15C}{35QC}$ ad hanc reuocabitur $\frac{1}{5Q}$; & hæc $\frac{12Q+3R}{6R+4Q}$, reuocabitur ad hanc $\frac{12R+3}{6+4R}$; & ita de ſingulis; quo fit, vt numerus minoris characteris fiat in hac abbreuiatione abſolutus. Inſuper fractionem, in qua extat numerus abſolutus non poſſe abbreuiari, quo ad characteres, ex hactenus explicatis perſpicuum eſt. Vt hæc fractio $\frac{6}{24QC}$, non poteſt abbreuiari, quo ad characteres; licet quoad numeros nihil prohibeat: ob id ipſa ad hanc reuocabitur $\frac{1}{4QC}$. At verò fractio iſta $\frac{6Q}{5QC}$, quoad characteres reducetur ad hanc $\frac{6}{5QQ}$ in via communi, & iuxta Diophantum ad $\frac{6}{5C}$. *Abbreuiatio characterum, qua arte fiat.*

Supponamus 1 R, pretium eſſe 2: ob id fractio illa $\frac{6Q}{5QC}$, valebit $\frac{24}{320}$; atque adeo ſi reducatur ad $\frac{6}{5QQ}$, cum hæc valeat $\frac{6}{80}$, ſeu $\frac{3}{40}$, quæ equalis eſt priori fractioni $\frac{24}{320}$, benè ſe habebit reductio: ſuppoſito, quod characteris QC, exponens ſit 6, vt in via communi. Si verò iuxta Diophantum ſupponamus illius characteris QC, exponentem eſſe 5: dum radix eſt 2, quadratocubus erit 32; atque adeò illa fractio $\frac{6Q}{5QC}$, valebit $\frac{24}{160}$ dumque reducitur ad $\frac{6}{5C}$, hæc cum valeat $\frac{6}{40}$, & hæc fractio ſit æqualis illi $\frac{24}{160}$; benè etiam ſe habebit operatio reductionis. Quod ſi per QC, intelligamus CC, iuxta Diophantum, eadem reductio continget, ac ſupra iuxta communem viam. Cæterum quoad numeros nequit fieri reductio, *Quæ hactenus dicta sūt, explicantur.*

Hæc autem $\frac{12Q}{4QC}$, reducetur ad hanc $\frac{12}{4QQ}$, ſi exponens QC, ſit 6, ſeu ſextum ſortiatur locum inter dignitates &c. & hoc quo ad reductionem characterum; quo ad numeros reducetur ad hanc $\frac{3}{1QQ}$. vel ad hanc eandem, ſi cum Diophanto per QC, intelligamus CC; vel ſi intelligatur QC, iuxta Diophantum quintum habere locum: reducetur ad hanc $\frac{3}{1C}$. Hæc autem $\frac{12Q-6R}{6R+12Q}$, reducetur ad hanc $\frac{6R-3}{3+6R}$, vel ſuo modo iuxta Diophantum. *Explicantur magis, quæ hactenus allata ſunt.*

Abbreuiationis characterum demonſtratio, ita ſe habet. Cum iſta depreſſio fiat per eundem exponentem; ita nimirum, vt eadem diſtantia ſit inter characteres ad quos facta eſt reductio, quæ inter characteres initio propoſitos; eadem erit proportio inter reductos, quæ inter propoſitos. Itaq; ſi hæc proponatur fractio $\frac{6C}{12QC}$, ad hanc reuocabitur $\frac{1}{2Q}$, iuxta Diophantum, & erunt inter ſe æquales, quæ ratio eſt enim 6 C, ad 12 QC; eadem eſt 1, ad 2 Q: factum enim ſub 6 C, & 2 Q, æquale eſt facto ſub 12 QC, & 1. *Demonſtratio abbreuiationis characterum.*

Rurſus ad magis declarandam, & clariùs illuſtrandam ſuperiorem doctrinam, ſupponamus 1 R pretium eſſe 2, ergo $\frac{6C}{12QC}$, erit idem quod $\frac{48}{384}$ inſuper hoc idem erit *Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina.*

quod

quod $\frac{4}{5}$: conſtat autem hanc fractionem fieri, ſi illa $\frac{48}{60}$ ad minimos terminos reuocetur.

Quo verò pacto reductio iſtarum fractionum ad eundem denominatorem, fiat, aperiamus. Multiplicentur numeratores, in denominarores per crucem, denominarores autem inter ſe, quemadmodum fit in minutijs vulgaribus. Exempli gratia $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{6C}{7QC}$, ſi ad eundem denominatorem ſit opus reducere; fiat multiplicatio, vt hic apparet; & ſecundum communem viam reducetur ad iſtas $\frac{28BSS}{35QQQ}$, & $\frac{30SS}{35QQQ}$; at iuxta Diophantum ad has $\frac{28CC}{35QQC}$, & $\frac{30QC}{35QQC}$.

Huius operationis demonſtratio. Demonſtratio ita ſe habet: Quoniam idem numerus 7 QC, multiplicans duos 4 R, & 5 Q, producit numeros 28 CC, & 35 QQC; eadem erit * proportio 28 CC, ad 35 QC, quæ 4 R, ad 5 Q; & ideò æquales erunt fractiones $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{28CC}{35QQC}$; & ita de alijs fractionibus intelligendum eſt.

a 17. ſeptimi.

* Q

$\frac{4R}{5Q}$	✕	$\frac{6C}{7QC}$
$\frac{28CC}{35QQC}$		$\frac{30QC}{35QQC}$
$\frac{28BSS}{35QQQ}$		$\frac{30SS}{35QQQ}$

Demonſtratur enim in Elementis.

Propoſitio. *Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, geniti ex ipſis eandem habebunt rationem, quam multiplicati,*

Si numerus integer, & fractio reduci debeant ad eandem denominationem: numero integro, tanquam numerarori ſupponatur vnitas, tanquam denominator; & procedatur vt priùs. Exempli graria 10, & $\frac{5R}{1Q}$, reducere debeamus ad eundem denominatorem; ſtabit hoc modo $\frac{10}{1}$ ✕ $\frac{5R}{1Q}$, & reducetur ad has $\frac{10Q}{1Q}$, & $\frac{5R}{1Q}$, hoc eſt 10, & $\frac{5R}{1Q}$.

Quando fractio adhæret integris. At ſi fractio adhæreat integris, priùs reducendi ſunt integri ad fractionem ipſam; deinde procedendum, vt priùs. Reductio ad fractionem fiet, ſi multiplicenrur integri per denominatorem fractionis; atque productus numerus addatur numeratori. Exempli gratia 6 C ✱ $\frac{4R}{1QC}$, & $\frac{5C}{1QQ}$, reducere debeamus, ita vt fiat idem denominator vtriuſque ipſorum: ducatur 1 QC, in 6 C, vt fiat productum 6 QCC, & erunr fractiones $\frac{6QCC+4R}{1QC}$, & $\frac{5C}{1QQ}$, reducenda ad eandem denominationem, vt priùs. *Quatuor operationes circa fractiones.* Quatuor autem extant circa fractiones iſtas, operationes; quemadmodum circa numeros fractos vulgares contingunt.

S C H O L I O N.

Notandum. Explicatur ſuperior fractionum doctrina. *AGentes de numeratione fractionum denominatorum, ſuperiùs dicebamus $\frac{12}{15R}$ ſignificare, duodecim vnitates, diuiſas eſſe per quindecim Radices; & $\frac{28R}{50}$, ſignificare, decem & octo Radices diuiſas eſſe per 50: hæ porrò ſignificationes meliùs percipientur, ſi in numeros abſolutos aliquas fractiones reſoluamus, Sit fractio $\frac{270}{15R}$: per hanc fractionem ſignificamus 270, vnitates diuiſas eſſe per quindecim Radices. Si 1 R, pretium ſit 3, ergo 15, R valebunt 45, & 270, ſi diuidatur per 45, fit quotiens 6; quamobrem illius fractionis $\frac{270}{15R}$, valor erit 6: ita quoq; ſi ſit fractio $\frac{20R}{10}$, ſignificat viginti Radices diuiſas eſſe per 10; ſi igitur 1 R, pretium ſit 3, proinde 20 R, valebunt 60, quamobrem ſi 60, diuidantur per 10, fit quotiens 6, ob id iſtius fractionis valor erit 6.*

Additio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO PRIMA.

Minutiæ addendæ, vel ſūt eiuſdem, vel diuerſæ denominationes. Quando habēt ſimilem denominationē. MInutiæ addendę, vel ſunt eiuſdem denominationis, vel diuerſæ. Si eiuſdem, colligantur numeratores in eandem ſummam, & interiecta linea ſcribatur denominator; quem communem habent collecti numeratores; ſi ſint fractiones iſtæ $\frac{3R}{5Q}$, & $\frac{2R}{5Q}$, fiet ſumma $\frac{5R}{5Q}$. Item $\frac{3R}{8C}$, & $\frac{5Q}{8C}$ fiet ſumma $\frac{3R+5Q}{8C}$, & inſuper $\frac{5R+5Q}{15C}$ & $\frac{12QQ-6Q}{15C}$, fiet ſumma, $\frac{12QQ-1Q+5R}{15C}$.

At

At verò ſi denominatores non fuerint omninò ſimiles, minutiæ multiplicentur per crucem, productique numeri colligantur, vt fiat numerator fractionis quæſitæ. Deinde denominatores ducantur inter ſe, vt producatur denominator eiuſdem quæſitæ fractionis. Vt ſint fractiones addendæ $\frac{5R}{6C} \times \frac{4R}{6Q}$ fiet ſumma $\frac{30C+24QQ}{36QC}$. Item $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3QQ}$, fiet ſumma $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, hoc eſt $\frac{2C+2}{3QQ}$, & ita de reliquis. Itaque harum minutiarum additio non differt ab additione vulgarium minutiarum, habita ſemper ratione ſignorum ✠, & —, & characterum poteſtatum. *Quando ſunt denominatores diuerſi.* *Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.*

Lubet exemplum aliquod in numeros abſolutos reſoluere ad hanc operationem magis illuſtrandam. Sint fractiones $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3QQ}$: dicebamus ſummam earum eſſe $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, hoc eſt $\frac{2C+2}{3QQ}$. Supponamus 1 R pretium eſſe 5: fractio igitur illa $\frac{2R}{3Q}$, valebit $\frac{10}{75}$; altera autem $\frac{2}{3QQ}$, valebit $\frac{2}{1875}$. Si 1875 ducamus in 10 producetur numerus 18750, ſi vero 75, ducamus in 2, producetur 150; quibus additis ad 18750, fiet numerus 18900. Modo ſi ducamus 1875, in 75, fiet numerus 140625; Itaque fractio erit $\frac{18900}{140625}$, quæ reſpondet fractioni $\frac{6QC+6Q}{9CC}$; etenim 6QC, valent 18750; & 6Q, valeant 150: adeo vt 6QC ✠ 6Q, valent 18900. Inſuper 9CC, valent 140625. Reducitur autem illa fractio $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, ad hanc $\frac{2C+2}{3QQ}$, vt dictum eſt; nempe $\frac{18900}{140625}$, ad hanc $\frac{252}{1875}$ hæc autem æqualis erit illi $\frac{18900}{140625}$, eadem enim eſt proportio 18900 ad 140625, quæ 252, ad 1875. *Exemplum per numeros abſolutos.*

Demonſtratio quantum ad characteres, patet ex dictis, quantum ad numeros, Vna ex minutijs ſit A B, altera verò C D; ducatur B, denominator in C, numeratorem; & fiat E: deinde multiplicetur D in A, & fiat F; poſtea in vnam ſummam G, colligantur: multiplicetur B in D, & fiat H, itaut G, ſit numerator, & H, denominator. Quoniam B, multiplicans C, D, produxit ſingulos E, H: erit [a]; vt C, ad D, ita E ad H: inſuper quia D, multiplicans A, B, produxit F, H erit [b] vt A, ad B, ita F, ad H. Quapropter fractio cuius numerator eſt E, & denominator H, erit æqualis ipſi fractioni C D; vt patet ex ijs, quæ demonſtrantur ad lib. nonum Elementorum; vt, & fractio, cuius numerator eſt F, denominator H, erit æqualis fractioni A B: vt autem eſt E, ad H, ita E H, ad vnitatem, ſeù ad integrum cuius eſt fractio; & vt F, ad H, ita F H, ad vnitatem, ſeu ad integrum, cuius eſt fractio, habet enim fractio, ad integrum cuius eſt fractio proportionem, quā habet numerator ad denominatorem, vt patet ex ijs, quę demōſtrantur loco citato; ergo vt G, ad H, nempè aggregatum ex E, & F, ad H, ita aggregatum ex E H, F H, hoc eſt A B, C D, ad vnitatem, ſeù ad integrum: ſed vt G, ad H, ita eſt [c]; quoq; G H, ad vnitatem, ſeù ad integrum; & vt G, ad H, ita (vt diccebamus) aggregatum ex E H, & F H, ſeù aggregatum ex A B, C D, ad vnitatem, ſeù ad integrum: Ergo G H, fractio æqualis eſt fractionum A B, C D, aggregato. Quod oportebat oſtendere.

$$\frac{A\,3}{B\,5} \times \frac{C\,5}{D\,6}$$

$$\frac{E\,25}{H\,30} \qquad \frac{F\,18}{H\,30}$$

$$\frac{G\,43}{H\,30}$$

Supradictæ operationis demonſtratio.

a 17. *ſeptimi.*

b 17. *ſeptimi.*

c *Per ea quæ demonſtrantur ad 9. lib. Elementorum.*

SCHOLION.

Non deſunt aliæ demonſtrationes, quibus hæc operatio fractionum comprobatur, tum quando minutiæ habent eundem denominatorem, cùm quando diuerſos denominatores obtinent: ſufficiat autem hoc loco præſentem attuliſſe.

Digitized by Google

Subtractio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO SECVNDA.

Subtractionis præcepta.

FRactiones ſubtrahendæ, vel eundem habent denominatorem, vel diuerſum: ſi eundem denominatorem habent; ſubtrahatur numerator vnius, à numeratore alterius, & ſub reſiduo idem ſcribatur denominator.

Subtractionis exempla.

Vt ſint fractiones ſubtrahendæ $\frac{6R}{5C}$, & $\frac{15R}{5C}$, adeo vt $\frac{6R}{5C}$ ſubtrahere debeamus de $\frac{15R}{5C}$, ſubductis 6 R, de 15 R, remanent 9 R, & erit reſiduum quęſitum $\frac{9R}{5C}$. Item ſubtracta fractione hac $\frac{8R}{7QC}$ de $\frac{15Q}{7QC}$, reſiduum ſit $\frac{15Q - 8R}{7QC}$. Inſuper $\frac{12Q ✱ 2R}{5QC - 7}$ de $\frac{18C ✱ 17Q - 5R}{5QC - 7}$, reſiduum erit $\frac{18C ✱ 5Q - 7R}{5QC - 7}$.

Quando denominatores non fuerint omnino ſimiles.

Si denominatores non fuerint omnino ſimiles; reducendæ ſunt fractiones ad eundem denominatorem, & eodem pacto facienda ſubtractio. Vt $\frac{4R}{5Q}$ de $\frac{8Q ✱ 6R}{5C}$ reſiduum erit $\frac{20QQ ✱ 30C}{25QC}$, hoc eſt $\frac{4R ✱ 6}{5Q}$. Præterea $\frac{3R}{2Q}$ de $\frac{13Q ✱ 3}{4C}$, reſiduum erit $\frac{14QQ ✱ 6Q}{8QC}$, ſeu $\frac{14Q ✱ 6}{8C}$.

Explicatur ſuperior doctrina reſolutis exemplis in numeros abſolutos.

Hæc autem exempla, ſi in numeros abſolutos reſoluantur, multam afferent huic doctrinæ claritatem. Supponamus igitur 1 R; pretium eſſe 2, ergo fractio illa $\frac{4R}{5Q}$ valebit $\frac{8}{20}$ illa verò $\frac{8Q ✱ 6R}{5C}$ valebit $\frac{32 ✱ 12}{40}$, ſeu $\frac{44}{40}$: & ita reliqua exempla reſolui poſſunt. Itaq; perſimilis eſt hæc ſubtractio illi, quæ fit in minutijs vulgaribus; adhibitis tamen præceptis ſignorum ✱, & —, & characterum poteſtatum, de quibus iam ſuperiùs egimus.

Demonſtratio quoad characteres. Demonſtratio quoad numeros.

Demonſtratio quoad characteres facilè deducitur ex dictis.

Quantum ad numeros ita ſe habet; ſiuè numeri eundem, ſiuè diuerſos denominatores habeant: nam ſi diuerſi fuerint ad eundem denominatorem reuocentur, & procedit eadem demonſtratio.

Sint duæ minutiæ; A B, quidem ſubtrahenda, & C D; illa à qua fieri debet ſubtractio. Ducatur B, in C, vt fiat E; deinde A, in D, vt fiat F: ſubtrahatur F, ex E; remaneat G, cui ſubſcribatur numerus H, productus ex ductu B, in D. Dico G H, eſſe fractionem relictam ex ſubtractione A B, abs C D. Quoniam enim B, multiplicans ſingulos C, D, facit ſingulos E, H, erit [a], vt C, ad D, ita E, ad H: & inſuper quoniam, D, multiplicans ſingulos A, B, facit ſingulos F, H; erit [b], vt A, ad B, ita F, ad H: quamobrem E H, æqualis erit ipſi C D; & F H, ipſi A B: & quia fractiones E H, F H, eundem habent denominatorem H; proinde erunt inter ſe, vt numeratores E, F, quemadmodum ſuo loco oſtendimus.

a 17. ſeptimi.

b 17. ſeptimi.

$$\frac{8}{20} \bowtie \frac{32 ✱ 12}{40}$$

$$\frac{320}{800} \qquad \frac{640 ✱ 240}{800}$$

$$\begin{array}{c} 640 \\ 320 \\ \hline 320 \\ 240 \end{array}$$

$$\frac{20QQ}{25QC} \qquad \frac{40QQ ✱ 30C}{25QC}$$

$$\frac{320 ✱ 240, \text{ ſeu } 560}{800}$$

$$\frac{20QQ ✱ 30C}{25QC}$$

$$\frac{4QQ ✱ 6C}{5QC} \qquad \frac{112.}{160}$$

$$\frac{4R ✱ 6}{5Q} \qquad \frac{14}{20}$$

Vt

Vt igitur E, ad F, ita minutia E H, ad minutiam F H: & quia minutiæ G H, F H, eundem habent denominatorem; erit[c] vt G, ad F, ita minutia G H, ad minutiam F H; & componendo[d], vt G, F, ſimul ad F, ita minutiæ G H, F H, ſimul ad, minutiam F H: erat autem, vt E, ad F, ita E H, ad F H; atq; adeo conuertendo[e], vt F, ad E, ita F H, ad E H: ergo ex æquo[f], erit, vt G, F, ſimul ad E, ita minutiæ G H, F H, ſimul ad minutiam E H: atqui G, F, ſimul ſunt æquales ipſi E (ſubduximus enim F, ex E, & remanſit G) erunt ob id minutiæ G H, F H, ſimul æquales minutiæ E H: cum itaq; minutia E H, componatur ex duabus minutijs F H; G H; ſi ſubtrahatur F H, minutia remanens erit G H: at verò minutia E H, eſt æqualis minutiæ C D; & F H, minutiæ A B ſubtracta igitur A B, ex C D; remanebit G H; Quod erat operæ pretium oſtendere.

c. Ex ijs, quæ ad 9. librum oſtenduntur.
d. Schol. 22. ſeptimi.
e. Schol. 22. ſeptimi.
f. 14. ſeptimi.

$\frac{A\,3}{B\,7}$	✕	$\frac{C\,3}{D\,5}$
$\frac{E\,21}{H\,35}$		$\frac{F\,15}{H\,35}$
	$\frac{G\,6}{H\,35}$	

Multiplicatio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO TERTIA.

MVltiplicentur numeratores intet ſe, vt fiat numerator productæ fractionis: multiplicentur denominatores, vt emergat denominator. Vt ſi deberemus multiplicare $\frac{5R}{6Q}$ in $\frac{3R}{5Q}$, fiet productum $\frac{15Q}{30QQ}$. Item $\frac{6R}{7Q}$ in $\frac{12R}{11C}$ faciunt $\frac{72Q}{77QC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{3Q+6R}{5C}$ in $\frac{4Q}{5C}$ fiunt $\frac{12QQ+24C}{25CC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{7C-4Q}{6Q+2R}$ in $\frac{7R}{6Q}$ fiunt $\frac{49QQ-28C}{36QQ+12C}$. Inſuper ex $\frac{15QQ+3C}{7QCC}$ in 10 R, fiunt $\frac{150QC+30QQ}{7QCC}$, iuxta Diophantum.

Multiplicationis præcepta

Quapropter multiplicatio fractionum numerorum denominatorum non eſt diſſimilis illi, quæ fit in numeris vulgaribus fractis; habita ratione perpetuò ſignorum ✛, & —, poteſtatumq; ſiuè dignitatum characterum.

Demonſtratio ſic ſe habet. Propoſitæ ſint fractiones A B, C D: ductis numeratore in numeratorem, denominatore in denominatorem; fiat E F; vt E, ſit numerator, & F, denominator. Quoniam autem ratio fractionis E F, ad C D, componitur[*] ex rationibus numeri E, ad numerum C, & D, ad F; & ratio fractionis A B, ad ipſam vnitatem, ſeu ad integrum componitur, ex ratione numeri A, ad vnitatem ipſam, & ex ratione vnitatis ad numerum B: at verò per definitionem multiplicationis numerorum, vt A, numerus eſt ad vnitatem, ſic numerus E, ad numerum C; & vt vnitas ad numerum B,

Demonſtratio multiplicationis.
[*] Ex elementis.
Seu ad integrum.

$\frac{A\,3}{B\,7}$	$\frac{C\,4}{D\,5}$
$\frac{E\,12}{F\,35}$	$\frac{G\,60}{H\,140}$

a 14. ſeptimi, cum ſuo Lemmate. ſic numerus D, ad numerum F; ergo [a], erit E F, ad C D, vt A B, multiplicans ad vnitatem, ſiuè ad integrum; ergo E F, erit proueniens ex ductu A B, multiplicantis in C D, multiplicatam.

Aliter idem oſtenditur. Aliter. Facta multiplicatione numeratorum, & denominatorum, vt ſupra, producatur E F; mox ducatur F, in C, vt fiat H; & D, in E, vt fiat G; erit igitur per ea, quæ à nobis oſtenſa ſunt alibi, vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H: cumq; C, multiplicans A, F, faciat E, H; erit [a], vt A, ad F, ſic E, ad H; & permutando [b], vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, B, facit G, & F; ergo erit [c], vt E, ad B, ita G, ad F: igitur ex æqualitate perturbata erit [d], vt A, ad B, ſic G, ad H; at verò vt G, ad H, ita minutia E F, ad minutiam C D; & vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum, ſeu ad vnum; ergo vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad vnum, ſeu ad integrum, &c.

a 17. ſeptimi. b 13. ſeptimi. c 17. ſeptimi. d 22. ſeptimi.

A 3 / B 7   C 4 / D 5   E 12 / F 35

H 140   G 60   A E B / G F H

Diuiſio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO QVARTA.

Diuiſionis præcepta explicantur. MVltiplicetur numerator fractionis diuidendæ, per denominatorem fractionis diuidentis; & proueniens ſupra lineam ſcribatur; deinde ducatur denominator fractionis diuidendæ, in numeratorem fractionis diuidentis; productus numerus, ſub linea ponatur, vt emergat fractio, quæ erit quotiens quæſitus.

Exempla ad maiorem explicationem præceptorum. Demonſtratio. Vt [illegible] diuidere debeamus per [illegible], fit quotiens [illegible]. Præterea ſi diuidere debeamus [illegible] per [illegible], fiet quotiens [illegible]. Inſuper diuiſa fractione [illegible] per [illegible], fiet quotiens [illegible] iuxta Diophantum, & ita de reliquis.

Demonſtratio ita ſe habet. Fractio diuidenda ſit A B, & diuidens C D; ducatur D, in A, & proueniat E; inſuper C, ducatur in B, & fiat F; ita vt quotiens ſit E F, cuius numerator E, denominator F. Quoniam ergo proportio fractionis A B, ad fractionem E F, componitur ex ratione numeri A, ad E, & ex ratione numeri F, ad B; & vt A, ad E, ſic vnitas ad D, & ſicut F, ad B, ita C, ad vnitatem; ratio verò fractionis C, D, ad vnitatem, vel integrum, componitur ex ratione numeri C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D; ergo erit [a], ratio fractionis A B, ad E F, vt C D, ad vnitatem, ſiuè ad integrum; ergo per definitionem diuiſionis, diuiſa fractione A B, per C D, emergit E F, pro quotiente.

a 14. ſeptimi, cum ſuo Lemmate.

A 12 / B 15   2 C / 7 D

E 84 / F 30

Compendioſius eadem demonſtratio traditur. Breuius. Ratio A B, ad E F, componitur ex ratione A, ad E, & F, ad B; vt verò A, ad E, ſic vnitas ad D; & vt F, ad B, ſic C, ad vnitatem; ratio autem C D, ad vnitatem, vel ad integrum, componitur ex C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D; ergo ratio A B, ad E F, erit [b] vt C D, ad vnitatem, ſeu ad integrum; ergo diuiſa fractione A B, per C D, emerget E F.

b 14. ſeptimi cum ſuo Lemmate.

Aliter ipſius diuiſionis operatio oſtenditur. Aliter. Sit minutia A B, diuidenda per minutiam C D, & primò quidem huius, numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; itaut diuiſo A, per C, quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe quotientem diuiſionis minutiæ A B, per C D, minutiam. Quoniam C, metitur A, per E, & D, metitur B, per F; producetur A, ex C,

A 12 / B 16   C 3 / D 8   E 4 / F 2

ex C, in E;& B, ex D, in F: ob id minutia A B, producta erit [a] ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: quamobrem ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad vnum: cum itaq; ſit, vt A B, minutia diuiſa, ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad vnum; erit ob id ex definitione diuiſionis, minutia E F, quotiens diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D, quod oſtendendum erat, [a] Ex elemẽtis

Quod ſi numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B; reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod fiet ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur

$\frac{E\ 24}{F\ 36}$	$\frac{A\ 2}{B\ 3}$	K 12	$\frac{C\ 3}{D\ 4}$	$\frac{G\ 8}{H\ 9}$
$\frac{E\ 90}{F\ 135}$	$\frac{A\ 6}{B\ 9}$	K 15	$\frac{C\ 3}{D\ 5}$	$\frac{G\ 30}{H\ 27}$

E, F. Quoniam itaq; C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit miuutia G H, quotiens diuiſionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, quod eſt propoſitum, &c.

Non eſt autem, cur hìc immoremur in explicando Algorithmo numerorum irrationalium fractionum denominatarum; facilè namq; ex dictis intelligi poſſunt, quę circa ipſas occurrunt: qua verò arte probentur operationes iſtæ patet; ſiquidem explicuimus Additionem, Subtractionem, itemq; multiplicationem, diuiſionem ſe mutuò probare. *Algorithmus irrationalium fractionum denominatarum patet ex dictis*

S C H O L I O N.

IN ſuperioribus demonſtrationibus, præter Vnitatem hoc verbum, Integrum, vbi opus erat, adiecimus: ſiquidem minutiæ ſunt fractiones, ſiuè particulæ, vel vnitatis, vel cuiuſpiam numeri. Non enim in ea ſumus ſententia, vt exiſtimemus, eas reſpectu ſolius vnitatis, eſſe accipiendas: qui enim hoc ſibi perſuaſum habuerunt, certè decepti ſunt; vt alibi demonſtrauimus; cum de minutijs in Arithmetica tractaremus. *Animaduerſio.*

De extractione Radicum numerorum denominatorum, ſeu numerorum, cum dignitatibus, vel poteſtatibus.

CAPVT V.

Radicum numerorum denominatorũ extractio, quid ſit.

ALIBI docuimus, ex aliquo numero radicem extrahere, nil aliud eſſe, quàm reperire numerum aliquem, qui ſi in ſe multiplicetur iuxtà radicis naturam quæſitæ, numerum producat illum, à quò radix eſt eruenda. Ita cum dignitatibus, &c. nil aliud erit, quàm exhibere numerum cum aliqua dignitate, qui numerum producat dignitate affectum, à quo radix extrahi debet, ſi in ſe ducatur, iuxta radicis naturam, nempè quadratè, ſi fuerit radix quadrata, cubicè ſi cubica, & ita de ſingulis.

Radicum extractio ex numeris vulgaribus alibi tractanda.

Non eſt autem cur hic ſermonem habeamus de methodo extrahendi radices à vulgaribus numeris; de his enim ſuo loco ſatis, ni fallor, locuti ſumus: nunc ad rem noſtram accedamus; & primò de numeris ſimplicibus cum poteſtatibus, quænimirum arte radices extrahantur ex ipſis.

Radicum numerorum denominatorum extractio qua arte fiat.

Si ſit iniunctum radices extrahere ex aliquo numero cum dignitate, loquendo, vt diximus de numero denominato ſimplici; ſumatur propoſita radix illius numeri relicto charactere, perindè ac ſi abſolutus eſſet: mox verò exponens characteris eiuſdem numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix quæſita denominatur. Exempli gratia. Sit iniunctum radicem quadratam extrahere ex numero 16 Q: accepta radice quadrata numeri 16, nempè 4; diuidatur exponens huius characteris Q, per exponentem, characteris Q, à quo nimirum ipſa radix mutuatur appellationem: diuidatur ergò numerus 2, per 2, fit quotiens 1, & exponens characteris R; erit ergo ℞ Q, numeri 16 Q, numerus 4 R. Eodem pacto ſi quæratur ℞, numeri 64 CC; latus quadratum numeri eſt 8: & diuiſo 6, exponente characteris CC, per 2, exponentem Q, à quo ſumit radix appellationem; fiet quotiens 3, exponens characteris C; dicemus ergo latus quadratum numeri 64 CC, eſſe 8 C; & hoc in via Diophanti. Secundum alios non haberet radicem quadratam; cùm exponens 9, ſecundum ipſos characteris CC, non poſſit diuidi per 2; & fieri quotiens integer, &c. Inſuper ℞ C, numeri 125 C, erit 5 R: ſiquidem numeri 125, eſt 5; & diuiſo 3, exponente characteris C, per 3, exponentem characteris ℞, quaſitæ, fit 1, exponens ipſius R. Inſuper ℞ Q, numeri 36 QQ, erit 6 Q. Item quadrato-quadrata numeri 81 QCC, ſecundum Diophantum, eſt 3 Q; & ſecundum alios, numeri 81 QQQ, erit idem 3 Q; & ita de ſingulis. &c.

Aliter idem efficere.

Aliter. Sumatur (loquendo de radice quadrata) radix quadrata numeri, & ei apponatur character; cuius exponens eſt dimidium characteris denominati.

℞ C extractio
℞ QQ extractio.
℞ QC extractio.

Si ſit extrahenda ℞ C: ſumatur latus cubicum numeri, & ei apponatur character, cuius exponens eſt tertia pars exponentis characteris numeri, cuius latus quæritur, &c. Si quæratur latus quadrato-quadratum: accepto latere numeri, quarta pars exponentis ſumatur. Si quæratur ℞ QC: ſumpto numeri latere, accipiatur quinta pars exponentis &c.

Per primum modum.
Per ſecundum modum.

Quando autem numerus habet quidem radicem quadratam, vel cubicam, vel quadrato-quadratam, &c. ſed inſtituta diuiſione (per primum modum) exponentium in quotiente, non emergit numerus integer; vel (per ſecundum modum) ſi loquamur de ℞ Q, exponens nequit diuidi in duas partes æquales; ſi de ℞ C, in tres; ſi de ℞ QQ, in quatuor; ſi de ℞ QC, in quinque, &c. in huiuſmodi caſibus clauduntur numeri cum characteribus intrà parentheſim, præpoſito charactere radicis extrahendæ, nempè quadratæ, cubicæ, &c. Vt ſi ex 16 R extrahi deberet latus; illud foret ℞ (16 R) & ſi ex 4 C, extrahi quadratum latus deberet; illud foret ℞ (4 C): ſi ex 16 QC; eſſet ℞ (16 QC) Et ita de reliquis, cùm numerus non habet

habet latus: vt numeri 13 C, latus quadrarum erit ℞(13 C). Item numeri 28 QC, latus quadratum erit ℞(28 QC): inſuper latus cubicum numeri 27 Q, erit ℞ C(27 Q): Item latus cubicum numeri 64 QQ, erit ℞ C(64 QQ): Præterea numeri 35 Q, erit ℞ C(35 Q): Inſuper numeri 72 QQ, erit ℞ C(72 QQ): Et ita de ſingulis, cùm etiam numeri latere carent.

Ad euitandã confuſionem quid ſit agendum.

Hìc autem aduertendum eſt, aliquid ne oriatur confuſio. Superiùs enim annotauimus, de multiplicatione agentes, ex ℞ 16 R, in 4 R, productum eſſe ℞ 256 Q, quod idem eſſe dicebamus, ac 16 Q. Hìc autem, ex 256 Q, radicem eſſe extrahendam, vt docuimus: atque adeo eam eſſe 16 R, hoc autem mirum eſſe non debet; quoniam cùm ibi dicebamus ℞ 256 Q, idem eſſe, ac 16 Q, reddebatur ſenſus, vt pretium quadrati ductum intelligeretur in radicem quadratam numeri 256, nimirum 16, at verò hìc cùm volumus extrahere radicem quadratam ex 256 Q, intelligimus pretium quadrati, ductum eſſe in 256, non autem in radicem quadratam numeri 256, atque adeo, cùm non idem ſit ſenſus, propterea mirum eſſe non debet, ſi ibi non diceremus, vt alicui videri poſſet dicendum, nempe ℞ 256 Q, idem eſſe quod 16 R. Cæterum radix quadrata huius 256 Q, eſt 16 R, quæ habetur ſi extrahatur radix quadrata ex 256, quæ eſt 16, & radix quadrata ex Q, quæ eſt R, rem verò ſic ſe habere perſpicuum eſt; etenim reperire quadratam radicem numeri 256 Q, nil aliud eſt; quàm intelligere 256, multiplicatum per pretium Q; deinde reperire numerum, qui ductus in ſe efficiat illud productum, cuiuſmodi eſt, 16, radix quadrata numeri 16.

Quando numerus non habet radicem, & dignitatis exponẽs diuidi poteſt per exponentem characteris à quo radix denominatur.

At verò ſi numerus non habet radicem; & dignitatis exponens, diuidi poteſt per exponentem characteris, à quo radix denominatur, ſic vt in quotiente non proſiliat fractio per primum modum: vel per ſecundum modum exponens diuidi poteſt in duas, vel tres, vel quatuor, &c. prout opus fuerit, æquales partes. Præponatur numero ſignum radicale; & ei apponatur character debitus quotienti emergenti ex diuiſione exponentium, vel dimidio, aut tertiæ, aut quartæ parti, &c. prout opus fuerit. Proinde ℞ Q, numeri 20 Q, erit ℞ 20 R, inſuper ℞ C, numeri 40 CC, erit ℞ C 40 Q, & numeri 50 CCC, erit ℞ C 50 C. Quod ſi neque ex numero, neque ex poteſtate, radix erui poteſt, arte eadem res expediri debet. Itaque latus cubicum numeri 35 Q, erit ℞ C(35 Q) item numeri 50 QQ, erit ℞ C(50 QQ:) nimirum clauduntur numeri intra parentheſim, vt ſupra dictum fuit.

Quando nec ex numero, nec ex poteſtate latus erui poteſt.

Radicum extractio ex numeris compoſitis.

Nunc reliquum eſt, vt verba faciamus de extractione radicum ex numeris compoſitis cum dignitatibus: in cuius gratiam aduertendum eſt numeros iſtos quandoque rationales eſſe.

Quando commemorati numeri fuerint irrationales; qua arte procedendum ſit.

Si fuerint irrationales, clauduntur intra parentheſim, & fient radices vniuerſales. Vt ſi quæratur ℞ Q, huius numeri 15 C † 7 Q † 4 R; ea erit ℞(15 C † 7 Q † 4 R) & ſi ſit in quæſtione ℞ C, numeri 18 Q † 14 R † 3; erit ℞ C(18 Q † 14 R † 3): Item ℞ Q, huius nemeri 12 C † 7 Q − 3 R, erit ℞ C(12 C † 7 Q − 3 R): & ℞ Q, numeri 38 QQ † 42 C † 27 Q, erit ℞(38 QQ † 42 C † 27 Q): inſuper numeri 27 CC − ℞ 25 QC † 5 QQ − ℞ 45 QQ − ℞ 32 C † 5 Q, erit hæc; nimirum ℞(7 CC − ℞ 25 QC † 5 QQ − ℞ 45 QQ − ℞ 32 C † 5 Q) & ita de reliquis.

Quando fuerint rationales quid agendum.

Cùm autem numeri fuerint rationales, extrahendaque ſit radix quæſita; quo pacto dignoſcere poſſimus, num rationales, vel irrationales ſint, expediet declarare. Pluribus autem modis, quoad radicem quadratam ſpectat id aſſequi poſſumus.

Methodus extractionis, & primò quid obſeruandum.

Primò aduertendo num compoſitus numerus, ex illis, qui conſtituunt numerum, cuius latus quæritur, rationalis fuerit, tunc enim numerus rationalis eſt. Vt 4 Q † 20 R † 25, rationalis eſt; etenim horum numerorum ſumma eſt 49, cuius latus quadratum eſt 7: item 36 Q † 20 R † 25, rationalis eſt; cum ſumma ſit 81, numerus rationalis, cuius latus eſt 9: & ita de reliquis.

Quid ſecundò in extractione ſit obſeruãdũ.

Secundò cognoſcitur, quia ſi numerus compoſitus rationalis fuerir, cuius radix quadrata quæritur, oportet eſſe trinomium: ſi latus, binomium eſt: Si verò latus fuerit trinomium, neceſſe eſt numerum eſſe quinquinomium: ſi latus eſt quatrinomium, neceſſe eſt numerum eſſe ſeptinomium; & quinquinomium, numerum oportet eſſe noninomium.

Quid tertiò expedeat obſeruare.

Tertiò dignoſcitur deſignatione punctorum: ſi rationalis fuerit, deſignatis prima,

ma, & ſecunda figura ad ſiniſtram, deinde alternatim; neceſſe eſt poſtremum remanere ſine puncto.

Lateris indagatio 2 R + 5. His conſideratis iniunctum ſit latus extrahere quadratum ex hoc trinomio 4 Q + 20 R + 25, quod eſſe rationale dicebamus. Sumatur latus quadratum primi numeri 4, nempe 2; & 1, dimidium numeri 2, exponentis Q; ipſi verò 1, tanquam exponenti debetur R. Itaque erit prima figura 2 R, quæ ponatur à latere

4 Q + 20 R + 25 | 2 R + 5
4 Q + 20 R + 25
———
o o o

vt vides; huius quadratum eſt 4 Q, quo ſublato ex 4 + remanet o. Deinde ad habendam ſecundam figuram, duplicetur 2 R, prima figura, & fiunt 4 R: per hunc autem numerum diuidere debemus ſequentem numerum 20 R, hoc eſt, periculum faciendum erit, quoties 20 R, complectuntur 4 R, & reperiemus 5: ſubtrahamus 1, exponentem R ab 1, exponente eiuſdem R, & ita remanebit o: itaut 5, ſit numerus abſolutus pro ſecunda figura. Cumque + per + emergat +; erit latus quadratum quæſitum 2 R + 5. Modò ducatur 5, in 4 R, duplum primæ figuræ; fiunt 20 R: ſubtractis 20 R, remanet o: Mox verò ſubtrahatur numerus 25, quadratum ſecundæ figuræ, abs 25, vltimo numero, & remanet o: proinde latus quæſitum erit 2 R + 5. Probatio verò fit, ducendo quadratè latus in ſe, vt hic cernere licet.

Operationis comprobatio. Conſtat autem hunc extractionis modum perſimilem eſſe illi, quo radices numerorum vulgarium extrahuntur.

2 R + 5
2 R + 5
———
10 R + 25
4 Q + 10 R
———
4 Q + 20 R + 25

Operationis demonſtratio. Demonſtratio in hoc ſita eſt, quod numerus, cuius latus quadratum quæritur, componitur ex quadrato primæ figuræ lateris extrahendi, plus numero facto ſub duplo primæ figuræ in figuram ſecundam, & quadrato ſecundæ figuræ. Quo autem pacto ſe habet ſyntheſis, eodem etiam ſe habet analyſis: extrahere namque radicem, eſt reſoluere numerum in partes, ex quibus coaleſcit.

4
28
49
———
729

27
27
———
189
54
———
729
2 7

Declaratio ſu prædictorum. Idque declaratur in adiuncto paradigmate. Poterit autem quiſque in omnibus alijs numeris, ita procedere in inueſtigando latere quadrato, quando etiam latus ex pluribus, quàm ex duabus figuris conſtaret: & ex ijs, quæ diximus facilè deduci poteſt, quid agendum in numeris irrationalibus.

Radicis cubicæ extractio. Nunc de radicis cubicæ extractione ex ijſdem numeris compoſitis cum dignitatibus, verba faciemus. Primò autem videndum eſt, num numerus ipſe rationalis ſit, quod ità cognoſcemus. Examinandum eſt, num ipſa numerorum ſumma ſit rationalis, nec ne: ſi namque rationalis fuerit; erit etiam rationalis numerus cum dignitatibus. Secundò ſi rationalis fuerit, quando notantur punctis figuræ, initio facto à dextris verſus ſiniſtram, duabus figuris intermiſſis, tertia quæque ſi notetur; in vltima figura cadat punctum poſtremum. Demum ſi latus conſtat ex duabus figuris, numerus componitur ex quatuor figuris; ſi verò tres habet figuras, numerus componitur ex ſeptem.

484
220
25
———
50625

225
225
———
1125
450
450
———
50625
2 2 5

Propoſitum ſit quatrinomium iſtud, nimirum 8 C + 60 Q + 150 R + 125, cuius

cuius latus cubicum quæritur, Sumatur latus cubicum primæ figuræ 8, cuius radix eſt 2, & tertia pars numeri 3, exponentis characteris C, eſt 1, qui eſt exponens Radicis; erit ergo prima lateris figura 2 R, cuius cubus 8 C: Si ſubtrahamus ab 8 C, remanebit 0.

Ex quatinomio qua methodo radix extrahatur

Prima figura indagatio.

Secunda figura inuentio.

Pro ſecunda figura triplicetur 4, quadratum primæ figuræ; triplum autem eſt 12 Q; & per 12 Q diuidere oportet 60 Q, fit quotiens numerus abſolutus 5; ducantur 12 Q in 5, fiunt 60 Q, quibus ſublatis ab 60 Q, remanet 0: deinde multipliplicetur 75, triplum quadrati ſecundæ figuræ 5, in 2 R, fiet productum 150 R; quod abs 150 R, ſi auferatur, remanebit 0. Demum cubus ſecundæ figuræ 5, nempe 125, ſubtrahatur abs 125, & remanebit 0. Operationis autem examen, ſcilicet rectè fuiſſe inſtitutam colligitur ope multiplicationis, nempe ducendo latus illud inuentum, cubicè &c. Non diſſimili arte procedendum erit in alijs numeris propoſitis & etiam in numeris ſurdis.

Demõſtratio.

Demonſtratio in eo ſita eſt, quòd cubus numerus componitur ex cubo primæ figuræ, plus triplo quadrati eiuſdem primæ figuræ in ſecundam figuram, plus triplo primæ figuræ in Q, ſecundæ, plus cubo ſecundæ: vt patet ex hoc exemplo,

```
    8          25
   60          25
  150         ----
   125        125
 -------       50
 15625        ----
              625
               25
             -----
             3125
            1250
            -----
            15625
```

Quando latus conſtiterit ex pluribus figuris, quàm duabus.

Ita etiam ſi latus conſtiterit ex pluribus figuris, quàm duabus: vt ſi extrahi deberet latus cubicum ex hoc ſeptinomio 8 CC + 36 QC + 78 QQ + 99 C + 78 Q + 36 R + 8. Sumatur enim latus primi termini 8 CC; quod latus erit 2 Q: eius autem cubo 8 CC, ſubtracto ex 8 CC, remanet 0. Deinde per huius quadrati triplum, nempè 12 QQ, diuidantur 36 QC; fiet quotiens 3 R; & eſt ſecunda lateris figura. Modo ducantur 12 QQ, in 3 R; fiunt 36 QC; quibus ſubiatis abs 36 QC, remanebit 0. Nunc autem ſubtrahere debemus 27 Q, triplum quadrati ipſius 3 R, ductum in primam figuram 2 Q, nempe 54 QQ, ab 78 QQ; & remanebit 24 QQ. Subtrahamus 27, C, cubum ſecundæ figuræ 3 R, ab 99 C; & remanebunt 72 C; quibus ſi addantur 78 Q fiet 24 QQ + 72 C + 78 Q.

Nunc inquirenda eſt ſecunda figura. Dico autem ſecundam; quoniam duę priores nunc per modum vnius ſumuntur.

Secunda figura inquiſitio.

Accipiatur 4 QQ + 12 C + 9 Q, quadratum primæ figuræ 2 Q + 3 R; & eius triplum, 12 QQ + 36 C + 27 Q. Per hoc trinomium diuidatur 24 QQ + 72 C + 78 Q; & fiet quotiens 2, numerus abſolutus; modò ſi ſingula membra, nempe 12 QQ, 36 C, & 27 Q, ducantur in 2, fient producta 24 QQ, 72 C, & 54 +: quibus ſubtractis à 24 QQ + 72 C + 78 Q, habita ratione ſignorum + & —, remanebit 0; præter quam in 78 Q, remanebunt enim 24 Q; his addantur 36 R, & fiet 24 Q + 36 R.

```
          2 Q + 3 R
          2 Q + 3 R
         -----------
          6 C + 9 Q
  4 QQ + 6 C
 --------------------
  4 QQ + 12 C + 9 Q
                3
 --------------------
 12 QQ + 36 C + 27 Q
```

Ex hac ſubtrahere debemus triplum quadrati ſecundæ figuræ 2, nempe 12, ductum in primam figuram 2 Q + 3 R; cuius productum eſt 24 Q + 36 R; quo ſubtracto ex 24 Q + 36 R, remanet 0. Modò ex 8, poſtrema numeri nota, ſubtrahamus cubum huius ſecundæ figuræ 2, nempe 8; & remanebit 0.

At

2Q ✠ 3R ✠ 2
2Q ✠ 3R ✠ 2
———————
4Q ✠ 6R ✠ 4
6C ✠ 9Q ✠ 6R
4QQ ✠ 6C ✠ 4Q
———————
4QQ ✠ 12C ✠ 17Q ✠ 12R ✠ 4
2Q ✠ 3R ✠ 2
———————
8QQ ✠ 24C ✠ 34Q ✠ 24R ✠ 8
12QC ✠ 36QQ ✠ 51C ✠ 36Q ✠ 12R
8CC ✠ 24QC ✠ 34QQ ✠ 24C ✠ 8Q
———————
8CC ✠ 36QC ✠ 78QQ ✠ 99C ✠ 78Q ✠ 36R ✠ 8

At verò 2 Q ✠ 3 R ✠ 2. Eſſe radicem cubicam propoſiti ſeptinomij : manifeſtè deprehenditur ex opere multiplicationis cubicè factæ.

Nec diſſimiliter erit procedendum in probanda cuiuslibet radicis extractione. Explicata autem radice cubica; ad aliud radicis genus procedamus; Itaq;

Radicis quadrato-quadratæ inuentio.

Quod attinet ad radicem quadrato quadratam, videndum eſt, num ille numerus, cuius QQ, quæritur ſit rationalis. Id autem cognoſcemus aduertendo, num compoſitus numerus ex illis conſtituentibus, ſit rationalis; ita vt habeat radicem quadrato-quadratam. Tunc enim rationalis erit numerus, cuius queritur latus. Secundò ſi latus duas habet figuras, numerus debet habere quinque; ſi tres, debet habere nouem: & ita deinceps ſentiendum eſt in vlterioribus, vt quiſque conijciet.

Deinde ſi rationalis fuerit, dum ſignantur notæ punctis hoc ordine, facto initio à dextris, quinta quæque ſi notetur figura, tribus intermiſſis, in poſtrema ad ſiniſtram cadat vltimum punctum. Deinde in extractione procedatur, vt ſupra; naturam tamen radicis extrahendæ, nimirum QQ; obſeruando.

Non diſſimili modo procedendum erit in radicibus quadrato-cubicis, Cubo-cubicis &c. habita ratione naturæ ſingularum radicum.

Quæ verò ſuperiùs tradita ſunt, intellige ſuppoſitis poteſtatum characteribus analyſi conſentaneis.

Plura hìc dicenda quidem ſupereſſent, quæ ſtudio breuitatis omittimus; eo vel maximè, quòd ex hactenus traditis, exigui laboris ſit cætera exquirere. Illud etiam accedit; quòd longè accommodatiùs, in Speciosa de his agi poteſt; Placuit hic tamen hac de re tractationem inire, cùm numeris huiuſmodi argumentum verſare præſentis ſit loci, eadem tamen præcitato loco cumulatiùs perſequemur.

Nota diligenter.

Obiter hìc animaduertendum occurrit, ſi loquamur de quadrati geneſi, ex binomia radice; exempli gratia 2 R † 5, cuius quadratum eſt 4 Q † 20 R † 25; hoc eſt 4 Q † 10 R † 10 R † 25; terminis conſtare continuè proportionalibus 4 Q; 10 R; 25, in ratione nominum radicis: puta 2 R, & 5, vno tantùm aſſumpto termino, ex æqualibus occurrentibus; Ita pariter eiuſdem radicis binomiæ 2 R † 5, cubum, euiuſmodi eſt 8 C † 60 Q † 150 R † 125; hoc eſt 8 C † 20 Q † 20 Q † 20 Q † 50 R † 50 R † 50 R † 125: conſtare terminis continuè proportionalibus, in ratione nominum ipſius radicis; ſi tamen vnus tantùm ex pluribus æqualibus occurrentibus accipiatur; vt ſunt 8 C, 20 Q, 50 R, 125. Sed hæc perfunctoriè dicta ſint; plura enim in Speciosa.

De ſecundis Radicibus, earumque Algorithmo.

CAPVT VI.

Secundarum radicum algorithmus. Explicatur finis ob quem ſecunda radices adinuenta fuerint.

NON inutiliter excogitatas fuiſſe radices ſecundas, conſtabit profectò ex Problematum reſolutionibus, in quibus illas opus eſt adhibere: cùm enim duo, tres, vel plures quæruntur numeri, ſub incerta ratione, & pro primo poſita eſt 1 R; non eſt oportunum pro ſecundo iterum 1 R, ponere, & ſic pro tertio, &c. ob id eas excogitarunt Artifices, quas aliqui quantitates ſurdas, alij quantitates ſimplices, aut abſolutas appellauere, & his vſi ſunt characteribus 1 Q, 2 Q, &c. hoc eſt, vna quantitas, duæ quantitates &c. Verùm quia 1 R, pretium primo loco poſitæ diuerſum eſt à radice, ſecundo loco, & tertio loco conſtituta &c; niſi characteribus diſtinguerentur, facilè confuſio ſuboriretur, & ita in operationibus radices ipſæ confunderentur, quo factum eſt, vt ſecundæ radices inuenirentur; niſi verò alijs characteribus deſignarentur, in eadem eſſemus difficultate; proinde viſum eſt alijs, ſecundas radices Alphabeti notis deſignare; atque adeo ad denotandam radicem ſecundam diſtinctam ab ea, quæ primo loco poſita eſt, ita ſcribunt 1 A; & ad deſignandam radicem ſecundam diſtinctam à duabus, primo, & ſecundo loco poſitis, hoc vtuntur charactere 1 B; & ita deinceps, &c.

Secundarum radicum numeratio, quo pacto ſe habet.

Harum autem radicum numeratio ſic ſe habet: 1 A, vna ſecunda radix; 3 A, tres ſecundæ radices &c. Cum autem numero duo ſigna annectuntur: intelligitur numerus cum priori charactere, ductus in vnitatem poſterioris ſigni; itaque 1 R A, ſignificat 1 R, ductam in 1 A; & 5 R A, ſignificat 5 R, ductas in 1 A, item 1 Q A, ſignificat 1 Q, ductum in 1 A; & 5 Q A, denotat, 5 Q, ducta in 1 A; ſimiliter 1 Q A Q, ſignificat 1 Q, ductum in 1 A Q.

Secundarum Radicum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Additionis præcepta. Quando radices ſecundæ ſunt eiuſdem generis.

ADditionis perficiendæ forma hæc eſt. Si ſecundæ radices fuerint eiuſdem generis; addantur numeri inter ſe: & idem ſummæ numerorum affigatur character ſecundæ radicis. Itaque ex additione 5 A, ad 10 A, fiunt 15 A; & ex 5 B, ad 10 B, fiunt 15 B, & ita de reliquis.

Quando non ſunt generis eiuſdem.

Cùm autem ſecundæ radices non fuerint eiuſdem generis; fit additio beneficio ſigni +: vt ex 5 A ad 10 B; fieret ſumma 5 A + 10 B, & ex 3 R, ad 5 A, fieret ſumma 3 R + 5 A, & ita de reli-quis ſentiendum eſt.

Secundarum Radicum Subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

Subtractionis præcepta.

SVbtractio hac arte fiet. Si radices fuerint eiuſdem generis, fit ſubtrahendo numerum à numero, & reliquo numero eundem characterem apponendo.

Vt ex 10 A, ſubtrahantur 4 A, remanebunt 6 A, & ex 12 B, ſublatis 5 B, remanebunt 7 B. Quòd ſi ſecundæ radices diuerſæ fuerint, fiet ſubtractio beneficio ſigni —. Itaque ſi 6 B, ſubtrahere debeamus ex 10 A, remanebunt 10 A — 6 B, & ità de reliquis &c.

Digitized by Google

Secundarum Radicum Multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

Multiplicationis præcepta. Multiplicationis exempla.

AD multiplicationem quod attinet, ita procedendum eſt. Cùm numerus primæ radicis multiplicandus eſt per numerum ſecundæ radicis ſignatæ ſolùm nota A, vel B, vel alia, &c. multiplicari debent numeri inter ſe, & eadem ſigna apponi: exempli gratia, ex 1 R, in 1 A, fit 1 R A; hoc eſt, 1 R, ducta in 1 A; nempè prima radix ducta in ſecundam radicem, & ex 1 Q, in 1 A Q fit 1 Q A Q; hoc eſt 1 Q, ductum in 1 A Q, ex 4 R, in 3 A, fiunt 12 R A, hoc eſt 12 R in A, ſcilicet 12 primæ radices ductæ in ſecundam radicem: ità pariter ex 5 A, in 5 R, fiunt 25 A R; nempè 25 A, ductæ in 1 R: ità ex 6 Q, in 4 B, fiunt 24 Q B, hoc eſt 24 Q, ducta in B, &c.

Abſolutus per ſecundam radicem. Secundæ radices diuerſæ inter ſe. Secundæ radices eiuſdem literæ inter ſe. Secundæ radices in ſe quadratè, vel cubicè.

Cùm autem abſolutus numerus in numerum ſecundæ radicis ducitur, fit ſecundæ radicis numerus; vt ex 8 in 4 B, fiunt 32 B: ex 9 in 5 C, fiunt 45 C &c. Si verò numerus ſecundæ radicis ducendus ſit in numerum ſecundæ radicis literæ diuerſæ, ducatur numerus in numerum, productoque eædem apponantur literæ: ſic ex 5 A, in 8 B, fiunt 40 A B; nimirum 40 A, multiplicatæ per 1 B.

Cùm autem ſecundæ radicis numerus ducitur in numerum ſecundæ radicis eiuſdem literæ, producitur character Q; ità tamen, vt eadem præponatur litera: itaque ex 4 A, in 6 A, fiunt 24 A Q.

Cùm numerus ſecundæ radicis ducitur in ſe, quadratè, vel cubicè &c. producitur character Q, vel C &c. præpoſita tamen eadem litera. Itaque 1 A, in ſe multiplicata facit 1 A Q, hoc eſt vnum quadratum ſecundæ radicis: ſenſus enim eſt, vnam ſecundam radicem eſſe quadratè multiplicatam, deindè ex 1 R A, in R A fit 1 Q A Q, hoc eſt 1 Q primæ R ductum in 1 Q ſecundæ R. Secundò ex 1 Q A, in 1 Q A, fit 1 Q Q A Q, hoc eſt 1 Q Q, primæ radicis ductum in 1 Q, ſecundæ radicis. Ità 1 A, in ſe cubicè facit 1 A C: Et 2 A, in ſe cubicè faciunt, 8 A C; ſic de B vel C, &c.

Quando numerus ſecundæ radicis ducitur in numerum alium eiuſdem ſecundæ radicis.

Quando verò ſecundæ radicis numerus, ducitur in numerum alium eiuſdem ſecundæ radicis, quæ habeat characterem denominatum: primus numerus intelligitur habere characterem R; itaque ex 1 A, in 1 A Q; fiet 1 A C, & ex 3 A, in 3 A Q, fient 9 A C.

Quando numerus denominatus ſimplex abſq; nota radicis ſecundæ multiplicatur in numerum ſignatum litera, & ſigno denominato.

Cùm autem numerus denominatus ſimplex abſque nota radicis ſecundæ multiplicatur in numerum ſignatum litera, & ſigno denominato; ducitur numerus in numerum, productoque eadem apponuntur ſigna; vt ex 4 C in 5 A Q, fiunt 20 C A Q hoc eſt 20 C ducti in 1 A Q, nempè volumus ſignificare 20 C, ductos fuiſſe in 1 A Q, ità ex 2 C, in 3 C A Q, fient 6 C C A Q, Item ex 1 C, in 1 R A Q, fit 1 Q Q A Q, hoc eſt, 1 Q Q, ductus in 1 A Q: quantum quoq; fit, ſi 1 Q A, ducatur in ſe quadratè; namque ex 1 Q in ſe fit 1 Q Q, ex 1 A in ſe fit 1 A Q.

Cùm numerus poſt literam ſecundæ radici gerens ſignum dignitatis ducitur in numerum, qui poſt eandem literam ſecundæ radicis gerit quoq; dignitatis ſignum; quid proueniat.

Cum numerus poſt literam ſecundæ radicis, gerens ſignum dignitatis, in numerum ducitur, qui poſt eandem literam ſecundæ radicis gerit quoque ſignum dignitatis, producitur numerus cum charactere, quem exponentes characterum dant; & ei præponi debet litera eadem radicis ſecundæ.

Quamobrem ex 3 A R, in 7 A C, fiunt 21 A Q Q. Inſuper ex 4 A Q, in 5 A C, fiunt 20 A Q C, ſecundum Diophanthum, qui ex Q in C, putat fieri Q C: ſecundum alios fit S S, nempè primus relatus, atque adeò fieret 20 A S S.

At verò cùm numerus poſt literam ſecundæ radicis, gerens poteſtatis characterem, in numerum ducitur, qui poſt characterem poteſtatis habet literam quoque ſecundæ radicis: producitur numerus, cum poſteriori charactere dignitatis, quem ſecundæ radicis litera ſequitur. Mox autem character poteſtatis apponitur, qui emergit, producitur que ex priori charactere in literam ſecundæ radicis; non ſecus ac ſi gereret ſignum, & characterem R: itaque ex 2 A C, in 3 Q A, fiunt 6 Q A Q Q; item ex 1 R A Q, in 1 R A Q, fit 1 Q A Q Q; hoc eſt 1 R A Q, quadratè multiplicata in ſe, facit 1 Q A Q Q, &c.

Se-

Secundarum Radicum Diuiſio.

OPERATIO QVARTA.

QVO verò pacto debeat ſecundarum radicum inſtitui diuiſio, relinquitur explicandum. Priùs autem fieri debet reductio characterum dignitatum, per ſubtractionem ſimilium characterum. Itaque ſi diuidantur 12 R A Q, per 4 A Q; reducantur characteres: & erunt diuidendæ 12 R, per 4, & fiet quotiens 3 R. Inſuper ex diuiſione 10 C A Q; per 5 A Q, fiet quotiens 2 C; priùs ſcilicet reductis ſignis: ſic etiam ſi diuidantur 10 C A Q per 5 C, fiet quotiens 2 A Q. *Precepta diuiſionis.*

Si verò R, diuidi debet per numerum ſecundarum radicum, vt 12 R, per 4 A, fit fractio pro quotiente, & erit $\frac{12R}{4A}$. Inſuper ex diuiſione 20 R, per 5 B, fiet $\frac{20R}{5B}$.

Comprobantur autem operationes iſtę iam dictæ, ſcilicet multiplicatio, & diuiſio, reſolutione ipſarum radicum; tàm primarum, quàm ſecundarum: iuxtà aliquam radicis æſtimationem. Itaque ſupponamus 1 R, pretium eſſe 2, & 1 A eſſe 4. Si diximus ex 3 R, in 3 A, fieri 9 R A, non malè diximus; etenim ſuppoſito 1 R pretio 2, pretium 3 R, erit 6, & quia 1 A, pretium dicimus eſſe 4, ergo 3 A, pretium erit 12. Modò ſi ducantur 6, in 12, fient 72: conſtat autem tantum eſſe pretium ipſarum 9 R A: nam 9 R, pretium eſt 18; qui numerus ſi ducatur in pretium A, videlicet 4, fiet productum 72. Et ita poterit non diſſimili modo in reliquis caſibus inſtitui probatio, nec non facilè demonſtrari. *Supradictarũ operationum comprobatio.*

Vel ſi ſupponamus 1 R, pretium 2, & 1 A, pretium 3; ergo 3 R, pretium erit 6: & quia 1 A, pretium dicebamus eſſe 3; ergò 3 A, pretium erit 9: his ductis in 6, fiunt 54: conſtat autem etiam 9 R A, valere 54, ſi explicetur ſecundam earundem radicum æſtimationem. Huic autem reſolutioni plurimùm inſeruit ſubiecta tabella.

	R	Q	C	QQ	SS	QC	BSS	QQQ	CC	QSS	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Vel iuxta Diophantum, vt videre licèt in adiuncta, tabella, quæ ſicuti præcedens poteſt in infinitum protrahi.

I	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147

Rectè igitur diceremns ex 2 R, in 3 A, fieri 6 R A: ideſt 6 R, ductas in 1 A: ſi namque 1 R, valor dicatur 2, & 1 A dicatur 3; iam 2 R, reſolutæ facient 4, & 3 A, facient 9: at verò 4. in 9, faciunt 36; quantum etiam faciunt 6 R, nempè 12, ductæ in 1 A, nimirum 3.

Sic etiam ex 3 A, in 2 R, fieri 6 A R, hoc eſt 6 A, ductas in 1 R, liquet ex eo, quia 3 A, ſunt 9, & 2 R, ſunt 4: at verò ex 9, in 4, fiunt 36; quantum ſcilicet faciunt 6 A, ideſt 18, in 1 R, nempe in 2.

Si verò multiplicaremus 1 R, in 1 A, produceretur 1 R A; quia 1 R, eſt 2, &

Declaratio ſuperior doctrinæ.

1 A, eſt 3: fiunt autem 6, ex 2, in 3; quantum planè fit ex 1 R, ſcilicet ex 2, in 1 A, ideſt ex 3. Ita quoque ex 1 Q, in A Q, diceremus rectè fieri 1 Q A Q, nempe 1 Q, ductum in 1 A Q: nam 1 Q, eſt 4, & 1 A Q, eſt 9, ex 4, in 9, fiunt 36; quantum fit ex 1 Q, nempe ex 4, in 1 A Q, nimirum 9. Eodem ſanè modo poſſunt explicari alia exempla multiplicationis, itemq; diuiſionis, &c.

Vt ex diuiſione 8 C A Q, per 4 A Q, fit quotiens 2 C; ſiquidem 1 R, pretium eſt 2, cubus erit 8; proinde 8 C, valebunt 64: at verò ſi 1 A, pretium eſt 3, ergo A Q, valebit 9; quamobrem 8 C, ducti in 1 A Q, valebunt 576: hic autem numerus ſi diuidatur per 4 Q, ſecundæ radicis (dicebamus enim diuiſorem eſſe 4 A Q, hoc eſt 36) fiet quotiens 16, hoc eſt 2 C.

Item ex diuiſione 10 C A Q, per 5 C, fit quotiens 2 Q: nam diuidendo 720, per 40, fit quotiens 18; ſiquidem 10 C A Q, valent 720, & 5 C, valent 40, &c.

Secundarum Radicum Extractio.

OPERATIO QVINTA.

Radicum extractio ex ſecundis radicibus.

ERuitur radix ex numero, ſi habet, eique litera ſecundæ radicis apponitur, reiecto charactere denominato, ſiue coſſico. Vt radix quadrata numeri 36 A Q, eſt 6 A; inſuper ℞ C, numeri 27 A C, eſt 3 A: & ℞ QQ, numeri 81 D QQ, eſt 3 D.

Quòd ſi numerus radicem non habet, vel character coſſicus, non eſt eiuſdem appellationis cum radice extrahenda; tunc præponendum eſt toti numero cum littera, & charactere, ſignum radicale, illius nimirum radicis, quæ extrahi debet. Vt radix cubica huius numeri 5 A Q, erit ℞ C 5 A Q, vel radix cubica numeri 8 A Q, erit ℞ C 8 A Q, ſicuti radix quadrata huius numeri 4 A C, erit ℞ Q 4 A C.

Cæterùm non diſſimili modo, ac ſupra factum fuit, poſſunt explicari exempla huius operationis per numeros abſolutos, iuxta aliquam radicis eſtimationem. Rectè namque dicebamus, radicem numeri 36 A Q, eſſe 6 A: propterea quod ſi 1 A, valet 3, ergo A Q, valebit 9; proinde 36 A Q, valebunt 324: quo fit vt ſi eius radix quadrata extrahatur, qualis eſt 18, habeatur valor iſtius numeri 6 A: namque cùm 1 A, valor ſit 3, profectò 6 A, valebunt 18, vt patet. Proindè rectè dicebamus illius numeri 36 A Q, radicem quadratam eſſe 6 A. Non diſſimili modo alia innumera exempla poterunt explicari.

De

De Æquatione Algebrica.

CAPVT VII.

MAgnæ quidem Artis nunc ſacrum opus aggredimur; ſi quid enim humanam mentem Diuinæ auræ partem eſſe teſtatur, illud profectò eſt, quicquid hæc nimirum induſtria complectitur ſua. Sed in primis Æquatio eſt, quam hic explicandam ſuſcipimus.

Æquatio Algebrica quid ſit.

Totum Algebræ artificium conſiſtit in explicanda æquatione, quæ nihil aliud eſt, quàm.

Æqualitatis proportio inter duas quantitates, vel res variè denominatas, ſeu certam, notam ex vna parte, ex alia, incertam, & ignotam, & vt Vieta loquitur, eſt magnitudinis incerta, cum certa comparatio.

Definitionis explicatio.

Cùm enim certam aliquam quantitatem cognoſcimus, &, ex notitia illius deuenimus in cognitionem alterius illi æqualis; hoc enim pacto reperimus, quam progreſſionem Geometricam conſtituat quæſitus numerus ſeù, in quanam progreſſione numerus ille ſortiatur locum vnitati proximum.

Requiſitum ad commemoratam æquationem.

Cæterum æquatio de qua loquimur, neceſſariò debet eſſe inter variè denominata, & inter certum; & incertum, ſeu notum, & ignotum: ſiquidem inter ea, quæ ſunt eiuſdem denominationis, vel inutilis eſt, vt inter 1 0, & 1 0, vel inter 5 R, & 5 R; vel non eſt propriè æqualitas, vt inter 5, & 1 6; Æquatio verò de qua loquimur eſſet, ſi proponeremus 1 R, pretium, exempli gratia eſſe 5; tunc eſſet æquatio inter 1 0 R, & 5 0: ita vt ſi nos 1 R, pretium lateret, & cognoſceremus 1 0 R, æquari 5 0; illico in 1 R, pretij notitiam deueniremus: & ita de reliquis æqualitatis generibus intelligendum eſt. Debet itaque æquatio iſta eſſe proportio æqualitatis inter duas quantitates, ſiue res, quarum vna ſit certa, & nota; altera incerta, & ignota; de his autem iterum in Algebra ſpecioſa loquemur.

Æquatio ſimplex, vel compoſita.
Poteſtas pura, vel affecta.
Æquatio ſimplex, quid.

Varia ſunt autem huius æquationis genera: & primò, vel ſimplex eſt æquatio, vel compoſita. Poteſtas enim, aut pura eſt, aut affecta. Pura autem, & ſimplex æquatio eſt, in qua vnus terminus, vni termino comparatur, cum affectione vacat: vt inter Q, & R, aut inter R, & N; aut, inter, Q & N: & ita ſimplex etiam eſſet, 3 C $\sqsupset$ 24. Cùm itaq; vnus terminus, vni termino comparatur, ſimplex æquatio nuncupatur, tunc enim eſt pura poteſtas.

Æquatio compoſita, quid.
Poteſtas.
Homogeneum comparationis
Gradus parodici.

Quando verò plures poteſtates, ſeu dignitates numero certo comparantur; maior dignitas propriè ſibi hoc Poteſtatis vendicat nomen: & numerus cui dignitates comparantur, Homogeneum comparationis appellatur; vt etiam in ſimplici æquatione. Dignitates autem exiſtentes in æquatione, Gradus parodici ad poteſtatem dicuntur: itaut ad cubum ſint gradus parodici latus, & quadratum; gradus enim parodici, ſunt dignitates infra poteſtatem exiſtentes in æquatione, quemadmodum dictum eſt.

Affectio.
Cataphatica.
Apophatica.
Amphibola.

Poteſtas autem hoc modo ſe habens, Affecta dicitur. Hæc verò affectio, vel eſt per affirmationem, vel per negationem. Affectio per affirmationem ſit per ſignum ✢, diciturque καταφατική affectio; per negationem ſit per ſignum —, & ἀποφατική nuncupatur; at verò ἀμφίβολος, ſeu Ambigua, cùm dignitati maiori, ſiuè Poteſtati præfigitur ſignum —: quoniam hæc æquatio duplicem habet radicem, ideo Ambigua dicitur.

Negatio directa.

Sed cùm afficiens homogeneum de poteſtate negatur, negatio eſt directa, atque adeo æquatio eſt directa: vt 1 Q — 4 R $\sqsupset$ 165, hæc æquatio negata directa eſt; minor enim dignitas R, gerit ſignum negatum —; vel quia homogeneum aſſiciens 4 R, de poteſtate negatur.

Negatio inuerſa.

Cùm autem contra poteſtas negatur de afficiente homogeneo ſub gradu, negatio eſt inuerſa: vt 14 R — 1 Q $\sqsupset$ 48, hæc æquatio inuerſa, & ambigua eſt; ſiquidem dignitati maiori, nimirum 1 Q, ſignum negatum præfigitur, ſcilicet —; ſeu

quia

quia planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati quia verò poteſtas de afficiente homogeneo ſub gradu negatur, indirecta dicitur.

De his autem iterum in Algebra Specioſa agendun erit, ſcilicet de æquatione ſimplici abſolutè, & de Climactica, & Polynomia.

Poteſtas tot affectionibus implicari poteſt, quot ſunt gradus parodici ad poteſtatem.

Animaduertendum autem quot ſunt gradus parodoci ad poteſtates, tot affectionibus poſſe poteſtatem implicari. Itaq; quadratum affici poterit, ſub latere, ſeu radice; Cubus ſub latere, & quadrato; inſuper Quadrato quadratum ſub latere, quadrato, & cubo; præterea Quadrato-cubus, ſub latere, quadrato, cubo, & Quadrato-quadrato; & ita deinceps,

Quot ſi t combinationes, quo modo cognoſcuntur.

Quot autem ſint combinationes ita dignoſcitur. Fiat progreſſio terminorum tot, quot ſunt vnitates exponentis maioris dignitatis; & fiat ipſa iu proportione dupla: à maiori termino ablata vnitate, remanet numerus, iuxta quem ſtatui debet multiplicatio combinationum, Exempli gratia; Quæramus quot combinationes habeat Quadratum; exponens eius eſt 2: ergo fiant duo termini in progreſſione dupla incipiente ab 1, & erit primus terminus 1, ſecundus 2: auferatur 1, ab 2; & remanebit 1; dicemus proindè Q, vnicam habere combinationem, nimirum Q, R, & N. Quæratur numerus combinationum Cubi: eius exponens eſt 3: tres ergo termini fiant in progreſſione dupla, ducente initium ab 1; itaq; erunt 1, 2, 4: à termino maiori ſi auferatur 1, remanebit numerus 3, deſignans tres eſſe combinationes cubi; nempe C, Q, N; item C, R, N. Præterea C, Q, R, N. Et ita conſimili modo procedendum eſt in reliquis dignitatum combinationibus.

Combinationes iſtæ multiplicantur ratione ſignorum +, & —.

Multiplicantur autem hæ combinationes ratione ſignorum +, & —; quo fit, vt Q, tres habeat combinationes Primam; Q + R = N; ſecundam R + N = Q, ſeu Q — R = N, nam iuxta Vietæ ſententiam omnes dignitates ex vna parte conſtituuntur; tertiam R = Q + N, ſeù R — Q = N. Ita etiam pluribus modis, ratione horum ſignorum, variantur reliquæ æquationes.

Pridem haud erat inuenta ars, qua æquationes omnes compoſitæ explicantur.

Cæterum illud eſt in primis aduertendum, ſynceram operationem, ac methodum non ita pridem inuentam fuiſſe explicandi æquationes omnes compoſitas: ſed tantum illas, in quibus termini ſunt Arithmeticè proportionales, ſeù habent eundem exceſſum; vt ſunt intraſcriptæ æquationes,

Q + R = N	....	2	1	0
Q — R = N	....	2	1	0
R — Q = N	....	1	2	0
Q Q + Q = N	....	4	2	0
Q Q — Q = N	....	4	2	0
Q — Q Q = N	....	2	4	0
C C + C = N	....	6	3	0
C C — C = N	....	6	3	0
C — C C = N	....	3	6	0

Et aliæ innumeræ, quæ cauſa breuitatis omittuntur.

Porrò ſi exponentes Arithmeticè proportionales, omnes ſint maiores, quam 0; adhibendi ſunt relicti per ſubtractionem, minimi numeri exponentis, vt reducantur ad illos, In quibus 0, interuenit.

Quando exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionem,

At verò quando exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionem, ſeù non habent eundem exceſſum, vt C + Q = N, quorum exponentes ſunt 3, 2, 0, & C + R = N, vbi exponentes ſunt 3, 1, 0, & C — Q = N, vbi exponentes ſunt 3, 2, 0, & ità de reliquis &c. neque ſeruant eundem exceſſum. Ars latuit hucuſque, qua Radices harum Æquationum extrahatur: Vieta, & alij methodos quaſdam generales tradiderunt, quas inferiùs proſequemur. Vt tamen abſolutiſſimæ, ac generaliſſimę ſint plurimùm elaborauimus vt, ſcilicet in numeris irrationalibus locũ habeant: ac in fractionibus exerceri poſſint; ne methodi ipſæ ſint potiùs tentatiuæ, quàm abſolutæ, vt videbimus. Cùm enim 1 R, pretium numerus eſt irrationalis, vel ſimplex, vel compoſitus, item numerus fractus; regulæ iſtæ nouiter excogitatæ non ſatisfaciunt, niſi maiori induſtria fuerint excultæ.

Quomodo regulæ nouiter excogitatæ inſeruiant,

Quamuis Græci, Latinique ſapientiæ proceres in his literarum præclariorum ſtudijs

dijs contenderint, vt nihil vnquam magis, omnemque curam in ſacratioribus hiſce myſterijs detegendis conſumpſerint, vt æquum, ac iuſtum ſit, eos veluti de Mathematicis rebus optimè meritos, venerari; nihilominus, præſtantiora quædam aggreſſi, ætiopis, vt aiunt, faciem lauarunt: quamobrem plurimum occultæ veritatis poſteritati relinquentes, & ſi amplitudinem ſuam exantlatis laboribus illuſtrarint, ſibique multum exiſtimationis, laudis, honeſtatis aſciſcerint; non omnem gloriam occuparunt, aliquid propterea ſupereſſe, quamuis inuiti, permiſerunt, in quo poſteritatis induſtria ſuos experiretur conatus. Mulier eleganti, præſtantique corpore mundo deſterum pedem ſuperimponens, dextera manu ſolem, ſiniſtra tempus, geſtans, veritatis ſymbolum apud Antiquos extitit, vt accepimus; cæteris prætermiſſis, poſtremum illud, Saturni, hoc eſt diuturni temporis filiam veritatem deſignat, quò ſpectat illud.

Αγει δὲ πρὸς φῶς τὴν ἀλήθειαν χρόνος.

Nec immeritò qudem, nam ſi cælorum eſt incola (liceat in re ſeria iocosè loqui,) qui fieri poterit, vt huc breui deſcendat? Quòd autem, & ſi plerique multos labores in hac Æquationum perſcrutatione pertulerint, nihilque confecerint, neminem admiratio ſubeat, cùm haud raró contingat, vt veritas in lucem, non quæſita veniat,

Ερχεται τἀληθὲς εἰς φῶς ἐνίοτ' οὐ ζητούμενον.

Quamobrem cùm multùm veteres inſudaſſent in æquationibus Algebricis explicandis: denique tantùm aliquas feliciter tractarunt, alias autem poſteris relinquentes, vt pote illas, quæ maiorem *Φιλοπονίαν* requirebant. Quæ autem ſint illæ, in quibus ſumma cum laude ſe geſſerunt: quæque aliæ de quarum explicatione poſteritas gloriatur, inferiùs explicabimus; interim proximum eſt, vt in quo æquatio, de qua loquimur, poſita ſit, aperiamus.

Verùm æquationum explicandarum artificium in pluribus conſiſtit: Quatuor tamen ad ſummum numero ſunt, quæ ad id conducunt; Primum Æquationis inuentio; Secundum inuentæ Æquationis Antitheſis, ſeu contrapoſitio Tertium Paraboliſmus, ſeù Diuiſio, Quartum Analyſis, ſiuè Radicis extractio.

Quatuor ſunt in quibus conſiſtit artificiū explicandarū Æquationum.

Primò enim oportet Æqnationem inuenire; ſecundò ſi opus fuerit, eandem æquationem reducere; tertiò æquationem partiri per numerum Poteſtatis, ſeù dignitatis elatioris; quartò demum cum opus fuerit, Radicem ex quotiente extrahere. Non hæc tamen omnia neceſsaria ſunt; ſed duo perpetuò requiruntur: Inuentio æquationis, & Diuiſio. De his ergo ſingillatim agendum ſupereſt: & primò de Æquationis inuentione.

Superiùs dicta explicantur.

Mirum eſt autem quantum ſolertię debeat artifex adhibere, in inuenienda æquatione; plerumque enim contingit, vt quantitates ignotæ artificiosè tractentur, inutiliter tamen, cùm exploratum non ſit quicquam, neque notum, cum quo collatis ignotis, quantitas in quæſtione poſita prodeat in lucem, adeout abſoluta operatione, id innoteſcat, quod artifex ſibi indagandum propoſuerat.

Magna induſtria in inuenienda æquatione.

Enitendum eſt igitur, vt explicetur, qua ratione æquatio ipſa poſſit inueniri.

De

De Æquationis Inuentione.

CAPVT VIII.

Aequationis inuentio. Quid Analyſta curare debeat.

QVocunque propoſito Problemate reſoluendo, debet illud in primis Analyſta curare, vt ad aliquam æquationem perueniat: & vt hoc aſſequatur pro quæſito numero ponant Radicem; aduertendo, quòd ſi numerus quæſitus ſimplicem longitudinem importet, pro eo ponatur Radix; ſi ſit numerus planus, ponatur Quadratum; ſi ſolidus, ponatur Cubus; deinde tractetur ipſe numerus denominatus iuxta legem propoſitæ quæſtionis, quod quiſque potiùs exercitatione, & vſu, quàm præceptis conſequetur; aduertendo, quòd repertis tribus numeris proportionalibus, fiat æquatio inter quadratum medij, & factum ſub extremis: ſi quatuor, inter factum ſub extremis, & factum ſub medijs: inſuper ſi eidem, vel eiſdem numeris inueniantur ignoti numeri æquales, fiant æquales inter ſe: & alia huiuſmodi memoria teneat.

Exemplum primum.

Sit datum reſoluendum Problema.

Propoſitum numerum in duas partes diuidere, quarum data ſit differentia.

Aequationis inuentio.

Pono itaque numerum diuidendum, exempli gratia eſſe 100, & differentiam datam eſſe 20. Pars minor propoſiti numeri eſto 1 R; maior ergo erit 1 R + 20: cùm enim vna debeat alteram excedere data differentia 20, ſi pars vna eſt 1 R, alia neceſſariò, erit 1 R + 20, harum autem partium ſumma eſt 2 R + 20; quæ æquatur propoſito numero diuidendo 100. Vide igitur qua arte tractari debeant numeri, iuxta quæſtionis tenorem, eſt autem certum omnes partes ſimul ſumptas æquari toti. Cùm totum ſit 100, neceſſe eſt harum partium ſummam 2 R + 20, æquari 100; & ita nos ad æqualitatem peruenimus.

Exemplum ſecundum.

Rurſus propoſitum ſit illud Problema reſoluere.

Data ſumma duorum numerorum, & plano ſub ipſis, reperire numeros.

Data ſit numerorum ſumma 15, & planum ſub ipſis 50. Eſto numerus vnus 1 R, alter ob id erit 15 — 1 R: idque manifeſtum eſt, ſiquidem ſi è ſumma duorum numerorum, auferatur vnus, reliquus erit alter quæſitus. Planum autem ſub his eſt 15 R — 1 Q: & quia planum ſub quæſitis numeris eſt 50; neceſſe eſt hoc planum 15 R — 1 Q, æquari 50: & ita ad æqualitatem peruenimus.

Exemplum tertium.

Inſuper propoſitum ſit Problema.

Datum numerum, in data ratione partiri.

Datus ſit numerus 35, & ratio, vt 2, ad 5. Eſto numeri pars vna 1 R, alia neceſſariò erit 35 — 1 R: vt autem eſt 2, ad 5, ita debet eſse 1 R; ad 35 — 1 R; quare cum ſint proportionales, erit factum ſub extremis 70 — 2 R, æquale 5R: facto ſub medijs & ita ad æqualitatem peruenimus: aduertentes factum ſub extremis æquari facto ſub medijs. Neque diſſimili modo in alijs Problematibus procedendum erit. Methodus autem vt diximus, prompta, & expedita, potiùs exercitatione, quàm præceptis comparatur.

Exemplum quartum.

Proponatur hoc aliud Problema.

Quatuor numeros reperire ea lege: vt primus cum ſecundo, & tertio faciat 45, ſecundus cum tertio, & quarto efficiat 65; tertius cum quarto, & primo faciant 60; quartus autem cum primo, & ſecundo efficiant 55.

Quatuor numeri ſimul ſint 1 R: ex hac autem ſubtractis prioribus tribus, qui dicebantur conficere 45, erit ob id quartus 1 R — 45; quamobrem primus erit 1 R — 65; proinde ſecundus erit 1 R — 60; atque demum tertius erit 1 R — 55: hi autem omnes deberent efficere 1 R; ſed conficiunt 4 R — 225: proinde erit æquatio inter 1 A, & 4 R — 225. Vide igitur qua arte ad æqualitatem perueniatur.

Exemplum quintum.

Rurſus propoſitum ſit Problema.

Datum numerum in duos cubos partiri, quorum laterum ſumma data eſt.

Hic

Hoc Problema determinationem habet, quam hic ſilentio prætereo; ſiquidem illud afferò tantùm ad æquationem explicandam.

Datus ſit numerus 224, diuidendus, vt Problema requirit, nempe in duos cubos, quorum latera faciant 8: prioris cubi latus eſto 1 R + 4, hoc eſt plus dimidio ſummæ laterum; relinquitur proinde alterius cubi latus 4 — 1 R: cubi verò ipſi erunt ſimul 24 Q + 128, & hi erunt æquales dato numero 224.

1 C + 12 Q + 48 R + 64
64 + 12 Q — 48 R — 1 C
―――――――――
24 Q + 128 = 224

Dato aggregato trium numerorum proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, diſtinguere ſingulos. Exemplum ſextum.

Datus ſit numerus 26, ſumma omnium. Sit autem 328, aggregatum quadratorum ab extremis. Medius ex tribus quæſitis numeris eſto 1 R: ergo ſumma extremorum erit 26 — 1 R. Huius autem quadratum eſt 676 — 52 R + 1 Q, continetque quadrata extremorum, plus duplo medij quadrato, vt alibi demonſtrauimus. Inde igitur ablato duplo quadrato medij nimirum, 2 Q, reſtabit aggregatum quadratorum ab extremis 676 — 52 R — 1 Q, æquale 328.

26 — 1 R
26 — 1 R
―――――――――
— 26 R + 1 Q
676 — 26 R
―――――――――
676 — 52 R + 1 Q
2 Q
―――――――――
676 — 52 R — 1 Q = 328

Numerum inuenire, cuius quadrato, multiplicato in datum numerum, procreetur numerus, à quo ſi alius datus numerus ſubtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus. Exemplum ſeptimum.

Sit numerus inueniendus, cuius quadrato multiplicato in 5, fiat numerus, à quo ſi demantur 200, remaneat numerus 800, Quæſitus numerus eſto 1 R, quę ducta in ſe facit 1 Q, hoc autem ducto in 5, fit numerus 5 Q, à quo ſi ſubtrahantur 200, remanent 5 Q — 200, quę debent æquari 800.

Inſuper propoſitum ſit hoc aliud Problema.

Numerum inuenire, qui inter duos medius ſit, iſque ſuperet minorem dato numero, ſuperetúrque, à maiori, numero dato quolibet, & duo extremi efficiant ſummam datam quamcunque. Exemplum octauum.

Sit iniunctum reperire numerum medium inter duos ſummam efficientes 62; adeò vt hic ſuperet minorem numero 12, & ſuperetur à maiori numero 10, cùm igitur maior ſuperet medium numero 10, & medius minorem numero 12; ergo maior ſuperabit minorem numero 22. Oportet itaque diuidere numerum 62, in duos numeros, quorum differentia ſit 22: ſi namque minori inuento addatur numerus 12, habebitur numerus medius quæſitus. Pars minor eſto 1 R, altera nempè maior erit 62 — 1 R, harum autem differentia eſt 62 — 2 R, & æquabitur 22, & ita ſumus æquationem conſecuti.

Duos numeros reperire, quorum productum ſit 20, & differentia quadratorum ſit 96. Exemplum nonum.

Dico minorem ex numeris quæſitis eſſe 1 R: cùm igitur productus numerus debeat eſſe 20, erit alter $\frac{20}{1R}$. Nam producto ſub duobus numeris diuiſo per vnum ex illis duobus, exhibetur alter. Horum autem quadrata ſunt 1 Q, & $\frac{400}{1Q}$. Quoniam autem 1 R, ponitur eſſe minor illorum numerorum; erit proinde 1 Q, minus quadratum, quo ſubtracto de $\frac{400}{1Q}$, reſiduum erit $\frac{400}{1Q}$ — 1 Q, hæc erit differentia quadratorum; quamobrem erit æquatio inter 96, & $\frac{400}{1Q}$ — 1 Q, & ita ad æquationem deuentum eſt.

Propoſitum numerum diuidere in duas partes, quarum quadrata datam habeant rationem. Exemplum decimum.

Sit iniunctum diuidere 5, in duas partes, quarum quadrata habeant rationem; vt 2, ad 3; Minor pars eſto 1 R, maior igitur erit 5 — 1 R, harum autem quadrata ſunt 1 Q, & 25 + 1 Q — 10 R, proindè erit 1 Q, ad 25 + 1 Q — 10 R, vt 2, ad 3, atque adeò numerus productus ſub extremis, æquabitur fa-

cto ſub medijs, ob id $50 + 2\,Q - 20\,R = 3\,Q$.

* 1. *Datum numerum in duos numeros partiri, itaut, quadratum maioris ad quadratum minoris, rationem habeat datam.*

Datus ſit numerus 40, diuidendus in duas partes, vt maioris quadratum, ad quadratum minoris, rationem habeat, vt 9. ad 4. nempe duplam ſexquiquartam. Maior pars eſto 1 R, proinde minor erit $40 - 1\,R$; illius quadratum eſt 1 Q, quod ad quadratum alterius debet eſſe vt 9. ad 4. Alterius autem quadratum eſt $1600 - 80\,R + 1\,Q$, quo ducto in $2\frac{1}{4}$; fiet æquatio inter 1 Q, & $\frac{14400 - 720\,R + 9\,Q}{4}$ quandoquidem ſi quadratum illius, quæ ponebatur 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, debet eſſe ad $1600 + 80\,R + 1\,Q$, quadratum alterius, vt 9. ad 4. proinde, cùm ratio ſit dupla ſexquiquarta, neceſſe eſt quadratum illud $1600 + 80\,R + 1\,Q$, ductum in $2\frac{1}{4}$, æquale eſſe quadrato alteri, quod erat, 1 Q, & ita ad æquationem per ventum erit.

* 2. *Dato numero, alium reperire, per quem ſi diuidatur datus numerus, fiat quotiens, ſuperans numerum inuentum, dato interuallo.*

Datus ſit numerus 60, ſit autem reperiendus alius; per quem ſi diuidatur 60, fiat numerus quotiens ſuperans inuentum diuiſorem numero 17. Quæſitus numerus eſto 1 R erit igitur quotiens $\frac{60}{1\,R}$ qui ſuperat diuiſorem 1 R, hoc interuallo puta $\frac{60 - 1\,Q}{1\,R}$. Nam ſi ex $\frac{60}{1\,R}$ ſubtrahatur 1 R, fiet reſiduum $\frac{60}{1\,R} - 1\,R$, ſeu quod idem eſt $\frac{60 - 1\,Q}{1\,R}$; hic autem reſiduus numerus debet eſſe æqualis 17. Ac proinde emerget æquatio inter $\frac{60 - 1\,Q}{1\,R}$, & 17. Atque adeo ad æquationem peruentum erit.

* 3. *Datum numerum in duos diuidere, vt horum radices inter ſe ducta, faciant datum quemcumq; numerum.*

Datus ſit numerus 12, diuidendus in duos, quorum radices inter ſe ductæ faciant 5: Vnus ex quæſitis numeris eſto 1 R, alter erit $12 - 1\,R$; Radix quadrata illius eſt ℞ 1 R, iſtius verò eſt ℞ $(12 - 1\,R)$ quæ inter ſe ductæ faciunt ℞ $(12\,R - 1\,Q)$, & hoc æquale eſſe debet dato numero 5. & ſic ad æquationem peruenitur.

Afferemus autem vnum, vel alterum exemplum eorum ænigmatum, quæ ſunt ad res materiales contracta, deindè alia ad res Geometricas, vt quiſq; videat methodum procedendi ad æquationem inquirendam.

Exemplum decimum primũ. *Tantam habeo pecuniam, vt ſi ad ipſam accederent $\frac{1}{2}|\frac{1}{3}|\frac{1}{4}$, & à ſumma detraheretur $\frac{1}{12}$, eiuſdem pecunia, quam habeo, tunc haberem aureos 120, quaritur quanta ſit mea pecunia.*

Aureorum ſumma eſto 1 R, ad hanc ſi accedant $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{4}$ R, facientes $1\frac{1}{12}$ R fiet tota pecunia $2\frac{1}{12}$ R, ablata verò hinc; $\frac{1}{12}$ R, relinquentur $2\,R = 120$; & ita ad æqualitatem peruentum erit.

Exemplum decimum ſecundum. *Viator ſingulis diebus, 10, milliaria conficit, alius, autem duodecimo poſt die elapſo, idem iter aggreditur. Quaritur quot milliaria debeat poſterior conficere, vt priorem 20, diebus aſſequatur.*

Aequationis indagatio. Pono 1 R, milliariorum: proinde in 20, diebus conficiet 20 R, milliariorum; at verò prior ſingulis diebus conficiens 10, milliaria, abſoluet in 20, diebus 200, milliaria; additis autem huic milliariorum numero 120, milliarijs, quæ iam ille 12, diebus confecerat, erit totus numerus milliariorum 320, quamobrem erit æquatio $20\,R = 320$:

Eius de inuentio.

Exemplum decimum tertium. *Dua ſunt militum turma, quarum vna ſuperat alteram 90, militibus; ſit autem in vtraque diſtributio nummorum aureorum 600, quilibet autem minoris turma accipit 6, aureos amplius, quàm quilibet maioris: quaritur quot ſint milites in qualibet turma.*

Hoc nil aliud eſt, quàm diuidere 600, per duos numeros, quorum minor, à maiori excedatur numero 90, & ſit quotus prioris diuiſionis maior quoto poſterioris numero 6.

Minor diuiſor eſto 1 R, maior igitur erit $1\,R + 90$, per quos ſi diuidatur numerus 600, prouenient $\frac{600}{1\,R}$, & $\frac{600}{1\,R + 90}$; quoniam autem prior quotus poſteriorem ſuperat numero 6, ob id poſteriori debent addi 6, vt fiat $6 + \frac{600}{1\,R + 90}$ quamobrem erit æquatio huiuſmodi $\frac{600}{1\,R} = 6 + \frac{600}{1\,R + 90}$.

Problemata ad res Geometricas pertinentia hæc ſint.

Exemplum decimum quartum. *Propoſitum ſit rectangulum ABCD, cuius area ſit 40, & proportio laterum ſit, vt 5, ad 1, quaruntur latera.*

Latus

Latus B C, minus ſcilicet, dico eſſe 1 R, erit igitur C D, maius 5 R, hoc enim modo prædicta latera ſeruant conſtitutam proportionem; quamobrem 1 R, ſi ducatur in 5 R, ſient 5 Q, area eiuſdem rectanguli, ſiquidem hæc habetur per multiplicationem vnius lateris in aliud, proinde fiet æquatio 5 Q ⊏ 40.

Æquationis indagatio.

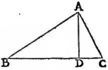
Eiuſdem inuentio.



Propoſitum ſit triangulum A B C, cuius ſit latus vnum B C, 46, aliud B A, 30, tertium denique A C, 20, quæritur autem in quales partes perpendicularis A D, diuidat B C, nimirum quanta ſit B D, & quanta D C. *Exemplum decimum-quintum.*

Pono B D, eſſe 1 R; ergo D C, erit 46 — 1 R, quoniam autem (per 47 primi) quadratum lateris A B, æquale eſt quadratis B D, & D A, ſi à 900, quadrato ex 30, nempè A B, ſubtraxero 1 Q. nimirum quadratum ex B D, remanebit 900 — 1 Q; ſi verò (ob eandem 47.) ſubtraxero 2116 — 92 R ✣ 1 Q; quadratum ex D C; ſubtraxero inquam ex 400, quadrato ipſius A C, remanebit 92 R — 1716 — 1 Q. At verò remanebat 900 — Q, pro quadrato perpendicularis A D, & remanet etiam 92 R — 1716 — 1 Q, pro quadrato eiuſdem. Ob id erit æquatio 900 — 1 Q ⊏ 92 R — 1716 — 1 Q; & hac arte licuit ad æqualitatem peruenire. Methodus autem perueniendi ad ipſam æquationem conſtabit magis ex analyſi variorum Problematum, quàm ſuo loco ad maiorem huius artis illuſtrationem afferemus.

Æquationis inuentio.



Iſoſcelis trianguli data baſe dataque ratione, quam habet eius area ad quadratum vnius ex cruribus reperire triangulum. Oportet autem rationem datam ita eſſe minoris ad maius, vt minor terminus: minor ſit dimidio termini maioris. *Exemplū decimū ſextum.*

Data ſit baſis 6; ratio data ſit vt 1 ad 2 $\frac{1}{3}$.

Perpendicularis eſto 1 R, ſemibaſis erit 3, rectangulum verò ſub perpendiculo, & ſemibaſi erit 3 R, hæc autem æquabitur areæ ipſius trianguli, vt patet ex Elementis: Quare vt 1 ad 2 $\frac{1}{3}$ ita debet eſſe 3 R ad quadratum vnius ex cruribus. Cùm autem perpendiculum ſit 1 R, ſemibaſis autem 3. rectangulm erit 3 R, & quadratum cruris erit 1 Q ✣ 9. Proinde, vt 1 ad 2 $\frac{1}{3}$ ita 3 R, ad 1 Q ✣ 9, Multiplicatis extremis, & medijs inter ſe, fiet æquatio huiuſmodi 6 $\frac{1}{2}$ R ⊏ 1 Q ✣ 9. Et ita ad æqualitatem deuentum erit.

Data baſe trianguli æquicruri, dataque ratione, quam habet area trianguli, plus quadrato catheti, ad quadratum cruris, reperire triangulum. *Exemplū decimum ſeptimum.*

Data ſit baſis 4; ratio autem, quam habere debet area trianguli, plus quadrato catheti, ad quadratum crutis ſit, vt quæſitus cath etus ad 5.

Cathetus eſto 1 R, ratio erit, vt 1 R ad 5. Cum autem baſis ſit 4 ſemibaſis erit 2; cumque cathetus ſit 1 R, area erit 2 R, cui addito 1 Q, fiet 2 R ✣ 1 Q. Quod erit area trianguli, plus quadrato catheti, Cum autem cathetus ſit 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, & quadratum ſemibaſeos ſit 4, ſiquidem ſemibaſis eſt 2 horum aggregatum eſt 1 Q ✣ 4, & tantum erit ex 47 primi, quadratum cruris; proinde erit, vt 1 R ad 5; ita 2 R ✣ 1 Q ad 1 Q ✣ 4. Quare multiplicatis extremis, & medijs inter ſe, fiet æquatio huiuſmodi 1 C — 5 Q ⊏ 6 R. Vide igitur qua arte ad æquationem Analyſta perueniat.

Cæterùm ne me carpas velim, benigne Lector, quòd exemplorum loco Problemata quędam veterum Analyſtarum attulerim, non autem omnia, quæ proprio marte excogitauerim, quandoquidem ad explicationem doctrinæ parui refert, num ego, vel alter ipſa Problemata reperierit; non enim hęc ad oſtentationem ingenij, ſed potius ad maiorem Artis explicationem afferimus. Multa verò Problemata poſteriùs enodabimus, in quibus totius artis proceſſum conſpicere licebit. *Monitum.*

Antitheſis.

De Reductione, vel Tranſpoſitione Æquationis, quæ Ἀντίθεσις, conſueuit appellari.

CAPVT IX.

ANtitheſis, græcè Ἀντίθεσις, contentionem, controuerſiam, contradictionem, oppoſitionem, ſignificat, & apud Rhetores color quidam eſt oratorius, atque apud Hermogenem ἀντίθεσις λόγων, eſt diſputationum pugna. Hic autem vſurpatur, pro contrapoſitione eorum, quæ in alicuius iam explicatæ æquationis partibus reperiuntur, adeo vt, quod eſt in vna æquationis parte, ſi ex illa auferatur, ex altera quoque illi æquale contrapoſitum auferatur, æquatione non immutata, idem de additione dicendum. Quamobrem cùm tranſpoſitio hæc contrapoſitionem inuoluat, huiuſmodi operatio antitheſis appellatur; cum alioquin ex vi ſua tantum quæ diximus ſignificet. Ea verò ſic deſcribi ſolet.

Antitheſis, quid ſit. *Antitheſis eſt numeri, ſeù quantitatis ex vna æquationis parte, in alteram partem ſub contraria nota affectionis tranſpoſitio.* Itaut ſi quantitas aliqua afficiatur hoc ſigno +, per Antitheſin euadat affecta hac nota −, & contra.

Ad quid ſit opus Antitheſi. Per Antitheſin autem, ſecundum quoſdam, reducitur ex vna æquationis parte ſola Poteſtas, ſeu dignitas maior. Dicunt enim, cùm in ſolutione alicuius Problematis ad æquationem deuentum fuerit; ita vt per numerum maioris characteris coſſici reliquus numerus æquationis diuidi non poſſit: tunc æquationis reductio fieri debet priùs quàm diuiſio inſtituatur. Tunc autem diuiſionem fieri non poſſe dicunt, cum maior dignitas, vel character, per cuius numerum fieri debet diuiſio, vel non ſolus ponitur in altera parte æquationis, vel, & ſi ſolus ponitur, tamen in reliqua parte quoque idem character reperitur. Vt ſi eſſet æquatio 6 R − 10 = 50, deberet priùs reduci ad hanc 6 R = 60, antequam inſtitueretur diuiſio per 6, numerm maioris characteris; quoniam non ſolùm 6 R, conſtituunt alteram æquationis partem; ſed 6 R − 10. Sic etiam ſi æquatio foret inter 6 R, & 80 − 2 R, non poſſet inſtitui diuiſio per 6, numerum huius characteris R: quoniam etiam ſi numerus hic 6 R, ſolus occupet alteram partem; æquationis idem nihilominus character in altera æquationis parte reperitur. Ita quoque ſi foret æquatio inter 6 R + 15, & 95 − 2 R, nulla poſſet fieri diuiſio; quoniam in vtraque parte ipſius æquationis reperitur idem character R, & numerus abſolutus. In omnibus autem ſupradictis æquationibus 1 R, valor eſt 10; ſi fiat reductio, vt dictum eſt, inſtituta diuiſione, elicietur 1 R, pretium 10; vt quiſque poterit experiri. Ita etiam dicunt, vt ſola maior dignitas ex vna æquationis parte exiſtat, hanc æquationem 52 R − 1 Q = 576, in qua 1 R pretium eſt 16, reducendam priùs eſſe ad

Exempla. hanc 52 R = 1 Q + 576, & demum ad 52 R − 576 = 1 Q, ſeu 1 Q = 52 R − 576. Ita ſi eſſet æquatio inter 1 Q − 96, & 10 R, in qua æquatione 1 R, pretium eſt 16, ad hanc reducendam eſſe volunt 1 Q = 10 R + 96. Præterea ſi eſſet æquatio inter 166 + 24 R, & 2 Q − 4 R + 102: primò reducenda eſſet per reſtaurationem − 4 R, ad hanc æquationem, ſcilicet inter 166 + 28 R, & 2 Q + 102: ſecundò hæc per tranſpoſitionem huius + 102, hoc eſt per ſubtractionem ex vtraque parte, ad hanc reducenda foret, videlicet inter 2 Q, & 28 R + 64, in qua æquatione itidem 1 R, valor eſt 16. Itaque illi qui putant collocandam eſſe poteſtatem ſolam ex vna ipſius æquationis parte, arbitrantur Paraboliſmum, ſiue diuiſionem per numerum maioris poteſtatis fieri non poſſe, niſi hoc pacto reductio fiat, quemadmodum neque ipſam diuiſionem inſtitui poſſe, quando in vtraque æquationis parte eadem reperitur dignitas, ſiue poteſtas, vel numerus abſolutus vtrobique inueniatur. Exempli gratia. Si eſſet æquatio 6 R + 10 = 70 + 2 R, vides in vtraque æquationis parte reperiri R, & numerum abſolutum; ob id priùs ad hanc æquationem 4 R = 60, deuenire oportet, quàm inſtituatur diuiſio. Sic

etiam

Digitized by Google

etiam de alijs æquationibus ſimilibus, vt conſtare poteſt, ex ſuperioribus exemplis.

Vieta ponit omnes dignitates ex vna æquationi parte.

Nos autem cum Vieta, hac ſola de cauſa putamus inſtituendam eſſe Antitheſin; non quia ex vna æquationis parte ſola maior dignitas eſſe debeat; ſed quia dignitates debeant omnes ex vna parte exiſtere: & inſuper, quia eadem dignitas ex vtraque parte eſſe non debet; ſicuti neque numerus abſolutus debet in vtraque æquationis parte conſtitui.

Antitheſis fundamentum quid.

Totum autem Antitheſis artificium innititur illis communibus animi conceptibus, *Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent ſunt æqualia. Et ſi æqualibus æqualia addantur compoſita ſunt æqualia.* Hæc autem exemplis declarabimus.

Quid aduertendum circa Antitheſim. Reductio ſigni —, reſtauratio nuncupatur. Reductio ſigni †, fit ſubtractione, vt ſigni —, fit additione.

Animaduertendum autem reductionis initium ſumendum eſſe à ſigno —: à defectu itaque ſumi debet initium, ſi nimirum defectus adſit. Deindè debet Analyſta pergere in reductione, videlicet reducendo ſignum +. Reductio ſigni — nuncupatur Reſtauratio; Et fit per additionem. Reductio ſigni + fit per ſubtractionem, vt inferiùs conſtabit, & vt paucis perſtringam, numerus negatus, ſiuè affectus ſigno —, vtrique æquationis parti addendus eſt; & tunc inſtituenda reductio, id eſt numerus affirmatus, ſiue affectus ſigno + ex vna parte in alteram transponendus eſt, hoc eſt auferri debet ex vtraque parte.

Antitheſis artificium duobus præceptis continetur.

Hæc autem Reſtauratio, ſiue additio, & transpoſitio, ſiue ſubductio, quantumuis rectè fiat per regulam additionis, & ſubtractionis; tota tamen Reductionis, & Antitheſis ars, duobus præceptis continetur, vt infra dicam.

Declaratur ſuperior doctrina.

Sit æquatio huiuſmodi 2 Q + 36 + 12 R = 116; in qua æquatione 1 R valor, eſt 4: hæc reuocabitur ad hanc 2 Q + 12 R = 80, nempe,

$$\begin{array}{r} 2\,Q + 36 + 12\,R = 116 \\ +36 \qquad\qquad +36 \\ \hline 2\,Q + 12\,R = 80 \end{array}$$

Detracto numero 36, vtrinque, ſi quis vellet ſolam ex vna parte æquationis maiorem dignitatem; ita ſe haberet æquatio, 2 Q = 80 — 12 R. Hoc magis conſtabit ſi reſoluatur æquatio in numeros abſolutos, erit enim huiuſmodi.

$$\begin{array}{l} 32 + 36 + 48 = 116 \\ 36 \\ 48 \\ \hline 116 \end{array}$$

Reductionis ratio.

Si 1 R, pretium ſit 4; modò reducta erit 32 + 48 = 80. Ratio autem ſuperiùs inſinuata eſt: cùm enim æqualitas ſit inter 2 Q + 36 + 12 R, & 116, neceſſe eſt, ſi idem vtrinque auferatur, nimirum numerus 36, remanere æqualitatem inter reſidua. Deinde propoſita æquatio hæc 256 + 2 Q — 32 R = 160, reuocabitur primò ad hanc 256 + 2 Q = 160 + 32 R nempe additione numeri — 32 R, vtrobique facta: deinde verò vtrinque auferendo 160, remanebit æquatio huiuſmodi 96 + 2 Q = 32 R; mox verò ſi vtrinque auferantur 2 Q, fiet æquatio 32 R — 2 Q = 96. Quòd ſi numerus maioris dignitatis ex vna æquationis parte ſolus deberet remanere; fieret æquatio talis 2 Q = 32 R — 96. Pretium 1 R, eſt 4, vel 12, vterque numerus ſatisfacit, Itaque reſoluta Æquatione 256 † 2 Q — 32 R = 160 in numeros abſolutos, erit æquatio 256 † 32 — 128 = 160: quæ reuocabitur primò ad hanc 256 † 32 = 160 † 128, nempè additione 128, ex vtraq; parte; & vtrinque ablatis 160, remanebit æquatio 96 † 32 = 128.

Præceptum.

In huiuſmodi autem operatione cernere licet, quod communiter dici ſolet, *Quicquid tranſponitur mutat ſignum:* nempe quod illa particula æquationis, quæ gerit ſignum † transpoſita in alteram æquationis partem, acquirit ſignum —; hoc eſt ſubtrahitur ab altera æquationis parte: & illa, quæ habet ſignum — ſi transponatur

Idem præceptum alijs verbis conceptum.

tur

tur, acquirit contrariam affectionis notam, nempe †; nimirum additur alteri æquationis parti.

Inſuper, *Eadem ſigna ſubtrahunt*, *Diuerſa verò addunt*, ſeu, vt alij loquuntur, *Homogenea ſigna negant*, *Heterogenea affirmant*. Huius autem præcepti ſenſus eſt iſte, videlicet.

Eiuſdem præcepti ſenſus.

Si aliqua æquationis particula tranſponenda, gerens alterum ex duobus ſignis †, & —, in altera æquationis parte habuerit numerum maiorem denominationis eiuſdem cum eodem ſigno; fieri debet numerorum ſubtractio, & idem relinquendum ſignum † vel — ipſi reſiduo. Vt ſuperiùs, quoniam tàm numerus 160 quàm 256, habet ſignum †; ideo fieri debet numerorum ſubtractio, & reſiduo 96, præponendum idem ſignum. Quod ſi eſſet æquatio cum ſigno — ex vtraque parte & afficeret numeros eiuſdem denominationis, idem agendum eſſet. Vt ſi ſit æquatio iſta, in qua 1 R, valor eſt 6; ſit inquam æquatio huiuſmodi 9 R — 15 = 15 R — 51; quoniam tàm 15, quàm 51, idem habent ſignum — proinde, vt tranſponantur 15, debent auferri à 51, & idem relinquendum ſignum —, itaut remaneat æquatio 9 R = 15 R — 36: modò quia tam 9 R, quam 15 R, idem habent ſignum †, proinde auferantur 9 R, abs 15 R, & remanebit æquatio 0 R = 6 R — 36; nunc vtrinque addantur 36, fiet æquatio huiuſmodi 6 R = 36: & ita in reliquis caſibus procedendum erit. Sit rurſus æquatio 54 † 4 R = 1 Q — 6 R † 30, Quoniam † 4 R, & — 6 R, diuerſis ſignis afficiuntur; ob id adduntur 4 R, ad 6 R, vt fiant — 10 R; atque adeo ſit æquatio 1 Q — 10 R † 30 = 54. Quoniam autem 54, & 30, habent idem ſignum †, propterea debent ſubtrahi 30, à 54, vt remaneat æquatio huiuſmodi 1 Q — 10 R = 24. Vel ſi eſt 54 † 4 R = 1 Q — 6 R † 30, fiet 54 † 10 R = 1 Q † 30, & rurſus proueniet 24 † 10 R = 1 Q; atque demum 1 Q — 10 R = 24. Hæc autem examinari poſſunt per radicis pretium, quod ſupponimus eſſe 12. Sit rurſus æquatio 1 Q † 4 R † 42 = 10 R † 1 Q; vtrinque auferatur 1 Q, remanebit æquatio hæc 4 R † 42 = 10 R: rurſus vtrinque ſublatis 4 R, & remanebit 6 R = 42.

Quando eſt æquatio cum ſigno —.

Exempla ad ſuperiorem doctrinam illuſtrandam.

In quo demũ Antitheſis cõſiſtat explicatur.

Antitheſis itaque in eo tota poſita eſt, quod ſuperiùs innuimus, ſcilicet in tranſpoſitione particularum. Cæterum hęc duo præcepta excogitarunt Artifices pro huius operationis compendio. Ad hanc autem operationem ritè exercendam, Additionis, & ſubtractionis regulæ ſufficere poſſunt. Supereſt vt hic verba faciamus de reductione æquationum inter fractiones, & inter numeros denominatos irrationales, & abſolutos numeros. De hoc iterum verò ſermo redibit Capit. de Paraboliſmo.

Reductio æquationum inter fractiones fit multiplicatione per cruce.

Reductio æquationis inter minutias fit multiplicatione per crucem, & reducitur ad æquationem integrorum; vt ſi eſſet æquatio $\frac{6R † 24}{5} = \frac{72 Q — 396 R}{3 R}$, multiplicentur in crucem, nempè 6 R † 24 in 3 R, & 72 Q — 396 R in 5, & fient producta 18 Q † 72 R = 360 Q — 1980 R; & per characterum abbreuiationem 18 R † 72 = 360 R — 1980; & per abbreuiationem numerorum 1 R † 4 = 20 R — 110: ac proindè 19 R = 114.

Numerorum abſolutorum exemplo ſuperior operatio illuſtratur.

Hæc autem operatio illuſtrior euadet, ſi reducantur omnes numeri in numeros abſolutos. Quamobrem ſit rurſus æquatio $\frac{840}{4 R}$ = 12 † 6 R; facta multiplicatione per crucem, reducetur ad hanc 48 R † 24 Q = 840; & facta abbreuiatione numerorum, per diuiſionem fiet 2 R † 1 Q = 35; huius autem æquationis Analyſi instituta reperietur 1 R, valor 5: ſecundum quod quidem pretium reſoluta æquatione in numeros abſolutos, comperiemus operationem rectè inſtitutam fuiſſe; Sit rurſus æquatio $\frac{3 R † 200}{40}$ = 6: per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc 3 R † 200 = 240: & reſoluta æquatione per numeros abſolutos, poſito 1 R, pretio 13 $\frac{1}{3}$, operationem benè comperiemus inſtitutam. Sit æquatio $\frac{5 R † 60}{24}$ = 5, reducetur ad hanc 5 R † 60 = 120, & eſt 1 R, valor 12.

Si eſſet æquatio $\frac{122}{4 R}$ = 6 † 3 R, fieri debet, vt ſuprà multiplicatio, per crucem, vt eueniat æquatio huiuſmodi 24 R † 12 Q = 122, & per diuiſionem reducetur ad hanc 2 R † 1 Q = 10 $\frac{1}{6}$. Inſtituta autem analyſi reperietur 1 R valor hic ℞ Q 11 $\frac{1}{6}$ — 1. Itaque reſoluatur æquatio ſecundum hoc valoris pretium, & 2 R, valebunt ℞ Q 44 $\frac{4}{6}$ — 2, atque 1 Q, erit 12 $\frac{1}{6}$ — ℞ Q 44 $\frac{4}{6}$, ſic etiam 24 R, valebunt ℞ Q 6432 — 24, & 12 Q valebunt 146 — ℞ Q 6432; horum ſumma eſt 122.

Porrò

Porrò ſi reſoluatur fractio in numeros eoſdem abſolutos, comperiemus rectè nos operatos fuiſſe; per communem enim diuiſionem non immutatur æqualitas. Si itaque 24 R † 12 Q, diuidamus per 6 † 3 R, fiet quotiens 4 R, & ſi idem diuidatur per 4 R, fiet quotiens 6 † 3 R: Si 122 diuidantur per 4 R, fit quotiens $\frac{122}{4R}$. Cùm autem dictum ſit 1 R, valorem eſſe ℞Q 11 $\frac{1}{6}$ − 1, certè 3 R, valebunt ℞ 100 $\frac{1}{2}$ − 3, & 4 R valebunt ℞ 178 $\frac{2}{3}$ − 4: hæc autem reſidua inuicem multiplicata faciunt 146 − ℞ 6432. Si verò ℞ 178 $\frac{2}{3}$ − 4, pretium nempe quatuor radicum multiplicetur per 6; fiet ℞ Q 6432 − 24 ideò producitur tantum 122, vt ſuprà dictum eſt; Si autem multiplicetur 6 † ℞ 100 $\frac{1}{2}$ − 3 hoc eſt ℞ 100 $\frac{1}{2}$ † 3 per ℞ 178 $\frac{2}{3}$ − 4, producitur 122. Hoc igitur diuiſo per ℞ 178 $\frac{2}{3}$ − 4, fit quotiens ℞ 100 $\frac{1}{2}$ † 3: hic reſpondet fractioni $\frac{6 + 3R}{1}$, & fractioni $\frac{122}{4R}$, reſpondet etiam ℞ 100 $\frac{1}{2}$ † 3; ob id rectè dicebatur, &c.

Numeris abſolutis explicatur ſuperior operatio.

℞Q 11 $\frac{1}{6}$ − 1	
℞Q 11 $\frac{1}{6}$ − 1	
− ℞Q 11 $\frac{1}{6}$ + 1	
11 $\frac{1}{6}$ − ℞Q 11 $\frac{1}{6}$	
12 $\frac{1}{6}$ − ℞Q 44 $\frac{4}{6}$	
℞Q 44 $\frac{4}{6}$ − 2	
10 $\frac{1}{6}$ Summa	

10 $\frac{1}{6}$ Summa	
146 − ℞Q 6432	
℞Q 6432 − 24	
122 Summa	

$\frac{122}{4R}$ ⋈ $\frac{6 + 3R}{1}$

24 R + 12 Q = 122

℞Q 100 $\frac{1}{2}$ − 3	
℞Q 178 $\frac{2}{3}$ − 4	
− ℞Q 1608 + 12	
134 − ℞Q 1608	
146 − ℞Q 6432	
℞Q 6432 − 24	
122	

℞Q 178 $\frac{2}{3}$ − 4	
6	
℞Q 6432 − 24	

Item ſi ſit æquatio huiuſmodi $\frac{24}{2R} = \frac{60}{1Q + 1R}$, reuocabitur ad hanc 120 R = 24 Q † 24 R. Hæc autem $\frac{4R + 16}{5} = \frac{48Q - 264R}{3R}$, ad hanc 12 Q † 48 R = 240 Q − 1320 R. Preterea ſi eſſet æquatio inter $\frac{6R + 10}{1R + 2}$, & $\frac{12}{1Q}$, reducetur ad hanc inter 6 C † 10 Q, & 12 R † 24. Si foret æquatio inter 2 Q † $\frac{10R}{3Q}$, & 10 † $\frac{18}{4Q}$ reducetur ad hanc $\frac{6QQ + 10R}{1Q} = \frac{40R + 18}{4R}$: deinde per multiplicationem in crucem, fiet reductio vt ſuprà, &c. Item hæc æquatio 1 Q = $\frac{390R - 14Q}{25}$, reducetur ad hanc 25 Q = 390 R − 14 Q. Si ſit æquatio $\frac{1Q}{24}$ = 384, reducetur ad hanc 1 Q = 9216.

Declaratur ſuperior doctrina de reductione.

Hoc totum explicari poteſt vna, vel altera æquatione reſoluta in numeros abſolutos. Vt ſi 1 Q = $\frac{390R - 14Q}{25}$ eſt 1 R pretium 10, ergo 1 Q, valor erit 100; cùm autem 1 R, pretium ſit 10, ergo 390 R, valebunt 3900, & 14 Q, valebunt 1400, his detractis à 3900, cùm ille numerator ſit, reſiduum, erit numerus 2500, quo diuiſo per 25, fit quotiens 100. Non immeritò igitur dicebamus, ſi 1 Q, æquatur $\frac{390R - 14Q}{25}$, etiam 25 Q, æquari 390 R − 14 Q; ſiquidem 25 Q, valent 2500, tantus eſt autem valor iſtius reſidui 390 R 14 Q. Sic non diſſimili modo hoc idem patebit in omni alio exemplo, quod in numeros abſolutos non diſſimili artificio reſoluatur.

Declarantur ſuperiùs dicta in minutijs vulgaribus &c.

Hoc declaratur in minutijs vulgaribus. Si etenim ponantur duæ minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$, quæ ſunt æquales, vt patet, multiplicentur autem per crucem, producentur numeri æquales 60, 60.

30	10
2	6
60	60

Reductionis demonſtratio.

Demonſtratio verò ità ſe habet. Quoniam ipſæ minutiæ æquales ponuntur, eadem erit proportio numeratoris minutiæ prioris, ad denominatorem eiuſdem, quæ numeratoris minutiæ poſterioris

ad

ad eiuſdem denominatorem. Exempli gratia. Cùm ſint æquales minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$ quæ proportio eſt 10, ad 30, eadem erit 2, ad 6; quare numerus productus ex 30, in 2, æqualis erit producto ex 10, in 6: ſi itaq; numerator vnius ducatur in denominatorem alterius, & contrà numerator poſterioris in denominatorem prioris, cum ſit idem, ac ducere primum in quartum, & ſecundum in tertium, ex quatuor numeris proportionalibus, producti numeri erunt inter ſe æquales.

Explicatur operatio in numeris ſurdis. Quòd attinet ad numeros ſurdos, quo pacto nimirum procedendum ſit, patet ex ſuperiùs explicatis. Sit æquatio ℞ 24 R ⊏ 12: fiat æquatio quadratorum, nempè 24 Q ⊏ 144. Itaque diuiſis 144, per 24, prodibit in quotiente numerus 6, ſcilicet vnius quadrati pretium; Itaque ℞ 6, erit 1 R, valor; & ita videtur eſſe; quandoquidem ſi ſupponamus 1 R, valorem eſſe ℞ 6, certè ℞ 24 R, valebit 12, propterea quod, ſi ducamus ℞ 6, in ℞ 24, fiet productum ℞ 144, hoc eſt 12. At verò ſi 1 R, pretium foret 6, multiplicata ℞ 24 per 6, fiet productum ℞ 864: quamobrem eſſet æquatio ℞ 24 R ⊏ ℞ 864, non autem ℞ 24 R ⊏ 12.

Cap. 26. Algebra. Clauius aliter operatur, putat enim quadratum è ℞ 24 R, eſſe 24; & facit equationem inter 24 R, & 144, quamobrem diuiſione inſtituta, dicit 1 R, pretium eſſe 6. At verò Clauium eſſe deceptum ex eo colligitur, quia ſi proponeretur æquatio huiuſmodi ℞ 25 R ⊏ 60: eadem eſſet, ac illa 5 R ⊏ 60. Itaque quemadmodum horum extremorum quadrata in iſta ſunt 25 Q, & 3600; ita etiam quadrata extremorum in illa, erunt 25 Q, & 3600; ſed inſtituta diuiſione proſilit quotiens 144, ſcilicet 1 Q, pretium, cuius ℞ eſt 12, & eſt 1 R, valor.

℞	24
℞	6
	144
	. .
	1 2

At verò iuxtà Clauium foret, æquatio 25 R ⊏ 3600, diuiſioneque inſtituta, fieret 1 R, pretium 144: rem autem ſic ſe.ſe habere confirmat, quia ſi ducamus 144, in 25, fit productum 3600, cuius ℞ eſt 60. Sed non benè videtur ipſe ratiocinatus; etenim ſi 1 R, pretium eſt 144, certè ℞ 25 R, nempè 5 R, non erit 60, ſed numerus productus ex ℞ 25, in 144, nempè ℞ 518 400, hoc eſt 720. Petendum autem à Clauio, cur poſtquam multiplicauit 144, per 25, extrahit ℞, ex numero producto 3600, non aliam equidem ob cauſam, niſi quia, adhibuit 25 R, non ſecus, ac ſi quadrata eſſent. Hoc autem eſt confundere R, cum Q. Melius igitur erit operationem exercere, vt ſuprà dicebamus. Idque declaratur magis, nam ſi foret æquatio ℞ 16 Q, ⊏ 20, cùm 16 Q, habeat latus, nempè 4 R, erit æquatio inter 4 R, & 20, & ità eſt, quandoquidem ſi 1 R, pretium fuerit 5, vtique 4 R, valor erit 20, & 16 Q, nimirum quadrati ipſarum 4 R, valor erit 400; quamobrem non erit huiuſmodi quadratum, ſcilicet ipſius ℞ 16 R, non erit inquam 16 R, adeò vt æquatio ſit 16 R ⊏ 400, ſed potius 16 Q. Ità quoque ſupponamus 1 R, pretium eſſe 6, & ſit æquatio ℞ 24 R ⊏ 864, erit etiam æquatio 24 Q ⊏ 864; diuiſis autem 864, per 24, fit quotiens 36, nimirùm 1 Q, pretium, & latus eius nempè 6, erit 1 R, valor.

Cæterum animaduertendum eſt, quando ſcribitur ℞ 24 R, poſſe eſſe ſenſum, quod latus, ſeù radix erui debet nc dum ex numero, verum etiam ex poteſtate, quo pacto ſi ſupponatur 1 R, pretium eſſe 6, erit ℞ 24 R, idem quod 12: ſed non benè hoc modo ſcribitur; etenim intrà parentheſin ſcribi deberet, ſic R (24 R) & foret æquatio huiuſmodi ℞ (24 R) ⊏ 12: Quando verò ſcribitur ℞ 24 R, ſenſus eſt quod numerus, cum non habeat radicem quadratam, ideo ei propoſitum fuit ſignum radicale, & ex dignitate acceptum fuit latus.

Antitheſis declaratur rurſus. Verùm vt diximus hæc æquationis pars, quam Antitheſin appellari dicebamus, dicitur Reductio, & inſuper Tranſpoſitio: quia licet hoc verbum Antitheſis propriè ſignificet oppoſitionem, ſeu contrapoſitionem; nihilominus, quoniam per reductionem de qua loquimur, terminum exiſtentem ex vna parte in alteram tranſponimus, qua ratione tranſpoſitio dicitur, contrariaque nota affectus euadit: proinde ratione huius oppoſitionis, ſeu contrapoſitionis, reductio æquationis appellatur Antitheſis,

titheſis, quam dicebamus eſſe tranſpoſitionem quantitatis ex vna æquationis parte in alteram partem ſub contraria affectionis nota. Sed hæc eadem iam ſuperiùs annotauimus, ac explicuimus.

Cur hæc operatio dicatur Antitheſis.

Quando autem occurrit æquatio eiuſmodi, vt in ipſa nullus extet abſolutus numerus; tunc fieri debet Hypobibaſmus, *Qui nihil eſt aliud, quàm æqua depreſſio poteſtatis, & eius parodicorum graduum*. Hoc autem nomen propriè repreſſionem, ſubductionemque ſignificat.

Hypobibaſmus quid.

Hypobibaſmus autem fit hac arte, nimirum ſubducendo depreſſiorem gradum parodicum tùm à poteſtate, cùm ab alijs gradibus parodicis. Itaque ſi proponatur æquatio 12Q = 48R, reuocari debet ad hanc 12R = 48, nempè ſubducendo R, abs Q. Præterea ſi fuerit æquatio huiuſmodi 6C = 30Q, reducetur ad hanc 6R = 30. Et ſi eſſet 1C = 20R, ad hanc reuocabitur 1Q = 20. Inſuper hæc æquatio 1C + 3Q = 6R, ad hanc reuocabitur 1Q + 3R = 6: huius æquationis autem radix eſt ℞ 8 ¼ — 1 ½. Præterea 20QQ + 10C = 100Q, ad hanc reducetur 20Q + 10R = 100: huius æquationis ℞ eſt 2. Item 30QQ — 25C = 70Q, reuocabitur ad hanc 30Q — 25R = 70: huius ℞ eſt 2, & ita de reliquis.

Qua methodo abſoluatur hæc operatio, quæ hypobibaſmus.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina.

Placet autem ad hanc operationem magis illuſtrandam, reſoluere vnam, vel alteram æquationem in numeros abſolutos, vt conſtet operationem hanc eo modo inſtituendam eſſe, quo explicuimus.

Ad maiorem illius operationis illuſtrationem aliquæ reſoluuntur æquationes.

Sit æquatio 6C = 30Q: ſit 1R, pretium 5, ergo 6C, valebunt 750, & 30Q, valebunt 750. Si reducatur per Hypobibaſmum ad hanc 6R = 30; optimè facta eſt reductio: quandoquidem cum 1R, valor ſit 5, vtique 6R, valebunt 30.

Exemplum.

30
25
150
60
750

Sit æquatio huiuſmodi 3C + 4Q = 95R, per Hypobibaſmum reducetur ad hanc 3Q + 4R = 95. Huius autem æquationis radix eſt 5; proinde 3C, valebunt 375: & 4Q, cum valeant 100, erit 3C + 4Q, alterius partis in æquatione pretium 475. At verò 95R, valebunt quoque 475, ſi 1R, valor eſt 5. Cùm autem reducta ſit ad hanc 3Q + 4R = 95, benè facta eſt reductio; ſi quidem 3Q, valent 75, & 4R, valent 20, proinde 75, cum 20, quoniam efficiunt vnam æquationis partem, nempè 3Q + 4R, benè dictum eſt æquari hanc partem alteri, in qua quidem ſunt 95; quandoquidem 75, cum 20, faciunt 95.

Exemplum.

Peracta verùm hac æqua depreſſione, ad id denique deuenitur, vt omnia per numerum elatioris poteſtatis diuidantur. Itaut ſit hunc in modum æquatio præparata, vt ſolùm radicis extractio ſuperſit. De ipſa igitur diuiſione proximum eſt, vt ſermonem inſtituamus, & in eius explicatione, aliquantulum immoremur; eo vel maximè, quòd inde plerumque fractiones in æquationibus proueniant, à quibus operæ pretium eſt illas liberare, cum alioquin vlteriùs progredi non liceat, ad radicis extractionem, in qua poſtremus eſt, vt plurimum Analyſtæ labor.

Facto Hypobibaſmo, quid ſuperſit.

Hypobibaſmi autem operatio, facilè demonſtratur. Quandoquidem, ad diuiſionem reducitur. Si enim quæ ſunt æqualia per communem diuiſorem diuidantur quæ ex diuiſione proueniunt æqualia erunt: Iam enim præmiſſum eſt à communi diuiſore æqualitatem non immutari. Gradus autem, qui deprimitur, diuiſoris munere fungitur.

Sequitur igitur de Diuiſione, quam Paraboliſmum appellant.

De Paraboliſmo, ſeu Diuiſione.

CAPVT X.

PArabolismus dicitur à verbo græco παραβάλλω, à quo etiam παραβολή, nomen vſurpatum ad ſignificandam vnā ex conicis ſectionibus; at verò apud Arithmeticos, & Geometras, partitionem, ſeu diuiſionem, multiplicationi contrariam importat; Nec irrationabiliter, ad id ſignificandum aſſumitur; nam παραβάλλω inter cætera applicare, ſignificat; at verò, diuiſio, quædam eſt applicatio, nimirum diuidendi ad diuiſorem.

Facta reductione debet inſtitui paraboliſmus, ſiue applicatio, ſeu diuiſio.
Animaduerſio.
Paraboliſmus quid.

Facta reductione, cùm opus fuerit in æquatione propoſita, ſtatim inſtituenda eſt diuiſio per numerum maioris dignitatis, ſeu poteſtatis; per hunc enim debet Analyſta particulas omnes æquationis diuidere. Aduertendo tamen in huiuſmodi operatione, abijciendum characterem ipſum, & inſtituendam diuiſionem per numerum, non ſecus, ac ſi non haberet ſibi characterem annexum. Exemplis omnia declarabimus. Interim certum eſſe debet, *Paraboliſmum nil aliud eſſe, quàm homogeneorum applicationem ad quantitatem, in quam poteſtas ducitur.* Si ſit æquatio 5 R = 50; debet inſtitui diuiſio per numerum 5, per quem diuiſis 50, emerget quotiens 10, & 1 R, pretium. Item 4 Q = 100, fit quotiens 25, & 1 Q, pretium; itaque 1 R, valor erit 5. Inſuper 4 C = 108; diuiſione inſtituta fit quotiens 27, & 1 C, pretium: itaut 1 R, valor ſit 3.

Paraboliſmus eſt compendiũ regulæ aureæ.

Conſtat autem hanc operationem eſſe compendium regulæ aureæ. Siquidem dum habemus 4 Q = 100, & inſtituimus diuiſionem; nil aliud efficere profectò curamus, quàm reperire pretium 1 Q, dum conſtat 4 Q, valorem eſſe 100: quaſi diceremus. Si 4 Q, dant 100, quid dabit 1 Q? Et ita de reliquis intelligendum eſt.

Explicatur magis ſuperior doctrina.

Inſuper ſi propoſita ſit æquatio 2 Q = 20 R — 12, ſeu 20 R — 2 Q = 12; per diuiſionem reducetur ad hanc 10 R — 1 Q = 6. Præterea ſi ſit æquatio 10 Q + 60 R = 400; diuiſis omnibus per 10, fit æquatio 1 Q + 6 R = 40.

Paraboliſmi fundamentũ.
Quid per diuiſionem inquiratur.

Innititur autem hæc operatio communi illo pronunciato.

Si æqualia per æqualia diuidantur, quæ fiunt ſunt æqualia.

Cùm ergo poſita eſſet æquatio 10 Q + 60 R = 400, nihil aliud diuiſione inquirimus, quàm 1 Q, pretium; etenim nobis conſtabat 10 Q, valorem eſſe 400 — 60 R: proinde compendio quodam ita rationati ſumus; ſi 10 Q, dant 400 — 60 R, quid dabit 1 Q? & reperiemus dare 40 — 6 R. In forma verò ipſius regulæ aureæ ſtabit hoc modo.

10 Q	400 — 60 R	1 Q?	40 — 6 R

Etenim ſi 400 — 60 R, ducamus in 1 Q, fiunt 400 Q — 60 C; qui ſi diuidantur per 10 Q, fit quotiens 40 — 6 R. Eodem modo intellige in cæteris æquationibus. Breuitatis autem cauſa omittitur tota illa regulæ aureæ operatio, & diuiſio per numerum maioris characteris inſtituitur, cùm in idem recidat.

Cum diuiſor eſt vnitas non eſt opus diuiſione, & quare.
Declaratio ſupradictorum.

Hoc autem fieri debet, vt ſupra innuimus, abiecto charactere ipſo, atque per ipſum numerum, ac ſi characterem non haberet. Cæterum cùm diuiſor fuerit vnitas à maiori charactere denominata, non eſt opus diuiſione, cùm ex ipſa nihil noui emergat.

Hæc omnia facilè poſſunt explicari per reſolutionem æquationum, ad numeros abſolutos, & ſimplices. Vt ſi eſſet æquatio illa 10 Q + 60 R = 400; cum 1 R, valor ſit 4, certè 10 Q, valebunt 160, & 60 R, valebunt 240. Itaque huius numeri compoſiti 10 Q + 60 R, valor eſt 400. Dum autem omnia diuiduntur per 10, fit quotiens 1 Q + 6 R = 40: & quidem optimè ſe habet æquatio; nam per communem diuiſorem non immutatur æqualitas; dumque diuiduntur pretia illorum numerorum denominatorum,

rum, ſcilicet dum diuiduntur numeri abſoluti, euenit æqualitas. Nam ſi 400, pretium illius compoſiti 10Q † 60R, diuidatur per 10, fit quotiens 40, & ſi 400, numerus abſolutus ex altera æquationis parte, & cui illi, tanquam homogeneo comparationis comparantur; ſi inquam 400, diuidatur per 10, fit itidem 40, vt patet; & ita de reliquis.

Non rarò contingit vt oporteat reducere fractiones.

Iſomœria quid ſit.

Verùm quia ſæpè ſæpius oportet fractiones reducere ad integros numeros, vt fiat legitima æquatio, facto Paraboliſmo; proinde de hac reductione aliqua dicenda occurrunt. Reductio autem hæc Iſomœria nuncupatur; *Eſt enim hac nihil aliud, quàm fractionum reductio, ad integros numeros, vt videbimus.*

Methodus, qua hæc operatio abſoluitur.

Breuiter hæc poteſt obſeruari methodus. Propoſita ſit æquatio 4QQ † 3C † 3Q † 2R = 1272 ſi fiat Paraboliſmus per 4, numerum maioris dignitatis, reuocabitur ad hanc 1QQ † $\frac{3C}{4}$ † $\frac{3Q}{4}$ † $\frac{2R}{4}$ = $\frac{1272}{4}$.

Exemplum 1.

Huius operationis regula declaratur.

Verùm vt ad integros numeros æquationem reuocemus, oportet aduertere diſtantiam dignitatum ab inuicem. Et primò obſeruo dignitatem C, diſtare abs QQ, per R: ideo ducatur 3, numerator in 4, per quem factus eſt Paraboliſmus, & fiunt 12, quibus diuiſis per 4, denominatorem fractionis, fit quotiens 3: ergo in æquatione ponemus 1QQ † 3C. Deinde quia Q, abs QQ, diſtat per Q; ideo quadratè in ſe ducatur idem numerus 4, numerus inquam quadrato-quadratorum, & fit numerus 16, in quem ducautur 3, & productus numerus 48, diuidatur per 4, denominatorem, & fit quotiens 12Q: itaque ſcribere debemus 1QQ † 3C † 12Q. Poſtea quoniam, R diſtat abs QQ, per C; proinde cubicè multiplicetur numerus 4, & producetur numerus 64, qui quidem ducatnr in 2, numeratorem fractionis, & fit numerus 128; hic diuidatur per 4, fit quotiens 32, & ita habebimus 32R: itaut ſit opus ad 1QQ, † 3C † 12Q, addere numerum 32R, vt fiat ſumma 1QQ † 3C † 12Q † 32R. Demum; quia numerus abſolutus diſtat abs QQ, per QQ; proinde numerus 4, debet quadrato-quadraticè multiplicari, vt fiat numerus 256, per quem multiplicari debet 1272, numerus abſolutus, & fiet 325632; hic diuidatur per 4, & fiet quotiens 81408: erit ergo per Iſomœriam inuenta æquatio iſta 1QQ † 3C † 12Q † 32R = 81408.

Admonitio maximè neceſſaria.

Aduertendum autem 1R, pretium haberi, diuidendo per numerum QQ, hoc eſt per numerum quadrato-quadratorum, nempe per 4; diuidendo inquam numerum, qui extractione lateris ex æquatione pro 1R, pretio emergit.

Declaratio ſu prædictorum.

Hæc autem declarari poſſunt tali pacto. Supponamus 1R, pretium eſſe 4; eius QQ, erit 256; quamobrem 4QQ, erunt 1024; deinde 3C, erunt 192; & 3Q, erunt 48; ac demum 2R, erunt 8: quorum ſumma eſt 1272: itaque eſt æquatio, vt ſupra 4QQ † 3C † 3Q † 2R = 1272.

```
 1024
  192
   48
    8
-----
 1272
-----
65536
12288
 3072
  512
-----
81408
```

Declaratur rectè quidem Iſomœriam inſtitui modo iā explicato.

Benè verò fieri Iſomœriam, quemadmodum docuimus, declaratur hoc modo. Si 1R, pretium eſt 4, ergo latus æquationis erit 16, nempe numerus productus ex 4, vnius radicis pretio in 4, numerum quadrato-quadratorum. Modò QQ, numeri 16, eſt 65536; & 3C, ſi reſoluantur, faciunt numerum 12288; & 12Q, faciunt 3072: demum 32R, faciunt 512; quorum ſumma eſt 81408: benè ergo dicebamus, æquationem illam reuocari ad hanc 1QQ † 3C † 12Q † 32R = 81408.

Exemplum 2.

Sit æquatio 4C † 6Q † 10R = 700: diuiſione inſtituta, fiet æquatio 1C † $\frac{6Q}{4}$ † $\frac{10R}{4}$ = $\frac{700}{4}$. Cum Q, diſtet à C, per R: proinde multiplicetur 6, numerator per 4, numerum cuborum; & numerus productus 24, diuidatur per 4, denominatorem, fiet quotiens 6; & numerus quadratorum erit 6. Deinde quia R, diſtat à C, per Q, multiplicetur 10, numerator per 16, quadratum numeri cuborum: & numerus productus 160, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; & quotiens 40, erit numerus radicum. Demum quoniam numerus abſolutus diſtat à C, per C: proinde numerator 700, multiplicetur per 64, cubum numeri cuborum; & productus numerus 44800, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; nam quotiens 11200, erit numerus abſolutus: itaut illa æquatio ad hanc ſit reducta 1C † 6Q † 40R = 11200. Hoc autem ita oſtenditur. 1R

Declaratur doctrina tradita.

pretium ſupponebam eſſe 5; modo ducatur in 4, numerum elatioris poteſtatis, & fit 20: itaque 20, erit huius æquationis latus (diximus enim numerum emergentem pro latere, diuidendum eſſe, per numerum maioris poteſtatis) Cubus ex 20, eſt 8000: addantur 6Q, nempe 2400, & 40R, nimirum 800; fit ſumma 11200, prout in æquatione dicebamus euenire.

Exemplum 3.

Sit æquatio 5QQ † 6C † 3Q † 7R = 154: diuiſione inſtituta, fiet 1QQ † $\frac{6C}{5}$ † $\frac{3Q}{5}$ † $\frac{7R}{5}$ = $\frac{154}{5}$; quæ quidem per Iſomœriam ad hanc reuocabitur 1QQ † 6C † 15Q † 175R = 19250. Supponebam enim 1 R, pretium eſſe 2; & quoniam numerus QQ, eſt 5, proinde duci debet in 5; atque adeo huius æquationis latus erit 10, diuidendum per 5.

Exemplum 4.

Sit æquatio 5C † 17R = 74; diuiſione inſtituta, fit 1C † $\frac{17R}{5}$ = $\frac{74}{5}$: per Iſomœriam ad hanc reuocabitur 1C † 85R = 1850. Etenim R, diſtat à C, per Q; proinde ducatur 17, numerator in 25, quadratum ex 5, numero cuborum: & productus numerus 425 diuidatur, per 5, denominatorem: fit quotiens 85, & numerus radicum. Deinde quoniam numerus abſolutus diſtat per C; ducatur numerus 74, in 125, cubum ex 5; & productum 9250, ſi diuidatur per 5, fit quotiens 1850, & numerus abſolutus: quod eodem pacto declarari poteſt, quemadmodum ſuperiùs dicebamus. Etenim 1R, pretium ſupponimus eſſe 2: erit huius æquationis 1C † 85R = 1850 latus, numerus 10; emergens ſcilicet ex ductu 2, in 5, numerum elatioris poteſtatis: proinde cubus erit 1000; ad quem ſi addantur 85R, nimirum 850, fit ſumma 1850, veluti dictum eſt.

Exemplum 5.

Sit æquatio 5Q † 12R = 185: ſi inſtituatur diuiſio, ad hanc reducetur 1Q ✠ $\frac{12R}{5}$ = $\frac{185}{5}$: & per Iſomœriam ad hanc 1Q † 12R = 925, cuius latus eſt 25; quo diuiſo per 5, numerum quadratorum fit quotiens 5, & 1R valor.

Exemplum 6.

Sit æquatio 10Q − 4R = 230. Si diuidantur omnia per 10, numerum quadratorum, fit æquatio 1Q − $\frac{4R}{10}$ = $\frac{230}{10}$: quæ per Iſomœriam ad hanc reuocabitur 1Q = 4R = 2300, cuius latus eſt 50; quo diuiſo per 10, numerum quadratorum, fit quotiens, & 1R, pretium 5; hoc eſt 1R, pretium in æquatione illa ſuperiori 10Q − 4R = 230, erit 5.

Exemplum 7.

Sit æquatio 1C † $\frac{2R}{3}$ = $\frac{25}{3}$ reducetur ad hanc 1C † 6R = 225.

Item ſit æquatio 1C † $\frac{5R}{6}$ = $\frac{72}{6}$: reducetur ad hanc 1C † 30R = 15552.

Altera methodus perficiendæ Iſomœriæ.

Eſt etiam Iſomœriæ perficiendæ methodus altera. Reperiatur quiuis communis diuiduus numerus omnium denominatorum; & multiplicetur numerator cuiuſcunque fractionis, per numerum, qui communem diuiduum metitur, per denominatorem numeratoris multiplicandi: integri autem numeri multiplicandi ſunt per communem diuiduum. Exempli gratia, ſit æquatio huiuſmodi, $\frac{60}{2}$ ✠ $\frac{20}{5}$ = $\frac{204}{6}$. Communis diuiduus eſto 30, vel alius numerus quicunque, quem poſſint omnes denominatores metiri. Numerus 2, metitur 30, per 15; proindè multiplicatis 60, per 15, producentur 900. Mox etiam videatur numerus per quem numerus 5, metitur 30, & reperiemus 6: per hunc autem numerum multiplicentur 20, vt producantur 120. Denique 6; metiuntur 30, per 5; ob id multiplicatis 204, per 5, producentur 1020. Igitur æquatio illa ſuperiùs poſita per Iſomœriam reducetur ad hanc 900 ✠ 120 = 1020.

Exemplum 2.

Sit æquatio 1R ✠ $\frac{2}{3}$ = $\frac{17}{3}$ ✠ $\frac{5R}{6}$. Communis diuiduus eſto 12, numerus quem quidem 3, denominator fractionis $\frac{2}{3}$, metitur per 4; ducto autem 2, numeratore eiuſdem fractionis in 4, producitur numerus 8. Prætereà multiplicatis 17, per 4, numerum per quem 3, denominator fractionis metitur 12; & fit, 68. At verò 6, denominator fractionis $\frac{5}{6}$R, metitur 12, per 2: ducto autem 5, numeratore eiuſdem fractionis, in 2, producuntur 10. Itaque ſuperior æquatio, per Iſomœriam ad hanc reducetur; 12R ✠ 8 = 10R ✠ 68, & eſt 1R, valor 30.

Exemplum 3.

Sit æquatio ſupra iam allata 5Q ✠ 12R = 185: per diuiſionem fit æquatio huiuſmodi 1Q ✠ $\frac{12R}{5}$ = $\frac{185}{5}$. Communis diuiduus eſto numerus 10, quem denominator 5, metitur per 2; ducatur 1Q, in 10, fiunt 10Q: præterea ducantur 12 R, in 2, numerum per quem denominator 5, metitur 10; & producentur 24R: ducantur 185 in 2, & producentur 370: itaque per Iſomeriam reducta erit æquatio illla ad hanc 10Q ✠ 24R = 370; cuius radix eſt 5, quemadmodum, & illius 5Q ✠ 12R = 185, eſt etiam 1R, valor 5.

Sit

Sit æquatio ſuperiùs poſita 4 C + 6 Q + 10 R = 700 : diuiſione inſtituta, fiet æquatio hoc modo 1 C + $\frac{6\,Q}{4}$ + $\frac{10\,R}{4}$ = $\frac{700}{4}$. Communis diuiduus eſto numerus 8, quem denominator 4, metitur per 2 : multiplicemus 1 C, per 8, & producentur 8 C : multiplicemus 6, numeratorem fractionis $\frac{6\,Q}{4}$ per 2, & fiunt 12 : multiplicemus 10 R, per 2, & fient 20 R : denique ſi multiplicentur 700, per 2, fient 1400; ob id per Iſomœriam reducta erit æquatio illa, ad hanc 8 C + 12 Q + 20 R = 1400. Huius autem æquationis radix eſt 5 : nam 8 C, valent 1000; & 12 Q, valent 300, atq; demum 20 R, valent 100: horum ſumma eſt 1400. *Exemplum 4.*

Iſomeria fit etiam multiplicando ſingulos numeratores per denominatores aliarum fractionum. *Iſomœria fit etiam multiplicando ſingulos numeratores per denominatores.*

Sit æquatio $\frac{6\,R + 20}{1\,R}$ = $\frac{8\,R - 48}{4}$, reuocabitur ad hanc per Iſomœriam, facta multiplicatione per crucem 24 R + 80 = 8 Q — 48 R; eſt autem 1 R, pretium 10. Hoc autem quod diximus, reſolutione in numeros abſolutos facilè conſtabit : nam ſi 1 R, pretium eſt 10, ergo 6 R, valebunt 60; igitur illa fractio $\frac{6\,R + 20}{1\,R}$, erit 8; Inſuper 8 R, valor erit 80; ob id illius fractionis $\frac{8\,R - 48}{4}$, pretium erit 8. *Exemplum 1.*

Si ſit æquatio 1 C + $\frac{3}{2}$ Q = $\frac{1300}{2}$: per Iſomœriam reducetur ad hanc 1 C + 3 Q = 1300. Nam Q, diſtat à C per R; ideo ducatur 3, numerator fractionis quadratorum in 2, numerum cuborum, per quem inſtituta fuit diuiſio, & fit 6, quo diuiſo per 2, denominatorem fractionis, fit iterum 3, numerus quadratorum. Deindè quia numerus abſolutus diſtat à C, per C; ob id cubicè multiplicetur numerus cuborum, per quem diuiſio fuit inſtituta, & fiet 2600; quo diuiſo per 2; denominatorem fractionis fiet 1300; ob id erit 1 C + 3 Q = 1300. *Exemplum 2.*

Si daretur 1 C + $\frac{20\,Q}{5}$ = $\frac{1800}{5}$, reducetur ad hanc 1 C + 20 Q = 45000. Huius æquationis radix eſt 30; quo numero diuiſo per 5, denominatorem fractionis, fit radix alteriùs illius æquationis 6 : & ita eſt, quemadmodum cuique perſpicuum eſſe poteſt. *Exemplum 3.*

Sed quę hactenus diximus, vt magis explicemus, ſumamus communem diuiduum, quem nimirum denominatores omnes fractionum diuidere poſſunt ſine vlla fractione : modo multiplicetur per hunc numerum, numerus primi gradus, ideſt proximi infra poteſtatem; & per quadratum illius multiplicetur numerus ſequentis gradus; per cubum eiuſdem numerus tertij gradus; & ita deinceps, vſq; ad comparationis homogeneum: cum autem his multiplicationibus valor radicis propoſitæ æquationis augetur; proinde numerus inuentus pro radicis valore, nouæ ſcilicet æquationis, diuiſus per illum inuentum numerum, dabit radicem quæſitam propoſitæ ab initio æquationis. *Explicantur magis quæ hactenus dicta ſunt.*

Supponatur æquatio 1 C + 5 $\frac{1}{2}$ Q — 14 $\frac{2}{3}$ R = 326, communis diuiduus erit 6, quem ſcilicet denominatores 2, & 3, diuidunt modo fiant proportionales numeri; qui quidem ſubſcribantur partibus æquationis, per quos, ſi ſuperiores multiplicentur, fient 33, 528, 70416; atque adeo fiet æquatio 1 C + 33 Q — 528 R = 70416. Huius autem æquationis radix eſt 36; qui quidem numerus diuiſus per 6, communem diuiduum, dabit 6, pro radice illius æquationis. *Exemplum ad idem.*

1 C + 5 $\frac{1}{2}$ Q —	14 $\frac{2}{3}$ R =	326	
1	6	36	216
	33	528	70416

Hæc autem, vt magis illuſtrentur non pigebit exempla quædam afferre. Et primo quidem oportunum erit æquationem ſuperiùs poſitam 1 C + 5 $\frac{1}{2}$ Q — 14 $\frac{2}{3}$ R = 326, quam per Iſomæriam poſtremo reduximus ad hanc 1 C + 33 Q — 528 R = 70416, non pigebit inquam ſuperioribus quoq; modis per Iſomœriam reducere.

Ad primum modum, quod attinet; quandoquidem æquatio hæc 1 C + 5 $\frac{1}{2}$ Q — 14 $\frac{2}{3}$ R = 326; ortum ducit ab hac 6 C + 33 Q — 88 R = 1956, diuiſio omnibus per 6, numerum elatioris poteſtatis; fiet 1 C + 5 $\frac{1}{2}$ Q — 14 $\frac{2}{3}$ R = 326. Itaque erit æquatio 1 C + $\frac{33\,Q}{6}$ — $\frac{88\,R}{6}$ = $\frac{1956}{6}$. Nunc videndum eſt quantum diſtet Q, à C; quoniam autem diſtat per R; propterea multiplicitur 33, numerator quadratorum per 6; numerum Cuborum, & prouenier; 198, quo diuiſo per 6, denominatorem redibit 33, pro numero quadratorum. Quoniam autem R, diſtat, à

C per

C per Q, multiplicetur 88, per 36, quadratum numeri cuborum, & proueniet 3168; quo diuiſo per 6, denominatorem, fractionis proueniet 528, pro numero radicum. Quoniam denique numerus abſolutus nempe 1956, diſtat à C, per cubum multiplicetur 1956, per 216, cubum ex 6, numero quadratorum, vt proueniat 422496, quo diuiſo per 6, denominatorem fractionis proſilict in quotiente 70416; erit igitur æquatio illa, ad hanc redacta $1\,C + 33\,Q - 528\,R = 70416$.

Alio etiam modo: quem ſecundo loco retulimus; hæc æquatio per Iſomœriam reducetur obſeruando priùs, eam eandem eſſe, ac hanc $1\,C + \frac{11\,Q}{2} - \frac{44\,R}{3} = \frac{326}{6}$. Reperiatur communis diuiduus, qui erit 6, hunc enim 2, denominator fractionis quadratorum metitur per 3, quo ducto in 11, numeratorem fractionis eiuſdem, fit numerus 33, eritque numerus quadratorum; At verò 3, denominator fractionis radicum metitur 6, per 2, quo ducto in 44, numeratorem eiuſdem fractionis; fit 88, pro numero radicum; atque demum 1, denominator fractionis numeri abſoluti metitur 6, per 6, quo ducto in 326, numeratorem fractionis eiuſdem fit 1956, pro numero abſoluto; erit igitur æquatio reuocata ad hanc $1\,C + 33\,Q - 88\,R = 1956$. Quod ſi foret æquatio propoſita $1\,C - 3\tfrac{1}{2}\,R = 484$, priùs intelligenda eſt æquatio hunc in modum $1\,C + 0\,Q - 3\tfrac{1}{2}\,R = 484$; reperto communi diuiduo, quem ſcilicet ſine fractione denominator fractionis in propoſita fractione metitur; erit 2, erunt igitur proportionales 1; 2; 4; 8; ſubſcribendi partib; æquationis.

Ducatur $3\tfrac{1}{2}$ numerus radicum in 4: & fit 14, pro numero radicum nouæ æquationis; ducatur 484, in 8, & fit 3872, erit igitur æquatio illa, ad hanc reuocata $1\,C - 14\,R = 3872$, huius porrò æquationis radix eſt 16, diuidenda per 2, communem diuiduum adhibitum, vt proueniat 8, pro radice ſuperioris æquationis.

$1\,C + 0\,Q$	$-\,3\tfrac{1}{2}\,R$		$= 484$
1;	2;	4;	8;
$1\,C - 14\,R = 3872$			

At ſi æquatio ſic ſe haberet, vt numerus elatioris poteſtatis nequeat diuidere, comparationis homogeneum, etſi diuidat cœfficientem. In huiuſmodi caſu accepto numero iam dicto pro vno, eoque minimo, è tribus proportionalibus, pro ſecundo; ſumendus eſt ille, qui diuidit cœfficientem, & ſi non diuidat comparationis homogeneum, vt pro tertio emergat ille, qui diuidat prædictum comparationis, homogeneum. Æquationis enim partibus diuiſis per predictos numeros prouenient quotientes, quorum vnus .s. medius erit cœfficiens nouæ æquationis, alter autem, comparationis homogeneo eiuſdem æquationis munere fungetur.

Iſomœria igitur remedium eſt aduerſus fractionis vitium; Quamobrem plurimam affert vtilitatem. Demonſtratur autem facilè Iſomœriæ præceptum; & ex dictis intelligi poteſt quid circa eius demonſtrationem dicendum occurrat. Interim certum eſt inſtitui diuiſionem vel multiplicationem per communem terminum, vnde non mutatur æqualitas, cui non officit, quod in eius adhibetur pragmatia.

De

De explicatione Æquationum Simplicium, ſiuè Purarum.

CAPVT XI.

MEMORIA debet Analyſta complecti ſuperiùs à nobis explicata, vt ad ea, quæ ſequuntur progredi valeat. Diximus autem ſimplices æquationes eas eſſe, in quibus vnus terminus vni termino æquatur. Cumq; longè faciliores hæ ſint; operæ pretium erit ab his quidem exordiri. *Simplex æquatio quid ſit in memoriam reuocatur.*

Methodus explicandi æquationem inter R, & N.

QVando reperitur æquatio inter R, & N, hoc eſt inter Radicem, & Numerum abſolutum, diuiſo numero abſoluto per numerum characteris R, & procreabitur in quotiente 1 R, pretium quęſitum. *Quid agendũ quando ſit æquatio inter R, & N.*

Sit æquatio 6 R = 60. Diuiſo numero 60, per 6, fit quotiens 10, & 1 R, pretium. Itaq; ſi proponeretur reſoluendum Problema. *Exemplum.*

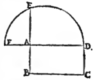
Numerum reperire, qui ductus in 6, producat 60. *Problema.*

Quæſitus numerus eſto 1 R, quæ ſi ducatur in 6, fiunt 6 R, & erit æquatio, vt ſupra, & 1 R, pretium erit 10. Numerus enim hic ſatisfacit quæſtioni, cum ductus in 6, producat 60.

Aduertendum autem diuiſionem faciendam eſſe, non ſecus ac ſi forent numeri abſoluti nulla habita ratione characterum, vt videbimus infra. *Admonitio.*

Demonſtratio hæc eſt. Si ſit æquatio inter numerum radicum, & N; id quod ignoratur eſt numerus, qui ductus in numerum radicum producit numerum abſolutum: quòd ſi diuidatur numerus abſolutus per numerum R, quotiens erit numerus ſatisfaciens. Nam cum ea ſit proportio diuiſoris ad unitatem, quæ diuiſi ad quotientem; ideo æqualitas erit inter factum ſub medijs, & ſub extremis. *Demonſtratio.*

Geometricè ſic. Radicum numerus ſit A F: & planum comparationis homogeneum ſit quadratum, cuius latus A E: quod fiat perpendiculare ad F A: quæ protrahatur ad partes A. Intelligatur recta ducta ab F, ad E, quæ bifariam ſecta ſit: & à puncto ſectionis ducta ſit recta ad rectos angulos, verſus protractam F A; quę occurret illi, vt patet ex Elem. Hoc autem puncto occurſus facto centro, ac interuallo vſq; ad F, deſcribatur ſemicirculus; qui neceſſariò tranſibit per E, vt etiam conſtat ex Elementis: ſecet autem in D, rectam FA, protractam: factumque ſit rectangulum A C, cuius latus A B, ſit æquale ipſi F A. Erit rectangulum A C, ſeu F A D, æquale quadrato ex A E; ergo A D, erit lateris valor. Nam radicis pretium eſt id, quod ductum in numerum radicum, facit productum æquale comparationis homogeneo: ſed A D, huiuſmodi eſt; nam ducta in A B, ſeu in A F, illi æqualem, facit A C, quod eſt æquale quadrato ex A E, comparationis homogeneo; & eadem oritur ex applicatione quadrati rectæ A E, ad F A, radicum numerum, &c. Rectè igitur Regula iubet, vt fiat diuiſio, eo modo, vt dictum eſt.



Methodus explicandi æquationem inter Q, & R.

QVando reperitur æquatio inter Q, & R; diuiſo numero radicum per numerum quadratorum, procreabitur in quotiente 1 R valor. *Declaratur hæc methodus.*

Sit æquatio 6 Q = 60 R: diuiſo numero 60, per numerum 6, fit quotiens 10, & 1 R valor; ſunt enim numeri denominati Collaterales. *Exemplum.*

Quorum

Problema ad hanc methodum illuſtrandam.

Quorum exponentes vnitate ſe ſuperant. Itaque ſic proponetur Problema,
Numerum reperire, qui ductus in 60, producat numerum æqualem illi, qui fit, ducto quadrato numeri quæſiti in 6.

Hæc autem æquatio reducitur per Hypobibaſmum, ad æquationem inter R, & N: & eadem eſt demonſtratio.

Methodus explicandi æquationem inter Q, & N.

Huius methodi præcepta.

QVando reperitur æquatio inter Q, & N: diuiſo numero abſoluto per numerum quadratorum, emergit in quotiente vnius quadrati valor. Ipſius igitur quadrati latus, 1 R, pretium exhibebit.

Exemplum.

Sit æquatio 8 Q = 128. Inſtituta diuiſione, fiet quotiens 16, & 1 Q, pretium: cuius latus quadratum 4, vnius radicis valorem repræſentabit. Itaque ſic proponetur Problema.

Problema.

Numerum reperire, cuius quadratum ductum in 8, producat 128.

Quadrata æqualia habent latera æqualia.

Demonſtratur facilè, quandoquidem per diuiſionem reuocatur æquatio ad æqualitatem, inter Q, & N, non enim communi diuiſione immutatur æqualitas. Cum autem æquatio reducta fuerit inter Q, & N, patet latus quadratum numeri fore vnius radicis pretium: vt enim æqualia ſunt quadrata, ita, & latera.

Methodus explicandi analyſin puri quadrati.

Oportet autem ipſius puri quadrati Analyſin explicare, quod aſſequemur iuxta methodum hic à nobis afferendam.

Propoſueram mihi, quæ ſequuntur in Specioſam Algebram differre; quia tamen vetus Analyſta hinc tantum adiumenti conſequitur, vt quæ alioquin abſoluere non poterat, quam feliciter horum opitulatione perficiat: proinde hęc pauca inde deſumpta nos afferemus. Ne vitio igitur vertas, quòd hoc loco inſerta hęc videas, ſine his enim fieri non poteſt, vt à nobis tradantur præclariora Artis; Hinc enim celebris ille Mathematicus, ſua, de quibus gloriabatur, deprompſit oracula, quorum de induſtria occultata ratione, non parum ſibi laudis aſciuit, & nomen immortalitati conſecrauit. Liceat igitur hæc à Specioſa mutuari.

Pauca ex ſpecioſa Algebra deprompta præmittuntur.

Vt autem ad id perueniamus, quod animus anhelat: præmittere pauca iuuabit, quorum beneficio, latus ex quacunque poteſtate data, liceat eruere; & quidem veſtigijs Specioſæ Logiſtices inſiſtentes, analyſin inſtituemus; cùm enim ſpecies illæ non, vt numeri, ſint mutationibus obnoxiæ; quod in optatis eſt, earum tractatione facilè conſeqemur.

Primò puræ poteſtatis, deinde affectæ tractanda æquatio occurrit. Poteſtas autem, pura multiplex eſt, in infinitum enim aſcendit; hinc multiplex quoque eſt pura æquatio, hęc ad cubo-cubum, noſtra tantummodo extenſa conſideratio abſoluitur cæteris prætermiſſis, vt pote illis, quibus eadem omnino methodus inſeruit. Multiplex etiam eſt affecta poteſtas, ac proinde affecta æquatio multiplex. Et quia poteſtas nullos fines agnoſcit, & quia infinitis implicata eſſe affectionibus poteſt.

Nos explicatis ſimplicibus, ac puris æquationibus, vt pote naturæ doctrinæque ordinem ſeruantes, ad affectas progrediemur, in quarum tractatione a facilioribus, ad implicatiores faciemus gradum. In puris, atque ſimplicibus, exiguus eſt labor, quippe qui tantum in eruenda radice puræ poteſtatis oblatæ poſitus eſt.

Veteres hac tractarunt ſed infeliciter.

Quamuis autem Veteres, his de rebus multa congeſſerint, tamen argumenti non multum introſpecta natura, atque adeo cauſarum ignoratione, diu quidem animis offuſa calligo fuit, præſertim verò, ad affectas æquationes, quod attinet, ſe parum laude præbuere dignos, quinimo videntur, qui tanquam ſi reipublicæ literariæ (vt Oratoris in re ſimili, verbis vtar) offuſa ſempiterna nox eſſet; ita ruebant in tenebris.

Puras autem æquationes explicari poſſe radicis extractione iuxta poteſtatis naturam, liquidò conſtat. In eruenda tamen radice omnis eſt labor; & Veteres quidem præcepta tradiderunt.

Non erit tamen hic alienum ab inſtituto, ſi doceamus quo pacto ipſæ radices eliciantur, & methodum nimirum, & pragmatiam tradendo. Præſidio tamen ſpecioſæ Logiſtices; vt ſuperiùs dicebamus.

La-

Digitized by Google

Latus vniuerſum eſto a ✠ e, conſtans ex ſingularibus lateribus a & e, & indè poteſtates ortæ ſint, vt in adiuncto paradigmate, quæ in infinitum propagari poſſunt.

Paradigma ad poteſtatum geneſin.

$$a + e \quad R$$
$$a + e \quad R$$
$$ae + e^2$$
$$a^2 + ae$$
$$a^2 + 2ae + e^2 \quad Q$$
$$a + e$$
$$a^2e + 2ae^2 + e^3$$
$$a^3 + 2a^2e + ae^2$$
$$a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \quad C$$
$$a + e$$
$$a^3e + 3a^2e^2 + 3ae^3 + e^4$$
$$a^4 + 3a^3e + 3a^2e^2 + ae^3$$
$$a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 \quad QQ$$
$$a + e$$
$$a^4e + 4a^3e^2 + 6a^2e^3 + 4ae^4 + e^5$$
$$a^5 + 4a^4e + 6a^3e^2 + 4a^2e^3 + ae^4$$
$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 \quad QC$$
$$a + e$$
$$a^5e + 5a^4e^2 + 10a^3e^3 + 10a^2e^4 + 5ae^5 + e^6$$
$$a^6 + 5a^5e + 10a^4e^2 + 10a^3e^3 + 5a^2e^4 + ae^5$$
$$a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6 \quad CC$$

Hinc itaque patet, ex binomia radice poteſtas. Quamobrem his præhabitis innoteſcet etiam ratio, qua radices ex propoſita poteſtate erui poſſunt.

Illud porro non eſt ſilentio prætereundum, videlicet poteſtatem ex binomia radice facile deprehendi nulla auxiliante multiplicatione, ſi illud reuocemus in mentem, videlicet.

Poteſtatem quamcumque ex binomia radice, conſtare terminis continuè proportionalibus in ratione nominum ipſius radicis, ſi vnus tantùm ex terminis æqualibus occurrentibus, accipiatur. *Theorema.*

Vt ſit radix binomia $a + e$ cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$. Seu quod idem eſt $a^2 + ae + ae + e^2$ erit vt a^2, ad, ae, ita ae, ad e^2; & quidem ex opere multiplicationis facilè conſtat rem ſic ſe habere; factum enim ſub a^2 & e^2, æquale eſt facto ex ae in ſeipſum. Verùm, vt hæc numeris accommodemus.

$$a + e$$
$$a + e$$
$$a + ae + ae + e^2$$

Sit binomia radix $5 + 3$. (Sumo autem binomium hic lata quadam vſurpatione, non rigoroſè tantùm pro eo, quod ab Euclide accipitur lib. 10. Elementorum.) Et quidem 5, eſto A, & 3, eſto B, at verò C, ſit æqualis A, & D, æqualis B; ſi A, ducatur in C, fiat E, ſi B, in C, fiat F, ſi A, in D, fiat G, ſi denique B, in D, fiat H; Oſtendendum eſt eſſe vt E, ad F; Ita F, ad H, ſeu, vt E ad G, ita G ad H. Quando *Demõſtratio.*

A		B
5	+	3
C		D
5	+	3

E 25. F 15. G 15. H 9.

quidem ſunt quatuor Quantitates, itaut quemadmodum eſt A ad B, ita C, ad D: erit productum, ex prima in quartam, ſcilicet ex A in D, cuiuſmodi eſt F, æquale producto ex ſecunda B in C tertiam, cuiuſmodi eſt G. At verò ex A in C, fit E, ergo A, multiplicans C, & D, cùm producat E, F, ita erit [a] E, ad F, vel ad G, vt C, ad D. Deinde quia B, multiplicans C, D, producit, G, H, ita erit G, ad H; vt C, ad D.

a 17. ſeptimi.

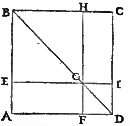
Quamobrem cùm ſit, vt C, ad D, ita E, ad F, ſeu ad G, ex demonſtratis; & vt C, ad D, ita G, ad H, proinde [b] erit, vt E, ad G, ita G, ad H, ſunt ergo proportionales E, G, H, ergo poteſtas quadrata, genita ex binomia radice A † B; conſtans ex E, F, G, H, conſtat ex terminis continuè proportionalibus in ratione nominum, A, B, ſi duorum terminorum F, & G, æqualium in hac poteſtate occurrentium, vnus tantum accipiatur, ſiue F, ſiue G.

b Lemma 14. ſeptimi.

	A 5	B 3	
	C 5	D 3	
E 25	F 15	G 15	H 9
	A ℞ 5	B 3	
	C ℞ 5	D 3	
E 5	F ℞ 45	G ℞ 45	H 9

Non diſſimiliter in reliquis poteſtatibus ratiocinandum eſt; Vt autem quadratum conſtat ex tribus terminis proportionalibus, ſenſu iam dicto, ita Cubus conſtat quatuor. Et Quadrato-quadratum conſtat quinque, & ita deinceps; itaut numerus terminorum, ſit vno amplius, quàm exponens poteſtatis; Vt exponens quadrati eſt 2, ſed conſtat tribus terminis. Exponens Cubi eſt 3, ſed conſtat quatuor terminis. Exponens Quadrato-Quadrati eſt 4, ſed conſtat quinque terminis. &c.

Quod ſi Geometricè id oſtendere vellemus, facilè id fieri à nobis poſſet, vt ſi eſſet quadratum A B C D. Cuius latus A D, diuiſum in F, vnde A F, F D, eſſent nomina, quibus conſtat binomium A D, cuius quadratum eſt ſupradictum, Ducta diametro B D, & ex F, ducatur F H, parallela alterutri laterum A B, C D, occurrens B D, in G, & peracta E I, parallela ipſi A D, vel B C, manifeſtum eſt A G, G C, eſſe ſupplementa contenta ſub ſegmentis A F, F D, hoc eſt ſub nominibus binomiæ radicis.



Oſtendendum eſt eſſe, vt quadratum E H, ad rectangulum G C, vel A G, ita rectangulum G C, vel A G, ad quadratum F I.

Id autem facilè conſtat, nam E H, ad G C, eſt [a], vt E G, ad G I, ſeu H G, ad G I, hoc eſt ad G F. Quare eadem eſt ratio quadrati E H, ad rectangulum G C, quæ eſt huiuſmodi rectanguli ad quadratum F I.

a 1. ſexti.

Ita etiam ſuo modo procedendum erit, in poteſtatibus cæteris.

Sed redeamus vnde diſceſſimus. Si proponatur binomia radix verbigratia $a + e$ ſtatim eius innoteſcet quadratum, ex doctrina iam tradita; conſtabit enim ex terminis proportionalibus a^2; $a e$; e^2. Sed quia vnus ex duobus æqualibus ommittitur, propterea quadratum erit $a^2 + 2 a e + e^2$. Cubus autem conſtat ex quatuor, vt a^3; $a^2 e$; $a e^2$; e^3. Sed quia, ex vtroque genere occurrentium trium æqualium, vnus tantùm accipitur, ob id cubus erit $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$.

Itaque ſi radix fuerit binomia, & inueſtigandum ſit eius quadratum. Inter quadrata nominum, reperiatur medium proportionale planum ſub iiſdem nominibus contentum. Illud enim duplum vtroque quadrato auctum, erit binomiæ radicis quadratum.

Si quæratur poteſtas cubica. Inter nominum cubos, duo ſolida medio loco proportionalia in continua ratione ſub nominibus, eorumque quadratis contenta, reperiantur, vtriuſque vero triplum, auctum, vtroque cubo, fiet cubus binomiæ radicis, &c. & ſic de reliquis &c.

THEO-

Theoremata præmittenda ad numeroſam poteſtatum purarum Analyſin.

THEOREMA I.

Qvadratum à duobus ſingularibus lateribus; ſiue à binomia radice, æquale eſt quadrato lateris primi, plus plano, a duplo latere primo in ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi.

$$\begin{array}{r} a + c \\ a + c \\ \hline a\,c + c^2 \\ a^2 + a\,c \qquad \\ \hline a^2 + 2\,a\,c + c^2 \end{array}$$

Huius Theorematis Veritas, ex opere multiplicationis innoteſcit.

PORISMA.

Itaque ſi ex propoſito reſoluendo Quadrato, ſubducamus quadratum ſingularis lateris primi, quod ſupereſt, eſt applicandum ad duplum ſingulare latus primum; nam ex huiusmodi, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, proſilit ſingulare latus ſecundum.

THEOREMA II.

Cvbus à duobus ſingularibus lateribus, ſiue à binomia radice, æqualis eſt cubo lateris primi, plus ſolido a triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus ſolido a triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo lateris ſecundi.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2\,a\,c + c^2 \\ a + c \\ \hline a^2c + 2\,a\,c^2 + c^3 \\ a^3 + 2\,a^2c + a\,c^2 \qquad \\ \hline a^3 + 3\,a^2c + 3\,a\,c^2 + c^3 \end{array}$$

Huius Theorematis Veritas, ex opere multiplicationis innoteſcit.

PORISMA.

Itaque ſi ex propoſito reſoluendo Cubo, auferatur cubus ſingularis lateris primi; quod ſupereſt, eſt applicandum, ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere eodem; nam ex huiuſmodi, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, emergit ſingulare latus ſecundum.

THEOREMA III.

QVadrato-quadratum à duobus ſingularibus lateribus, ſeu à binomia radice, æquale eſt quadrato-quadrato lateris primi, plus latere ſecundo, in cubum quadruplum lateris primi, plus lateris ſecundi quadrato in quadratum ſextuplum lateris primi, plus lateris ſecundi cubo in latus quadruplum primum, plus lateris ſecundi quadrato-quadrato.

$$a^3 \dagger 3\,a^2e \dagger 3\,a\,e^2 \dagger e^3 \quad C$$
$$a \dagger e \quad R$$
$$\overline{\qquad a^3e \dagger 3\,a^2e^2 \dagger 3\,a\,e^3 \dagger e^4}$$
$$a^4 \dagger 3\,a^3e \dagger 3\,a^2e^2 \dagger a\,e^3$$
$$\overline{a^4 \dagger 4\,a^3e \dagger 6\,a^2e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4} \quad QQ$$

Huius Theorematis Veritas, ex opere multiplicationis innoteſcit.

PORISMA.

ITaque ſi ex propoſito Quadrato-quadrato reſoluendo, ſubtrahatur quadrato-quadratum lateris ſingularis primi; quod ſupereſt, eſt applicandum ad quadruplum cubum ſingulatis lateris primi, plus ſextuplo quadrato lateris eiuſdem, plus quadruplo latere eodem, nam ex huiuſmodi, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, proſilit ſingulare latus ſecundum.

THEOREMA IV.

QVadrato-Cubus, à duobus ſingularibus lateribus; ſiue à binomia radice, æqualis eſt quadrato-cubo lateris primi, plus latere ſecundo, in quadrato-quadratum quintuplum lateris primi, plus lateris ſecundi quadrato, in cubum decuplum lateris primi, plus lateris ſecundi cubo, in quadratum decuplum lateris primi, plus lateris ſecundi quadrato-quadrato, in latus primum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris ſecundi.

$$a^4 \dagger 4\,a^3e \dagger 6\,a^2e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4 \quad QQ$$
$$a \dagger e \quad R$$
$$\overline{\qquad a^4e \dagger 4\,a^3e^2 \dagger 6\,a^2e^3 \dagger 4\,a\,e^4 \dagger e^5}$$
$$a^5 \dagger 4\,a^4e \dagger 6\,a^3e^2 \dagger 4\,a^2e^3 \dagger a\,e^4$$
$$\overline{a^5 \dagger 5\,a^4e \dagger 10\,a^3e^2 \dagger 10\,a^2e^3 \dagger 5\,a\,e^4 \dagger e^5} \quad QC$$

Huius Theorematis Veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PORISMA.

ITaque ſi ex propoſito reſoluendo Quadrato-cubo, ſubducamus quadrato-cubum ſingularis lateris primi; quod ſupereſt eſt applicandum ad quintuplum quadrato-quadratum ſingularis lateris primi, plus decuplo cubo lateris eiuſdem, plus decuplo quadrato lateris eiuſdem, plus quintuplo latere eodem; nam ex huiuſmodi, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA V.

CVbo-Cubus à duobus ſingularibus lateribus; ſiue, à binomia radice, æqualis eſt cubo-cubo lateris primi, plus latere ſecundo, in quadrato-cubum primi ſextuplum, plus lateris ſecundi quadrato, in quadrato-quadratum primi decuquintuplum, plus lateris ſecundi cubo, in cubum primi vigecuplum, plus lateris ſecundi quadrato-quadrato, in quadratum primi decuquintuplum, plus lateris ſecundi quadrato-cubo, in latus primum ſextuplum, plus lateris ſecundi cubo-cubo.

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 \quad QC$$
$$a + e \quad R$$
$$a^5e + 5a^4e^2 + 10a^3e^3 + 10a^2e^4 + 5ae^5 + e^6$$
$$a^6 + 5a^5e + 10a^4e^2 + 10a^3e^3 + 5a^2e^4 + ae^5$$
$$a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6 \quad CC$$

Huius Theorematis Veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PORISMA.

ITaque ſi ex propoſito reſoluendo Cubo-cubo, auferamus cubo-cubum lateris ſingularis primi; quod ſupereſt eſt applicandum ad ſextuplum quadrato-cubum lateris ſingularis primi, plus decuquintuplo quadrato-quadrato eiuſdem, plus vigecuplo cubo eiuſdem, plus decuquintuplo quadrato eiuſdem, plus ſextuplo eodem ſingulari latere primo; nam ex huiuſmodi, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum.

Et ex his innoteſcit ars radicum extrahendarum vnius cuiuſque poteſtatis, vſq; ad Cubo-cubum, & vlteriùs etiam ſi quis voluerit. Si enim è propoſito numero quadrato, latus quadratum eſt eruendum, illudque duobus lateribus ſingularibus conſtare deprehenſum ſit, quorum vnum ſit, a, aliud verò, e; vniuerſum autem a + e, ex multiplicatione quadratica binomij in ſe ipſum, vel eo, quem inſinuauimus modo; proueniet quadratum, $a^2 + 2ae + e^2$ ex quo ſubtracto a^2, remanet $2ae + e^2$, nempe rectangulum applicatum ad duplum latus primum, excedens quadrato, cuius latus, eſt ſingulare latus ſecundum. *Ars extrahēdarum Radicum.*

Si Itaque eruatur latus ex numero deſignato per punctum à ſiniſtris, & eius quadratum ſubducatur ex numero propoſito vniuerſo, remanebit id, quod eſt applicandum ad duplum latus primum; quamobrem huiuſmodi duplum, eſt diuiſor adhibendus, ad indagandum ſingulare latus ſecundum.

Nec diſſimiliter cum latus vniuerſum pluribus, quàm duobus ſingularibus lateribus conſtet, procedendum erit; propterea quod priora duo, vnius munere funguntur, atque tractantur, non ſecus ac ſi vnum ſingulare latus foret, illudque primum.

Quod ſi è propoſito numero ſit eruendum latus cubicum, & illud intelligatur binomium iam dictum, cuius Cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

Hinc planè diſcimus artem extrahendi radicem Cubicam.

Nam in propoſito numero facta debita ſignatione punctorum, & ex primo puncto à ſiniſtris elicito cubico latere, eiuſque cubo ſubducto ex propoſito numero, id quod remanet applicandum eſt ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, vt inoteſcat ſingulare latus ſecundum; ita vt diuiſor, ſit triplum quadratum primi lateris, plus triplo latere eodem.

At

At verò ſi è propoſito numero eruendum ſit latus quadrato-quadratum ; illudq; intelligatur binomium iam dictum, cuius quadrato-quadratum eſt. $a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$.

Facta enim ſignatione per puncta iuxta quadrato-quadrati naturam. Vbi deprehenſum fuerit latus vniuerſum duobus lateribus ſingularibus conſtare ; elicito latere quadrato-quadrato primi membri, vſque ad primum punctum ad læuam; quod ſupereſt eſt applicandum ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem plus eodem quadruplo &c. Quæ vt clariùs percipiantur iuuabit aliquod exemplum afferre.

Explicatio ſupradictorum.

Propoſita ſit æquatio $1 Q = 1296$. Facta ſignatione punctorum iuxta radicis quadratæ naturam ; effingendum eſt latus latus vniuerſum eſſe $a + e$, conſtans ex ſingularibus lateribus, a, & e cuius quadratum eſt $a^2 + 2 a e + e^2$ comparationis homogeneum ſit Z planum proinde $a^2 + 2 a e + e^2$ æquabitur Z plano, ex Z plano ſubducto a^2 remanet $2 a e + e^2 = Z pl. - a^2$; applicando ad $2 a$ &c. Itaque facta applicatione prouenit e. Non diſſimiliter ex 1296, ſubducamus quadratum primi ſingularis lateris quod eſt 3, cuius quadratum eſt 9, quo ſubtracto ex 1296, remanet 396, applicandum ad duplum primi ſingularis lateris, vt proueniat 6, numerus ducendus in 6, duplum primi ſingularis lateris, & producto 360, (eſt enim latus ſingulare primum numerus denariorum cum latus vniuerſum duabus figuris conſtet) & producto inquam 360, ſubducto ex 396, remanet 36, ex quo ſubtrahi debet 36, quadratum ſecundi ſingularis lateris ; & ſic in reliquis, ſuo modo procedendum.

Explicatio methodi propoſiti.

Primò quidem animaduertendum eſt poteſtatem puram in quocunque gradu magnitudinum proportionaliter aſcendentium à tot ſingularibus lateribus componi, quot figuris numeralibus pro ſingularium valore diſtribuendis, & exprimendis, radix ipſa vniuerſalis in geneſi conſtat : ſiue hæc pura poteſtas ſit purum Quadratum, ſiue purus Cubus, ſiue purum Quadrato-quadratum, &c.

Quãdo radix vna figura conſtat.

Quapropter ſi radix vnica tantùm figura conſtet, vt 5, ab eaque ſit propaganda poteſtas ; ducta figura in ſe, vel in ſui gradum, qualem poteſtatis genus expoſcit, habetur ipſa poteſtas.

Quando duabus.

Quod ſi duabus figuris radix ipſa conſtet, vt 15 ; iam poteſtas creabitur ex 10, & 5, tanquam ex lateribus ſingularibus : ex 10, in 10, fit 100 ; ex 10, in 5, fit 50 ; rurſus ex 10, in 5, fit 50 ; & ex 5, in 5, fit 25, horum ſumma 225 : ſi loquamur de quadrato habetur poteſtas, vt patet. Si verò Cubus deſideretur, tunc operatio iuxta iſtius gradus naturam perficienda eſt.

Quando tribus.

At verò ſi Radix tribus conſtaret figuris, vt 125 ; crearetur poteſtas abs 100, 20, & 5.

Quando quatuor.

Si radix quatuor figuris conſtaret, vt 1225 ; creabitur poteſtas, ab 1000, 200, 20, & 5. Sic etiam ſi pluribus figuris radix ipſa conſtaret : etiam poteſtas à pluribus ſingularibus lateribus ; à tot ſcilicet, quot ipſamet radix vniuerſalis, conſtat, numeralibus figuris in geneſi componitur.

Analyſis poteſtatis quid.

Poteſtatis itaque reſolutio, quam Græci Analyſin appellant, in tot ſingularia latera quidem diſtribuitur ; quot radix vniuerſalis figuris numeralibus in geneſi conſtat : ipſaq; pro ſingularium valore diſtribuenda, & exprimenda.

Primum obſeruandum ad Analyſeos inſtitutionem.

Primum autem, obſeruatione dignum videtur : vt extrema poteſtatis reſoluendæ figuræ (quæ tamen prima eſt pergendo a dextra ad læuam) ſedes conſtituatur vnitatum, quæ metiuntur poteſtatem lateris ex ſingularibus extremi, & minimi ; punctoque ſubtus notetur : eſt enim extremum latus à dextris, illudque minimum.

Secundum.

Nota primi gradus parodici ad poteſtatem eſt R.

At verò figura ſuccedens pergendo à dextra ad læuam ſedes eſt primi gradus ad poteſtatem ipſam parodici, &c. (dictum eſt autem ſuperiùs, quid ſit gradus parodicus ad poteſtatem ;) notariq; debet congruenti nota, ſcilicet R : quandoquidem nos hanc notam adhibemus pro primo gradu parodico ad poteſtatem.

Tertium.

Succedens deinceps figura notari debet ſecundo gradu parodico, ſuaq; congruenti nota : qualis eſt Q : & ea quidem ſerie deinceps procedendum erit in parodicis gradibus, notiſq; congruentibus, donec ad poteſtatem ipſam perueniatur.

Quartum.

At verò cum ad poteſtatem deuentum fuerit, rurſus punctum eſt apponendum, ſymbolum vnitatum, quæ poteſtatem ipſam lateris penultimi metiuntur. Rurſus poſt

huiuſmodi

huiuſmodi punctum progrediendum eſt in anteriora, ſuoque ſunt ordine collocandæ notæ, graduum videlicet parodicorum, atq; deſcripto iam à nobis modo, conſtanti quodam ordine procedendum eſt, donec ad lateris poteſtatem ex ſingularibus primi, maximiq; perueniatur.

Quamobrem tot numeralibus figuris radix ipſa conſtabit, quot punctis ſingularium poteſtatum conſtat reſoluendi numeri poteſtas: deindè procedendum iuxtà leges analyſeos, quæ nimirum illi congruit poteſtati. *Quintum*

Reperiatur latus primum ſingulare, ipſius ſingularis poteſtatis primæ, hoc autem ex ſingularibus lateribus maximum eſt. *Sextum.*

Deinde ſingularis primi lateris gradus parodici, ſecundum poteſtatis conditionem multiplicari, & ſinguli ſua collocari ſede, ſubijcique reſoluendæ magnitudini debent: poſt quam ea prima ſingularis poteſtas adempta fuerit. Quod autem ex huiuſmodi applicatione oritur, latus ſecundum ſtatuendum eſt. Hæc autem applicatio non omnino eſt accurata: quandoquidem ad ipſum quoq; latus ſubaudiendum eſt fieri applicationem, ea tamen lege; vt homogenea, quæ fiunt ex ſingulari illo ſecundo latere, ſuiſque parodicis gradibus, in primum latus, primique lateris reciprocos gradus, reſoluendæ magnitudini æquantur, vel ei demum cedant: Si verò æquent, opus iam ſolutum eſt: ſi verò cedant, & punctum aliquod ſuperſit poteſtati addictum; duo iam elicita latera, vnius munere funguntur, ſcilicet maioris. Atque non diſſimili arte ad ſequentis lateris inuentionem, & quidem minoris, procedendum eſt. *Septimum.* *Obſeruatio.*

At verò ſi dum cedunt, non ſuperſit aliquod punctum ipſi addictum poteſtati; ſignum euidens latus irrationale eſſe. Tunc autem collecto lateri fragmentum adiungendum eſt, repertum quidem ea arte, quam Arithmetici, de Radicum extractione tractantes, explicare ſolent.

E dato in numeris quadrato puro, latus analyticè elicere. *Problema.*

Propoſita ſit æquatio 1 Q ⫠ 4096: & oporteat eam explicare, Radicis pretium exhibendo. Propoſitum itaque quadratum reſoluendum, à tot ſingularibus lateribus componitur, quot figuris radix vniuerſalis quæſita in geneſi eiuſdem quadrati conſtat. Vt autem figurarum numerum ex quibus vniuerſum latus conſtat aſſequi valeamus; propoſiti numeri quadrati extrema figura, à dextris ad læuam procedendo, puncto notari debet: & ſic alternæ, in anteriora progrediendo, ſunt notandæ, alternæ ſunt omittendæ; cum vno ſcanſili gradu ad hanc Poteſtatem, nempe quadratum perueniatur. Itaque duo erunt puncta in ſuprapoſito numero; ſi nimirum ſignatio, per puncta ad modum ſuperiùs explicatum inſtituatur: quamobrem totum ipſum quadratum, tot ſingularibus quadratis, & totum latus, tot ſingularibus lateribus conſtare, pronunciandum erit.

Quando verò quadratum componitur à duobus ſingularibus lateribus; quadratum lateris primi, plus plano facto à duplo lateris primi in ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi, æquale eſt compoſito quadrato vt ſupra dictum eſt.

Q lateris primi. *Theorema Syntheticum.*

✠ plano facto à duplo lateris primi in ſecundum.

✠ Q Lateris ſecundi; æquale eſt compoſito quadrato.

Illud autem animaduertendum eſt, figuram primo puncto ad læuam ſignatam, non immeritò dici ſedem vnitatum metientium quadratum primi lateris, eiuſdemq; maioris; ſuccedentem autem ſedem eſſe plani ſub R; & deniq; extremam ſedem eſſe vnitatum metientium quadratum ſecundi lateris. *Notandum.*

Si verò plura ſuperfuiſſent puncta; quadratum ab initio intelligitur componi tantum à duobus illis lateribus, quæ quidem elicita iam funguntur vnius lateris munere; poſtea verò intelligeretur componi quadratum ipſum ex illo aggregato, tanquam ex primo latere, & ex ſequente tanquam ex latere ſecundo.

Sit itaq; iniunctum; è dato numero quadrato 4096, analyticè elicere latus. Primi quadrati latus elicietur ex 40: quamuis autem 40, non ſit numerus quadratus, ſed maior eſt 36, numero proximè quadrato minori; ob id dicetur latus primum eſſe 6: ſi tamen cætera conſentiant, quod ex operis euentu cognoſcetur. At verò 6, eſt latus primum vnica figura expreſſum: quam ſequi tot numerales *Exemplum.*

circulos

Digitized by Google

circulos ſub intelligendum eſt, quot ſupererunt puncta quadratica; nempe vnus in hoc numero. Modò ex 40, auferantur 36, remanebunt 4, vt fiat numerus reſiduus: 496, qui quidem conſtat, tum ex plano ſub 12, duplo lateris primi, & latere ſecundo indagando, tum etiam ex quadrato eiuſdem lateris ſecundi.

Sumatur itaque 12, duplum lateris primi quadrati; illudque diuiſor ſtatuatur ſub figura plani ſub R: dum tamen ponas in anteriora dextrorſum; ita vt in anteriora prorumpat, ſi qua duplicatio adiecerit. Si itaque ad 12, applicemus 49, fiet quotiens 4, ſeu latitudo.

Notandum. Illud hic obſeruo, ſi latitudinem non feciſſet intra 10, fuiſſe inditium, primum elicitum latus 6, minus eſſe æquo, atque adeò maius accipi debuiſſe.

Si verò ducatur 4, in 12, fiet 48, duplum plano ſub primo, ſecundoque lateribus. Quadratum autem à ſecundò latere 4, eſt 16, quod collocandum eſt, vt vides in adiuncto paradigmate, nempè ſub puncto ei addicto. Quod ſi hoc quadratum ſub ſede quadrati ſecundi, & planum, proximè deſcriptum ſub ſede plani radicum, ſimul addantur, faciunt 496, numerum æqualem reſiduo propoſito quadrato: atque adeo concludendum erit, quæſitum latus eſſe 64.

Aſymmetrum latus quando. Quod ſi planorum ſumma non fuiſſet æqualis reſiduo, ſed eo minor, argumentum eſſet quadrati latus eſſe aſymmetrum: ob id non explicatur, ſed aſymmetriæ notam adhibendo, abſoluetur operatio. Vt ſi foret 1 Q ⵌ 5, dicemus 1 R, valorem eſſe ℞ 5: Radix autem proxima elicitur ad eum modum, quo Arithmetici eliciendam eſſe tradunt.

Paradigma analyſeos Quadrati puri, iuxta ſuperiorem θεωρίαν elaboratum.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Z pl. z²,	Quadratum reſoluendum.	4 0 . Q 1	9 6 R. Q 1 1	Sedes ſingularium quadratorum, planorumque ſub lateribus.	o ——— R 6 4 Q 36: 16	o Tot numerales circuli quot puncta quadratica, lateraue ſingularia.
a²	Planum ablatitium	3 6		Quadratum lateris primi.	a 60	
Z pl. - a² z²,	Reliquum reſoluendi Quadrati.	4	9 6			

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Z pl. - a² z²,	Reliquum reſoluendi Quadrati.	4	9 6		a † e 60 † 4
2 a	Diuiſor duplum lateris primi.	1	2		
2 a e	Plana ablatitia.	4	8	A latere ſecundo in duplum latus primum.	
e²			1 6	Quadratum lateris ſecundi.	
2 a e † e² ⵌ Z pl. - z², a²	Summa planorum ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendo quadrato.	4	9 6		

Pa-

Paradig ma ſecundum analyſeos Quadrati puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt θεωρίαν, extructum.

I. *Eductio lateris ſingularis primi.*

Quadratum reſoluendum.	7 . Q I	6 1 R . Q I I	7 6 R . Q I I I	Sedes ſingularium quadratorum planorumq; ſub lateribus.	o o o — Tot numerales circuli, quotpuncta quadratica, lateraué ſingularia. R 2 7 6 Q 729 : 3 6	Z pl. z^2,
Planum ablatitium.	4			Quadratum lateris primi.	a 200	a^2
Reliquum reſoluendi Quadrati.	3	6 1	7 6			Z pl. − a^2 z^2,

II. *Eductio lateris ſingularis ſecundi.*

Reliquum reſoluendi Quadrati.	3	6 1	7 6		Z pl. − a^2 z^2,
				a + e 200 + 70	
Diuiſor duplum lateris primi.		4			2 a
Plana ablatitia.	2	8		A latere ſecundo in duplum latus primum.	2 a e
		4 9		Quadratum lateris ſecundi.	e^2
Summa planorum ablatitiorum.	3	2 9			2 a e + e^2
Reliquum reſoluendi Quadrati.		3 2	7 6		Z pl. − a^2 − z^2; 2 a e − e^2

Iam duo elicita latera vnius muneris funguntur.

III. *Eductio lateris ſingularis tertij.*

Reliquum reſoluendi Quadrati.	3 2	7 6	a + e 270 + 6	Z pl. − &c. z^2,
Diuiſor duplum lateris primi.	5	4		
Plana ablatitia.	3 2	4	A latere ſecundo in duplum latus primum.	
		3 6	Quadratum lateris ſecundi.	
Summa planorum ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendo quadrato.	3 2	7 6		

O

E dato

E dato in numeris Cubo puro, latus Analyticè elicere.

Si data ſit æquatio 1 C ⊏ 592704, & oporteat eam explicare pretium radicis exhibendo. Hic numerus autem intelligitur componi à toto ſingularibus lateribus, quot figuris latus vniuerſum, de quo quæritur in geneſi, ſeu efformatione cubi conſtat.

Figura quomodo ſignari debeant. Vt autem figurarum numerum aſſequamur, debent ipſius numeri figuræ punctis deſignari; ita vt à dextra ad læuam pergendo, extrema propoſiti numeri cubi figura puncto ſignetur; reliquarum verò in anteriora pergendo tertia quæque notari debet, hoc eſt duabus intermedijs relictis; quoniam duo ſunt gradus ſcanſiles, quibus ad cubum peruenitur, nempe R, Q. Cum itaque duo ſint puncta; pronunciandum erit totum cubum conſtare tot ſingularibus cubis, atque etiam latus tot, quidem nempè duobus ſingularibus lateribus.

Quando autem componitur cubus à duobus lateribus ſingularibus, cubus lateris primi, plus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in ſecundum latus, plus cubo lateris ſecundi, æquatur compoſito cubo.

Theorem. Symbolicum. *C lateris primi.*
✠, ſolido à triplo Q. lateris primi in ſecundum latus,
✠, ſolido à triplo latere primo in Q. ſecundi.
✠ C, lateris ſecundi, æquatur compoſito Cubo.

Prima, quæ ad læuam occurrit, puncto ſignata figura ſedes erit vnitatum metientium Cubum lateris primi, & maioris.

At verò figura ſequens ſedes erit tripli ſolidi ſub quadrato eiuſdem; Figura autem ſuccedens erit ſedes tripli ſolidi ſub ipſo latere. Demum extrema figura ſedes eſt vnitatum metientium cubum lateris ſecundi.

Quando plura fuerint pũcta. Si verò plura puncta ſuperfuerint intelligetur cubus ab initio componi tantum ab illis duobus lateribus, quæ quidem cum elicita forent, vnius vice fungerentur; poſtea verò intelligeretur componi ex illo aggregato, tanquam primo latere, & ſequente, vt ſecundo; & ita deinceps ordine conſtanti, ex adiuncto autem Paradigmate; omnia ſine vlla alia explicatione comprehendere licebit.

Methodus. Primò igitur eliciatur latus cubicum ex numero ad primum vſque punctum ad læuam 592, cuius latus cubicum eſt 8. Dicimus itaque 8, eſſe latus primum ſi cætera conſentiant, quod operis euentus indicabit, quemadmodum inferiùs conſtabit.

Hoc autem primum latus vnica exprimitur figura ad quam intelligendum eſt ſequi tot numerales circulos, quod ſupererunt puncta cubica. Cubus autem ex 8, eſt 512, quo ſubtracto ex 592, remanet 80; adeò, vt totus reſiduus numerus fiat 80704, conſtans ſolido ſub lateris ſecundi quadrato, & triplo primi, plus ſolido ſub triplo quadrati primi, & latere ſecundo inueniendo, plus cubo ſecundi.

Hoc autem aduertendum; vt 192, triplum quadratum lateris primi collocetur ſub ſede gradui ſecundo addicta, hoc eſt proxima à puncto primi cubi, nempè ſub 7. At verò 24; triplum latus primum collocari debet ſub ſuccedente gradui primò addicta hoc eſt in appoſito exemplo ſub 0, ſuccedente ad 7, hi verò numeri ſic ſunt conſtituendi tanquam diuiſores in anteriora prompturi vrgente neceſſitate. *Methodus inueniendi ſecundam figuram.*

Hic porrò numerus ritè diſpoſitus 192, eſt ille ad quem applicari debet numerus 807, vt fiat latitudo 4, pro ſecundo latere quæſito; ac proinde 4, erit ſecundum latus quæſitum, cæteris diuiſoribus conſentientibus, quod ex operis euentu dignoſcere licebit. At verò ſi ex illa applicatione non prouenisſet numerus intra 10, contentus, argumento fuiſſet latus illud primum 8, (hoc idem ſuperiùs innuimus) minus æquo fuiſſe, atq; opus denuò inchoandum, at ob id cubi proximè maioris latus eligendum, & ita deinceps. Si verò 4, ducantur in 192, fit 768, triplum ſolidum ſub quadrato lateris primi, & ſecundo. At verò 16, quadratum è 4, ſi ducatur in 24, triplum lateris primi, facit 384, triplum ſolidum ſub quadrato lateris ſecundi, & primo. Denique 64, eſt cubus è 4.

Hi

Hi verò numeri hac lege diſponuntur, vt 64, cubus lateris ſecundi, ſub puncto ei addicto collocetur; ſolidum autem triplum ſub quadrato lateris ſecundi : & latere primo, ſub nota primi gradus, puta R, ſolidum deindè triplum ſub latere ſecundo, & quadrato lateris primi, ſub nota gradus ſecundi, nimirùm Q, quoniam ad primum latus intelligitur comitari circulus numeralis. *Numerorum diſpoſitio.*

Si ſumma ſolidorum non fuiſſet æqualis reſiduo, ſed eo minor, argumentum eſſet cubi latere aſymmetri; ob id non explicabitur, ſed aſymmetriæ notam exhibendo id fit, verbi gratia ſi ſit 1 C ⫦ 4, dicetur 1 R, valor ℞ C 4. *Quando ſolidorũ ſumma non eſt æqualis reſiduo.*

Quod ſi proxima radix quæratur, proxima inquam veræ, procedendum ad eum modum, quo ſuo loco Arithmetici docent, & nos alibi explicuimus. *Proxima radix quomodo inuenienda.*

Paradigma analyſeos Cubi puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt θεωρίαν extructum.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Cubus reſoluendus.	5 9 2 . C 1	7 0 4 QR . C 11	Sedes ſingularium cuborum, & ſolidorum ſub gradibus.	0 — 0 R 8 — 4 Q 6 4 — 1 6 C 5 1 2 : — 6 4	Tot numerales circuli quot puncta cubica, lateraue ſingularia.	Z ſol. z^3;
Solidum ablatitium.	5 1 2		Cubus lateris primi.	2 8 0		a^3
Reliquum reſoluendi Cubi.	8 0	7 0 4				Z ſol.−a^3 z^3;

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Reliquum reſoluendi Cubi.	8 0	7 0 4		a † e 80 † 4	Z ſol.−a^3 z^3;
Diuiſores. Triplum quadratum lateris primi.	1 9	2			3 a^2
Diuiſores. Triplum latus primum.		2 4			3 a
Summa diuiſorum.	1 9	4 4			3 a^2 † 3 a
Solida ablatitia.	7 6	8	Solidum à latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.		3 a^2e
	3	8 4	Solidum à quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.		3 ae^2
		6 4	Cubus lateris ſecundi.		e^3
Summa ablatitiorum ſolidorum æqualis reſiduo reſoluendo Cubo.	8 0	7 0 4			3 a^2e † 3 ae^2 † e^3 ⫦ Z ſol.−a^3 / z^3;

E dato in numeris Quadrato-quadrato puro, latus analyticè elicere.

Sit propoſita æquatio huiuſmodi 1 QQ ⊐ 456976, & oporteat inuenire, quanta ſit ℞, propoſiti Quadrato-quadrati. Id autem vt aſſequamur, oportet aduertere Quadrato-quadratum intelligi componi à tot ſingularibus lateribus, quot figuris latus quæſitum conſtat in geneſi, ſiue efformatione ipſius Quadrato-quadrati. Vt autem, figurarum numerum præfinire poſſimus, à dextra quidem ad læuam procedendo figuram extremam puncto notare debemus, reliquarum autem in anteriora progrediendo, quartas quaſque figuras, tribus nimirum intermedijs prætermiſſis; eam ſcilicet ob cauſam, quia ad Quadrato-quadratum tribus ſcanſilibus gradibus peruenitur, nempè R, Q, C.

Si itaque duo extiterint puncta, tot etiam Quadrato-quadratum vniuerſale, ſingularibus Quadrato-quadratis conſtare pronunciandum eſt; atque adeo, & latus etiam ipſum vniuerſale, tot ſingularibus lateribus.

Quando verò Quadrato-quadratum componitur à duobus ſingularibus lateribus, tunc.

QQ lateris primi.
+ *latere ſecundo in C, quadruplum lateris primi.*
+ *lateris ſecundi Q, in ſextuplum quadratum lateris primi.*
+ *lateris ſecundi C, in latus quadruplum primum.*
+ *lateris ſecundi QQ.*
Aequale eſt Quadrato-quadrato aggregati laterum.

Inſuper illud etiam animaduertendum, figuram ſignatam puncto primùm ad læuam occurrentem, dici ſedem vnitatum metientium quadrato-quadratum lateris primi, & maioris: figuram autem ſequentem, ſedem planoplani ſub cubo eiuſdem lateris primi quadruplando: ſuccedentem, ſedem planoplani, ſub quadrato eiuſdem lateris primi ſextuplando: rurſus ſuccedentem, ſedem eſſe planoplani ſub ipſo primo latere quadruplando: demum extremam ſedem eſſe vnitatum, metientium Quadrato-quadratum lateris ſecundi.

Ita quoque ſi plura puncta extarent. Siquidem QQ, intelligeretur ab initio componi tantùm à duobus illis lateribus, quæ dum elicita eſſent, vnius quidem vice fungerentur; poſtea verò intelligeretur componi ex aggregato illo, veluti ex latere primo, & ex ſequente, tanquam ex ſecundo, &c.

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati puri iuxta eam, quæ premiſſa eſt θεωρίαν extructum.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Z plp. z⁴,	Quadrato quadratum reſoluendum.	4 5 . QQ 1	6 9 7 6 CQR . QQ 11	Sedes ſingularium Quadrato-quadratorum, & planoplanorum ſubgradibus.	o — o R 2 : 6 Q 4: 36 C 8: 216 QQ 16: 1296 a 20	Tot numerales circuli, quot pûcta quadrato-quadratica, lateraue ſingularia.
a⁴,	Planoplanum ablatitium.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.		
Z pl.p−a⁴ z⁴,	Reliquum reſoluendi quadrato-quadrati.	2 9	6 9 7 6			

II. Eductio

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

	2 9	6 9 7 6	$a + e$ $20 + 6$	Z pl.p—a^4 z^4,
Diuiſores: Quadruplus cubus lateris primi.	3	2		$4a^3$.
Diuiſores: Sextuplũ quadratũ eiuſdem		2 4		$6a^2$
Diuiſores: Quadruplum idem latus.		8		$4a$
Summa diuiſorum.	3	4 4 8		$4a^3 + 6a^2 + 4a$
Plano-plana ablatitia.	19	2	A latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi.	$4a^3e$
	8	6 4	A quadrato ſecundi in ſextuplum quadratum primi.	$6a^2e^2$
	1	7 2 8	A cubo ſecundi in quadruplum lateris primi.	$4ae^3$
		1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	e^4
Summa plano-planorum æqualis reſiduo reſoluendi Quadrato-quadrati.	29	6 9 7 6		$4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 =$ z pl.p—a^4 z^4,

Quòd ſi reſiduum non fuiſſet æqualis ſummæ plano-planorum, &c. latus elicietur proximè verò, vt Arithmetici docent, nimirùm adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & ex hoc extenſo elicietur latus Quadrato-quadratum, & procedetur, vt ſuprà.

E dato in numeris Quadrato-cubo puro, latus analyticè elicere.

Numerus quadrato-cubus componi quidem intelligitur à tot ſingularibus lateribus, quot figuris latus vniuerſale quæſitum conſtat, idgeneſi quadrato-cubi: Vt autem hanc figurarum numerum aſſequamur fieri debet deſignatio per puncta hunc in modum. Extrema numeralis figura Quadrato-cubi initio ducto à dexſtris ad ſiniſtram procedendo, ſignanda eſt puncto; & è reliquis verò in anteriora progrediendo, quinæ alternæ figuræ ſignari debent, quatuor intermedijs relictis; cum nimirum quinque gradibus ſcanſilibus ad quadrato-cubum perueniatur, videlicet R, Q, C, QQ. Cum igitur duo ſint puncta, tot etiam conſtare quadrato-cubus vniuerſalis ſingularibus quadrato-cubis, atq; etiam latus vniuerſale tot lateribus ſingularibus, pronunciabitur.

Cùm autem quadrato-cubus componitur à duobus ſingularibus lateribus.

QC, lateris primi.
✠, latere ſecundo in QQ, quintuplum lateris primi.
✠, lateris ſecundi Q, in C, decuplum lateris primi.
✠, lateris ſecundi C, in Q, decuplum lateris primi.
✠, lateris ſecundi QQ, in latus primum quintuplum.
✠, QC, lateris ſecundi.
Aequalis eſt quadrato-cubo aggregati laterum.

Paradigma

Paradigma analyſeos Quadrato-cubi puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt θεωρίαν extructum.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Z pl.ſol. z^5,	Quadrato-cubus reſoluendus.	1 1 8	8 1 3 7 6	Sedes ſingularium quadrato cuborum, & plano ſolidorum ſub gradibus.	o / R 2 / Q 4. / C 8. / QQ 16. / QC 32.	o / 6 / 3 6 / 2 1 6 / 1 2 9 6 / 7 7 7 6
		.	QQCQR.			
		QC 1	QC 11			
a^5	Plano-ſolidum ablatitiũ.	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.		a / 20
Z pl.ſ. $-a^5$. z^5,	Reliquum reſoluendi quadrato-cubi.	8 6	8 1 3 7 6			

Tot numerales circuli, quot puncta quadrato-cubica, lateraue ſingularia.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Z pl.ſ. $-a^5$ z^5,	Reliquum reſoluendi quadrato-cabi	8 6	8 1 3 7 6	
$5a^4$	Diuiſores { Quintuplũ quadrato-quadratũ lateris primi.	8	o	a † e / 20 † 6
$10a^3$	Decuplus cubus eiuſdem.		8 o	
$10a^2$	Decuplum quadratũ eiuſdem.		4 o	
$5a$	Quintuplum latus primum.		1 o	
$5a^4 † 10a^3 † 10a^2 † 5a$	Summa diuiſorum.	8	8 4 1 0	
$5a^4e$	Plano ſolida ablatitia. {	4 8	o	A latere ſecundo in quintuplum quadrato-quadratum lateris primi.
$10a^3e^2$		2 8	8 o	A quadrato, lateris ſecundi in decuplum cubum primi.
$10a^2e^3$		8	6 4 o	A cubo lateris ſecundi in decuplum quadratum primi:
$5ae^4$		1	2 9 6 o	A quadrato-quadrato ſecundi in quintuplum latus primum.
e^5			7 7 7 6	Quadrato-cubus lateris ſecundi.
$5a^4e † 10a^3e^2 † 10a^2e^3 † 5ae^4 † e^5 =$ Z pl.ſ. $-a^5$ z^5,	Summa plano ſolidorum æqualis reſiduo reſoluendo quadrato-cubo.	8 6	8 1 3 7 6	

E dato in numeris Cubo-cubo puro, latus analyticè elicere.

Propoſita ſit æquatio huiuſmodi 1 CC = 191102976, quæratur Radix.

Fiat deſignatio per puncta, vt collocetur punctum ſub extrema figura 6; hoc enim punctum deſignat vnitates metientes extremum Cubo-cubum. At verò cùm ab vnitatibus ad Cubo-cubum ſint quinque gradus R, Q, C, QQ, QC; ob id quinque intermediæ figuræ ſunt omittendæ; his autem quinque intermiſſis 7, 9, 2, o, 1, quæ rurſus occurrit 1, ſignanda puncto. Geneſis autem Cubo-cubi ſic ſe habet.

CC lateris

Digitized by Google

C C lateris primi.
✠ latere ſecnndo in QC, primi ſextuplum.
✠ latdris ſecundi Q, in QQ, primi decuquintuplum.
✠ lateris ſecundi C, in C, primi vigecuplum.
✠ lateris ſecundi QQ, in Q, primi decuquintuplum.
✠ lateris ſecundi QC, in latus primum ſextuplum.
✠ lateris ſecundi C C.
Aequatur Cubc-cubo aggregati laterum.

His autem animaduerſis analyſis non latebit, & inſtituetur ad eum modum, quo hìc conſpicitur.

Paradigma analyſeos Cubo-cubi puri iuxta eam, quæ premiſſa eſt θεωρίαν extructum.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Cubo-cubus reſoluendum.	1 9 1	1 0 2 9 7 6	Sedes ſingularium Cubo-cuborum, & Solido-ſolidorum ſubgradibus.	0 — 0	Tot numerales circuli, quot puncta cubo-cubica, lateraue ſingularia.	Z ſol. ſ. z^6;
	.	QC QQ CQR.		R 2 — 4		
		CC 11		Q 4: — 16		
				C 8: — 64		
				QQ 16: — 256		
	CC 1			QC 32: 1024		
				CC 64: 4096		
Solido-ſolidum ablatiuum.	6 4		Cubo-cubus lateris primi.			a^6
	—	—		a 20		
Reliquum reſoluẽdi Cubo-cubi.	1 2 7	1 0 2 9 7 6				Z ſ. ſ. − a^6 z^6;

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Reliquum reſoluẽdi Cubo-cubi.		1 2 7	1 0 2 9 7 6		Z ſ. ſ. − a^6 z^6;
		—	—	a † e 20 † 4	
Diuiſores	Sextuplus quadrato-cubus lateris primi.	1 9	2		$6a^5$
	Decuquintuplum quadrato-quadrati eiuſdem.	2	4 0		$15a^4$
	Vigecuplus cubus eiuſdem.		1 6 0		$20a^3$
	Decuquintuplum quadrati eiuſdẽ.		6 0		$15a^2$
	Sextuplum latus primum.		1 2		$6a$
		—	—		
Summa diuiſorum.		2 1	7 6 6 1 2		$6a^5$ † $15a^4$ † $20a^3$ † $15a^2$ † $6a$
Solido-ſolida ablatitia.		7 6	8	A latere ſecundo in ſextuplum Quadrato-cubum lateris primi.	$6a^5e$
		3 8	4 0	A quadrato ſecundi in decuquintuplum Quadrato-quadrati primi.	$15a^4e^2$
		1 0	2 4 0	A cubo ſecundi in vigecuplum cubum primi.	$20a^3e^3$
		1	5 3 6 0	A quadrato-quadrato ſecundi in decuquintuplum quadratum primi.	$15a^2e^4$
			1 2 2 8 8	A quadrato-cubo ſecundi in ſextuplum latus primum.	$6ae^5$
			4 0 9 6	Cubo-cubus ſecundi.	e^6;
		—	—		
Summa ſolido-ſolidorum æqualis reſoluendo Cubo-cubo,		1 2 7	1 0 2 9 7 6		$6a^5e$ † $15a^4e^2$ † $20a^3e^3$ † $15a^2e^4$ † $6ae^5$ † e^6 = Z ſ. ſ. − a^6 z^6;

SCHO-

SCHOLION.

Modos attulimus, quibus iuxta methodum hanc ſunt eliciendæ Radices, & quidem ℞ Q, ℞ C, ℞ QQ, ℞ QC; ℞ CC; Poſſunt ſupradicta & cæteræ ſimplices æquationes explicari, methodo quidem antiqua non minùs faliciter; vt vnicuiq; etiamſi leuiter in hoc puluere verſato, perſpicuum eſſe poteſt. Perinde ſiquidem eſt huius æquationis 1 Q ⚌ 4096. Radicem quadratam extrahere, ac eſt ex numero 4096, Radicem eruere quadratam; quemadmodum huius æquationis 1 C ⚌ 592704. Radicem exhibere nil aliud eſt, quàm ex numero 592704, latus cubicum eruere, & ita de alijs Radicum generibus intelligendum; quo verò modo huiuſmodi Radices extrahantur in Arithmetica practica pertractatur

Præmiſſa eſt purarũ æquationum explicatio analytica, vtpote illa à qua affectarum depẽdet. Auctor quantum ad alia paradigmata huiuſmodi æquationũ remittit lectorẽ ad ea, quæ aliàs ipſe euulgauit, cõtentus hic methodum docere ad innumera conficienda.

Præmiſimus autem purarum æquationum reſolutionem, & paradigmata concinnauimus ex ſua theoria deprompta, quoniam, affectarum æquationum analyſis, parùm addit, niſi, quod inter diuiſores coefficientes enumerat. His igitur diligenter conſideratis, cuique facillimum erit affectarum æquationum analyſin inſtituere ac proinde à quampluribus paradigmatibus, aliàs euulgatis abſtinebimus, contenti, methodum ad infinita tradidiſſe; quod eùm ab alijs factum non aduerterimus operæ pretium duximus hæc non prætermittere, eo vel maxime, quia noſtra methodus, cum cæteris collata adeo facilis eſt, vt hucvſque nulla facilior, vel expeditior inuenta ſit, vt conſtat cuicunque aduertenti, quod memoria iam proditum vidimus.

Hãc pragmatiam Auctor ex Theoria deduxit; quã nis olim tanquam alienã tradiderit.

Conſiderandum illud autem occurrit, nimirùm pragmatiam tàm purarum, quàm affectarum æquationum aliàs à nobis typis commiſſam tanquam Vietæam fuiſſe. Tamen vt à propria, & conſentanea Theoria deducta eſt, ita quidem eius eſt filia. Placuit autem nunc Theoremata ſynthetica afferre, vtpotè illa, quibus methodum hanc acceptam referendam eſſe cenſemus; quamobrem, & Speciosæ Logiſtices artificio elaboratam attulimus, vt inde numeroſa deducta cognoſceretur.

Declarãtur aliqua neceſſaria ad ſupradictorũ intelligentiam.

Cæterùm ex Elementis Speciosæ planè conſtant, quæ huiuſmodi Theorematibus complexi ſumus. Solùm aliqua ſupereſt (quæ ad libitum eſt) notarum ſignificatio, ne Lectoris animo difficultas ingeratur; Aduerte igitur per, a^1 ſignificari, a quadratum per, a^1 denotari, a cubum; & ita de reliquis; Nota enim numeri ſpeciei affixa, eſt dignitatis exponens. At verò hoc Symbolo z pl. ſignificamus numerum planum, ſiue eius latus exprimi, ſiue non exprimi poſſit. Cùm verò ſcribimus z^2 vel &c. numerum ſignificamus cuius latus eſt enunciabile; verùm enim verò cum ſcribimus z^2 pl. vel &c. intelligimus numerum quemcumque; ſiue eius latus ſit expreſſibile, ſiue non; ſed tunc eſſe expreſſibile, quo ſymbolo vſi ſumus ad ſignificandum comparationis homogeneum; quoniam hæc methodus vtriuſque numeri genus admittit; cùm enim numerus irrationalis fuerit, non minus eſt opportuna, licèt ſuperſit fractionis exhibitio, adiungendæ elicito lateri, vt fiat latus ipſum quamproximum vero.

Nota. Id plerunque tamen negligimus, vnde ſymbolo Z pl. vtimur ad ſignificandum numerum, ſiue eius latus quadratum, ſit expreſſibile, ſiue non. Non diſſimiliter de cæteris gradibus intelligendum eſt; vt cùm ſcribimus Z ſolid. item Z pl. pl. &c.

De

De explicatione Æquationum compoſitarum, ſiue affectarum, & primò de explicandis Æquationibus Quadraticis affectis ſub latere.

C A P V T XII.

RELiquum eſt, vt de affectis æquationibus ſermonem habeamus, dictum eſt autem ſuperiùs, quid ipſa ſit æquatio compoſita, ſeu affecta. Et quidem ad ipſas explicandas, non vna eſt methodus, ſed variæ, atque diuerſæ; plures itaque in medium afferemus, vt quiſque eam eligere poſſit, ex ipſis, quæ ſibi magis opportuna videbitur. Ducemus autem exordium ab ijs, quæ ſunt natura priores; nimirum quadraticis, progreſſuri deinceps, ad vlteriores, idque omni clarirate, ac breuitate præſtabimus. *Quid ſit æquatio compoſita, ſiue affecta, vide ſupra.*

Superiùs oſtendimus tres eſſe huius æquationis compoſitæ, ſiue affectæ ſpecies. Primam Q + R = N. Secundam Q − R = N. Tertiam R − Q = N. Plures autem modos, ac methodos ad ipſas explicandas afferemus. *Tres ſũt æquationis ſpecies.*

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem inter Q + R, & N.

Methodus Diophanti.

PRoducto ex numero quadratorum in numerum abſolutum, addatur quadratum ex dimidio numeri radicum, & ab aggregati latere, auferatur dimidium numeri radicum; reſiduum verò diuidatur per numerum quadratorum: etenim quotiens exhibebit lateris, ſeu radicis pretium. *Explicatur methodus Diophanti.*

E X E M P L V M.

5 Q + 10 R = 175.

Illuſtratur exemplis ſuperior doctrina.

```
    5  Numerus Quadratorum  }
1 7 5  Numerus abſolutus    } Multiplica.
-----
8 7 5  Productum                          }
  2 5  Quadratum dimidij numeri Radicum   } Adde
-----
9 0 0  Aggregatum.

3   0  ℞ Q Aggregati            }
    5  Dimidium numeri Radicum  } Subtrahe.
-----
2   5  Reſiduum diuidendum.
    5  Numerus quadratorum, & diuiſor.
    5  Quotiens, & vnius Radicis pretium.
```

Non diſſimili modo procedendum erit, cum irrationales numeri interceſſerint.

P *EXEM-*

EXEMPLVM.

Eadem eſt obſeruanda methodus interce dentibus numeris irrationalibus.

2 Q + 4 R = 20.

2 *Numerus Quadratorum*
20 *Numerus abſolutus* } *Multiptica.*

40 *Productum*
4 *Quadratum dimidij numeri Radicum* } *Adde.*

44 *Aggregatum.*
℞ Q 44 ℞ Q *Aggregati*
2 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*

℞ Q 44 − 2 *Reſiduum diuidendum.*
2 *Numerus quadratorum, & diuiſor.*
℞ Q 11 − 1 *Quotiens, & 1 R, pretium.*

Eademque methodus obſeruanda eſt, quomodocunque irrationales numeri occurrant.

Methodus Communis Antiquorum. Methodus explicatur.

Quadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus, ex huius aggregati latere ſubtrahatur dimidium numeri radicum, etenim reſiduum erit lateris, ſeu radicis pretium.

EXEMPLVM.

1 Q + 10 R = 96.

5 *Dimidium numeri Radicum.*

25 *Eius quadratum*
96 *Numerus abſolutus* } *Adde.*

121 *Aggregatum.*

11 ℞ Q *aggregati*
5 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*
6 *Lateris valor, ſeu vnius Radicis pretium.*

Quando occurrunt numeri irrationales.

Eodem modo, cùm occurrerint numeri irrationales,

EXEMPLVM.

1 Q + 2 R = 10.

1 *Dimidium numeri Radicum.*

1 *Eius quadratum*
10 *Numerus abſolutus* } *Adde.*

11 *Aggregatum.*
℞ Q 11 ℞ Q *Aggregati*
1 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*
℞ Q 11 − 1 *Lateris valor, ſeu 1 R pretium.*

SCHO-

SCHOLION.

EX hactenus explicatis, etiam perſpicuè liquet, quo pacto ſit eruenda radix, dum æquatio habueris pro comparationis homogeneo, aliquem numerum compoſitum, ſiue binomium, ſiue reſiduum. Sit igitur æquatio iuxta methodum Diophantæam explicanda. *Quando comparationis homogeneum fuerit numerus compoſitus, &c.*

5 Q + 4 R = 15 + ℞ Q 48.

5	*Numerus quadratorum.*	
15 + ℞ 48	*Numerus comparationis homogeneum.*	
75 + ℞ 1200	*Productum*	*Adde.*
4	*Quadratum dimidij numeri radicum*	
79 + ℞ 1200	*Aggregatum.*	
2 + ℞ 75	*℞ Q Aggregati*	*Subtrahe.*
2	*Dimidium numeri radicum.*	
℞ 75	*Reſiduum diuidendum*	
5	*Numerus quadratorum, & diuiſor.*	
℞ 3	*Quotiens, & 1 R, pretium.*	

Iuxta methodum communem antiquorum. Sit æquatio huiuſmodi.

1 Q + 30 R = 3 + ℞ 2700.

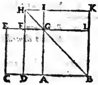
15	*Dimidium numeri Radicum.*	
225	*Eius quadratum*	*Adde.*
3 + ℞ 2700	*Comparationis homogeneum.*	
228 + ℞ 2700	*Aggregatum.*	
15 + ℞ 3	*℞ Q Aggregati.*	*Subtrahe.*
15	*Dimidium numeri Radicum.*	
℞ 3	*Lateris valor, ſeu 1 R, pretium.*	

Et ita in ſimilibus æquationibus procedendum erit; hiſce quandoquidem methodis optata conſequeris, dummodo memoria teneas illa præcepta, quæ de numeris irrationalibus traduntur. *Non diſſimili artificio in omnibus aliis æquationibus huius generis procedendum.*

DEMONSTRATIO.

HVius autem methodi demonſtratio ſic ſe habet. Sit A B, latus ignotum, & A C; radicum numerus; diuidatur A C, bifariam in D, ſuper B D, conſtituatur quadratum D B K H, ducta diametro B H, ducatur ad D H, parallela A I, ſecans B H, in G, agatur L E, per G, parallela ipſi B C, occurrens ipſi C E, in E, quæ ducta intelligatur parallela rectæ D H. Quoniam A L, F I, ſunt [a]. quadrata; continebitur rectangulum C G, ſub C A, numero radicum, & A G, radicis, ſeu lateris pretio quæſito: ità vt C G, ſit radicum pretium (Numerus enim radicum ductus in Radicis pretium, facit radicum valorem) ob id D G, erit dimidium, cum D G, D E, ſint [b]. æqualia; at verò D G, G K, ſunt [d]. æqualia; ergo erunt C G, pretio radicum æqualia complementa D G, G K, ſimul. Cùm autem A L, vna cum pretio radicum C G, quorum numerus datus eſt C A, æquale ſit euidam numero abſoluto (eſt enim æquatio inter Q + R, & N,) vt ſupponimus; erit ob id gnomon F G I, æqualis numero illi abſoluto. Si verò gnomon

Superior doctrina demonſtratur.



a Corol. 4. ſecundi.

b 36. primi.

d 43. primi

mon F G I, addatur ad quadratum F I, quod eſt quadratum ſegmenti D A, dimidij numeri radicum; ſit quadratum notum D K: à cuius latere D B, dempto D A, dimidio numeri radicum, remanet A B, notum, nempè radicis pretium.

Aliter verò ſic eiſdem poſitis, nempè C A, numero radicum, & A B, lateris pretio; diuiſaque ſit C A, biſariam in D: cum C A, ſit biſariam ſecta in D, & ei addita A B; erit .a. rectangulum C B A, vna cùm quadrato ſegmenti D A, æquale quadrato rectæ D B, ſed quadratum ipſius D B, æquale eſt .b. quadrato ſegmenti A B, vna cum duplo rectangulo D A B, hoc eſt C A, A B, radicum omnium pretio (numeris ſi quidem radicum, ductus, in pretium radicis, facit omnium radicum pretium) vna cum quadrato ſegmenti D A: ergo rectangulum C B A, vna cum quadrato ſegmenti D A, æquale erit quadratis ſegmentorum A B, D A, vna cum duplo rectangulo D A B, ſeù C A B, ſimplo. Vtrinque ablato quadrato ſegmenti D A, remanebit rectangulum C B A, æquale quadrato ſegmenti A B, vna cùm duplo rectangulo D A B, ſiuè C A B, ſimplo, nempe radicum pretio, quod erit æquale cuidam numero abſoluto, ſeu comparationis homogeneo (eſt enim æquatio Q ✠ R = N) eſt ergo illi numero abſoluto, æquale rectangulum C B A; ſed hoc vna cum quadrato ſegmenti D A, dimidij numeri noti radicum, æquale eſt c quadrato ſegmenti D B. Itaque ad quadratum ſegmenti D A, addito noto numero abſoluto, fiet notum quadratum illud, cuius nimirum latus eſt D B; ſi verò abs D B, auferatur D A, remanebit A B, radicis pretium, vt potè illud cuius quadratum, vna cum rectangulo comprehenſo ſub ſe, & numero radicum C A, æquale eſt numero abſoluto &c. Quod oſtendendum erat.

a. 6. ſecundi. *b. 4. ſecundi.* *c. 6. ſecundi.*

C D A B

SCHOLION.

Prætermittuntur alia demõſtrationes ad hanc methodũ confirmandã.

Non deſunt alia demonſtrationes hanc methodum confirmantes, verùm illas non immeritò prætermiſimus. Tum quia breuitati conſulimus; Tum quia libet eas in Specioſam Algebram differre, itaque ne bis eadem repetantur; conſultò hic eas placuit, ſilentio præterire; Aduerte autem cùm inter demonſtrandum mentionem facimus numeri abſoluti, per hunc intelligendum volumus comparationis homogeneum, vt etiam aliâs innuimus.

Methodus Petri Nonij, explicatur.

Quadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri abſoluti, & ex aggregato ſumatur latus quadratum, à quo auferatur numerus radicum; namque reſidui dimidium, vnius Radicis pretium repræſentabit.

EXEMPLVM.

1 Q ✠ 20 R = 125.

400	*Quadratum numeri Radicum.*	
500	*Quadruplum numeri abſoluti.*	
900	*Aggregatum.*	
30	*Aggregati latus*	} *Subtrahe.*
20	*Numerus radicum*	
10	*Reſiduum.*	
5	*Reſidui dimidium, & 1 R, valor.*	

Quando intercedunt numeri irrationales.

Eadem arte hoc totum expediri poterit per numeros irrationales, ſi ij quidem interceſſerint, vt ſit æquatio.

EXEMPLVM.

1 Q + 10 R = 100,

100	*Quadratum numeri radicum.*
400	*Quadruplum numeri abſoluti.*
500	*Aggregatum.*
℞ Q 500	*Aggregati latus* } *Subtrahe*
10	*Numerus radicum* } *Subtrahe*
℞ Q 500 — 10	*Reſiduum.*
℞ Q 125 — 5	*Reſidui dimidium, & 1 R, valor.*

Demonſtratio ſupradictorũ.

Sit A B, radix quæſita, & A C, radicum numerus; ipſi verò A B, ſit æqualis B D. Quoniam ergo A C, eſt radicum numerus, & A B, latus ignotum; rectangulum C A B, contentum ſub C A, radicum numero, & A B, radicis pretio, erit omnium radicum valor (vt ſupra dictum eſt), & quia quadratum ex A B, vna cum rectangulo C A B, radicum pretio, ponitur æquale numero cuidam abſoluto (eſt enim æquatio Q + R = N) ob id erit rectangulum C B A, numerus abſolutus, cum ipſi ſit æqnale quadratum ex A B, vna cum rectangulo C A B: ſed quia C B, ſecta eſt vtcunque in A, erit *, rectangulum quater comprehenſum ſub C B, B A, ſeù B D, vna cum quadrato ſegmenti C A, æquale quadrato ipſius C D. Dicebamus autem rectangulum C B A, eſſe numero abſoluto æquale: ergo quadruplum numeri abſoluti, vna cum quadrato ex C A, numero radicum, æquale erit quadrato totius C D; ſeù quod idem eſt addito quadruplo numero abſoluto, ad quadratum ex C A, numero radicum, fiet notum quadratum rectæ C D; At verò ſi ex cognita C D, auferatur C A, nota, remanebit recta A D, dupla lateris A B: ergo ſi ad quadratum numeri radicum addatur quadruplum numeri abſoluti, & ex aggregato ſumatur latus, à quo dematur numerus radicum, remanebit duplum radicis quæſitæ, Quod oportebat oſtendere.



** 8. ſecundi.*

Peculiaris Vieta methodus, explicatur.

Sumatur numerus cuius quadratum æquale ſit numero abſoluto, & hic tanquam numerus medius trium proportionalium numerorum ſtatuatur; ſeu tanquam latus medium proportionalium laterum collocetur; extremorumque differentia ſit numerus radicum. Reperiantur extremi numeri, ſeu extrema latera; minor etenim numerus, ſeù minus latus ex ipſis quæſitam radicem exhibebit.

EXEMPLVM,

Sit æquatio 1 Q + 30 R = 400,

Explicantur ſuperiora præcepta.

NVmerus abſolutus, ſeù comparationis homogeneum ſit 400; cuius ℞ Q, eſt 20, & radicum numerus ſit 30, fiat hic numerus differentia extremorum. Quoniam quadratum medij æquale eſt rectangulo ſub extremis; notum ob id erit huiuſmodi rectangulum, & numerorum extremorum differentia, & quia quadratum differentiæ laterum (vt oſtendimus in noſtrorum Problematum analyſi) additum quadruplo rectangulo ſub lateribus, æquatur quadrato aggregati laterum; proindè 400, ducantur in 4, & fient 1600, his addatur 900, quadratum 30, differentiæ laterum, fit ſumma 2500, & huic æquatur 1 Q, quadratum ſcilicet aggregati laterum, ſeù extremorum ex tribus proportionalibus, &c, ſi nimirum illud ponamus eſſe 1 R, quare ℞ Q, numeri 2500, nempè 50, erit extremorum ſumma. Habita verò ſumma, & differentia extremorum habentur extrema, vt alibi diximus; eruntq; 40, & 10: itaque lateris valor in æquatione compoſita ſuperiùs poſita, erit 10.

Huius

Huius methodi demonſtratio in ſpecioſa Algebrà differtur.

Huius autem methodi demonſtrationem in Algebra Specioſa nos afferemus: vbi etiam, quod dicebamus, nempè quadratum differenriæ laterum, vna cum quadruplo rectangulo ſub lateribus æquari quadrato ex aggregato laterum oſtendemus.

Methodus hæc cum ſequentibus nedum idonea eſt ad has æquationes explicandas, verùm etiam ad alias, quarum analyſin Antiquos ignoraſſe dicebamus.

Methodus Steuini explicatur.

Sumantur numeri quicunque ad libitum, qui quidem opportuni credantur, & in his iterum, atque iterum periculum fiat, donec quæſitus reperiatur numerus Problemati ſatis faciens, Hoc verò vt methodicè fiat, reperiatur primò numerus notarum Arithmeticarum, ex quibus conſtat latus quæſitum; mox inueſtigetur prima, quam neceſſe eſt eſſe vnam ex his 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & eadem arte inueſtigetur ſecunda, & aliæ ſi adſint pacto eodem.

EXEMPLVM I.

$$1Q + 10R = 75.$$

Exemplo ſuperior methodus illuſtratur.

PRimò examinandum eſt, num hoc latus conſtet ex pluribus notis, an ex vna tantùm. Fingo 1 R, pretium eſſe 1, ergo 10 R. valebunt 10, addito quadrato ex 1, nempè 1, fit ſumma 11, & erit æquatio inter 11, & 75, quod falſum eſt, Concludo ob id latus maius eſſe quàm 1, fingo eſſe 2, ergo 10R. valebunt 20, addito 4, quadrato ex 2, fit ſumma 24, & erit $24 = 75$, quod falſum eſt, Concludo proindè quæſitum latus maius eſſe, quàm 2, fingo eſſe 7, ergo 10 R, valebunt 70, addito 49, quadrato ex 7, fit ſumma 119, & erit $119 = 75$. Concludo ergo latus minus eſſe, quàm 7, atque demum concludo latus non conſtare expluribus notis, ſed ex vnica, & ità reperiam minus eſſe, quàm 6, neque vnquam ſatisfacere, niſi ſtatuatur numerus 5, nam 10 R, valebunt 50, addito 25, quadrato ex 5, fit ſumma 75, & eſt æquatio $75 = 75$; quod verum eſt. Eodem modo procedendum erit, ſi quæſitum latus expluribus conſtet notis; cùm enim periculum fecerimus ad indagandam priorem notam, ducendo initio ab 1; ità ad indagandam ſecundam duci debet initium ab 0.

Sit æquatio $1Q + 14R = 312$. Fingo figuram eſſe 1, ergo 14 R, valebunt 14, his additis ad 1, quadratum ex 1, fit ſumma 15, & erit æquatio $15 = 312$, quod falſum eſt. Fingo latus eſſe 9, ergo 14 R, valebunt 126, quibus additis ad 81, quadratum ex 9, fit ſumma 207, & erit $207 = 312$, quod eſt falſum. Concludo proindè latus conſtare ex pluribus notis, quàm vna; fingo ob id latus eſſe 10, fit ſumma 240, & erit æquatio $240 = 312$, quod eſt falſum propterea concludo latus maius eſſe, quàm 10, atque adeò ſecundam notam maiorem eſſe, quam 0; & ita procedendo, deinceps reperiam latus non conſtare ex pluribus, quàm ex duabus figuris, & ſecundam non eſſe maiorem quàm 2, & quæſitam radicem eſſe 12.

Methodus Coigneti euſdéq; precepta.

Exponantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & in ſingulis periculum fiat, donec reperiatur illa, quæ Problemati ſatisfacit. Cùm enim radicis pretium ſit perpetuò aliquota pars numeri abſoluti, perquirendo partes aliquotas, facilè erit quæſitam reperire.

EXEMPLVM.

Exemplum ſupradictæ methodis.

SIT æquatio $1Q + 10R = 75$. Sumantur partes aliquotæ, numeri 75, quæ ſunt, 1, 3, 5, 15, 25, 75. In his iterum, atque iterum periculum fiat, donec vna ex ipſis reperiatur Problemati ſatisfaciens, & ità comperietur 1 R, pretium, reperiemus enim 5, eſſe partem quæſitam, &c.

Sit æquatio $1Q + 10R = 375$, exponantur partes aliquotæ 1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, 375, ex ipſis reperiemus quæſtioni ſatisfacere 15, partes autem aliquotæ cuiuſcunq; numeri, facilè deprehenduntur, vt ſupra diximus.

Sumantur

Sumantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & ità ordinentur; vt binæ contra ſe poſitæ per multiplicationem, efficiant præfatum numerum abſolutum, quæ quidem partes efficientes appellantur. Mox vtraque æquationis pars diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum gradum inferiorem, cuius æquationis ſenſus erit, vt ſi numerus radicum ſubtrahatur ab aliqua ex partibus aliquotis, relinquatur 1 R, valor. *Methodus Girardi traditur*

E X E M P L V M.

Sit æquatio 1 Q = − 10 R ✠ 75. *Exemplis illuſtratur.*

1 ——— 75)
3 ——— 25 (Efficientes numeri 75.
5 ——— 15)

Partes aliquotæ numeri 75, ſunt 1, 3, 5, 15, 25, & 75.

Sunt autem ita diſpoſitæ, vt binæ contra ſe poſitæ efficiant numerum ipſum 75, vt vides, diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, & fiet æquatio huiuſmodi 1 R = − 10 ✠ $\frac{75}{1R}$ hoc eſt 10, ſi ſubtrahatur ab aliqua parte aliquota numeri abſoluti 75, relinquetur pars altera coefficiens correlata, & valor lateris; ea eſt autem eligenda pars, à qua ſi auferantur 10, fiat, & remaneat altera pars coefficiens correlata. Pars autem iſta erit 15, etenim ſi à 15, ſubtrahantur 10, remanet 5, pars altera coefficiens correlata; ſecus ſi ſubtraherentur à 25, exempli gratia; propterea quod remanerent 15, hic autem numerus non eſt pars coefficiens correlata, cum ipſa ſit 3, reſpectu 15, ipſius radicis pretium ergo erit 5.

COROLLARIVM.

Ex ſuperiùs dictis colligitur per hanc primam æquationem explicatam, nil aliud fieri, quàm inueſtigari numerum, ad cuius quadratum ſi addatur productum ex quæſito numero in datum quempiam numerum, ſumma ſit æqualis cuidam propoſito numero, vt ſi proponatur quæſtio. *Quid in hac prima æquatione compoſita fiat.*

Numerum reperire, cuius quadratum, vna cum producto ex quæſito numero in 10, æquale ſit numero 504.

Quæſitus numerus eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, cui addito 10 R, producto ex dato numero 10, in numerum ignotum; fit ſumma 1 Q † 10 R, & erit æquatio 1 Q † 10 R = 504. Cuius latus arte ſuperiùs explicata, reperies eſſe 18.

S C H O L I O N.

Non erit abs re cum Bombellio aduertere modum reuocandi æquationem inter Q ✠ R, & N, ad puram æquationem inter R, & N, fit autem hoc modo. *Modus reuocandi compoſitam æquationem hanc ad ſimplicem.*

Sumatur latus quadrati, & ei addatur dimidium numeri radicum; & huius quadratum erit æquale numero abſoluto, plus quadrato dimidij numeri Radicum,

Exempli gratia ſit æquatio 1 Q ✠ 10 R = 96, latus quadrati eſt 1 R, huic addatur 5, dimidium numeri radicum, & fit 1 R ✠ 5, cuius quadratum eſt 1 Q ✠ 10 R ✠ 25, ſed hoc eſſe debebat 1 Q ✠ 10 R; proinde addantur 25, vtrobique & ſit æquatio 1 Q ✠ 10 R ✠ 25 = 121 ergo & eorum latera æqualia erunt 1 R ✠ 5 = 11, vtrinque ablatis 5, remanebit æquatio 1 R = 6, & 6, erit 1 R valor.

Sit æquatio 1 Q ✠ 8 R = 240, latus quadrati eſt 1 R, huic addito 4, dimidio numeri radicum fit 1 R ✠ 4, cuius quadratum eſt 1 Q ✠ 8 R ✠ 16. Sed eſſe debebat 1 Q ✠ 8 R, vtrobique addantur 16, fiet 1 Q ✠ 8 R ✠ 16 = 256: ergo, & horum latere æqualia erunt ſcilicet 1 R ✠ 4 = 16, vtrinque ablatis 4, remanet 1 R = 12, & 12, eſt 1 R pretium.

Sit æquatio 1 Q ✠ 4 R = 725, latus quadrati eſt 1 R, huic addito 2, dimidio numeri radicum; fit 1 R ✠ 2, cuius quadratum eſt 1 Q ✠ 4 R ✠ 4. Sed eſſe debebat 1 Q ✠ 4 R: proinde vtrinque additis 4, fiet æquatio 1 Q ✠ 4 R ✠ 4 = 729: ergo, & latera ſunt æqualia 1 R ✠ 2 = 27, vtrinque ablatis 2, remanebit æquatio 1 R = 25, & 25, eſt 1 R pretium.

Cæterum huius æquationis reductio, ad puram fieri poteſt ſecundum artem Vietæ tractatu de emendatione æquationum Cap. 1. qua de re latè in Algebra ſpecioſa loquemur.

Va-

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem inter Q — R, & N,

Methodus Diophanti.

Diophantea methodi explicatio.

PRoducto ex numero quadratorum in numerum abſolutum, addatur quadratum dimidij numeri radicum; & ab aggregato ſumatur latus, cui ſi dimidium numeri radicum addatur, & ſumma diuidatur per numerum quadratorum: quotiens repræſentabit 1 R pretium, ſeu lateris quæſiti valorem.

E X E M P L V M.

$4Q - 16R = 660$.

4	*Numerus Quadratorum*.	*Multiplica*.
660	*Numerus abſolutus*.	
2640	*Productum*	*Adde*.
64	*Quadratum dimidij numeri Radicum*	
2704	*Aggregatum*.	
52	*Aggregati latus*	*Adde*.
8	*Dimidium numeri Radicum*	
60	*Summa*.	
4	*Diuiſor*.	
15	*Valor lateris, ſeu 1 R pretium*.	

Quando occurrunt numeri irrationales.

Et hæc præcepta intelligi poſſunt, etiam de numeris ſurdis, ſeu irrationalibus, quando nimirum occurrunt in extractione radicis. Sit æquatio.

$4Q - 12R = 600$.

4	*Numerus Quadratorum*	*Multiplica*.
600	*Numerus abſolutus*	
2400	*Productum*	*Adde*.
36	*Quadratum dimidij numeri Radicum*	
2436	*Aggregatum*.	
℞ 2436	*Aggregati latus*	*Adde*.
6	*Dimidium numeri Radicum*	
℞ 2436 ✠ 6	*Summa*.	
4	*Diuiſor*.	
℞ 152 $\frac{1}{4}$ ✠ 1 $\frac{1}{2}$	*Radicis valor*.	

Eodem modo procedendun in omnibus æquationibus, in quibus numeri irrationales occurrunt.

Methodus communis Antiquorum. Huius methodi præcepta.

Quadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus, nam ſi aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, ſumma lateris valorem exhibebit.

EXEM-

E X E M P L V M.

1 Q − 4 R = 1 6 5.

2 *Dimidium numeri Radicum.*
4 *Eius quadratum* } *Adde.*
1 6 5 *Numerus abſolutus* }

1 6 9 *Aggregatum.*

1 3 *Aggregati latus.* } *Adde.*
2 *Numeri radicum dimidium.* }

1 5 *Lateris valor, ſeu 1 R pretium.*

E X E M P L V M.

1 Q − 3 R = 150.

1 1/2 *Dimidium numeri radicum.*

2 1/4 *Eius quadratum* } *Adde.*
1 5 0 *Numerus abſolutus* }

1 5 2 1/4 *Aggregatum.*
℞ 1 5 2 1/4 *Aggregati latus* } *Adde.*
1 1/2 *Dimidium numeri Radicum* }

℞ 152 1/4 + 1 1/2 *Lateris valor, ſeu 1 R pretium.*

Nec diſſimili modo in alijs caſibus procedendum.

S C H O L I O N.

S*i verò comparationis homogeneum foret aliquod Binomium, vel reſiduum, vt ſi eſſet.*

E X E M P L V M.

4 Q − 2 4 R = 2 5 1 2 − ℞ 3 6 1 7 2 8.

4 *Numerus quadratorum.* } *Multiplica.*
2512 − ℞ 361728 *Numerus abſolutus* }

10048 − ℞ 5787648 *Productum* } *Adde.*
144 *Quadratum dimidij numeri radicum* }

10192 − ℞ 5787648 *Aggregatum.*
℞ 10048 − 12 *Aggregati latus* } *Adde.*
12 *Dimidium numeri radicum.* }

℞ 1 0 0 4 8 *Summa.*
4 *Diuiſor numerus quadratorum.*

℞ 6 2 8 *Quotiens, & 1 R, valor.*
Iuxta methodum communem antiquorum.

Q *EXEM-*

EXEMPLVM.

1 Q − 6 R ⫤ 628 − ℞ 22608,

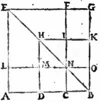
3	*Dimidium numeri Radicum,*		
9	*Eius quadratum*	}	*Adde.*
628 − ℞ 22608	*Comparationis homogeneum.*	}	
637 − ℞ 22608	*Aggregatum.*		
℞ 628 − 3	*Aggregati latus*	}	*Adde.*
3	*Dimidium numeri Radicum.*	}	
℞ 628	*Lateris valor.*		

Et ſic in omnibus caſibus conſimilibus procedendum erit.

DEMONSTRATIO.

Demonſtratio ſuperioris methodi.

Esto A B, pretium lateris quæſiti, & ſit A C, numerus radicum (erit enim minor, quàm A B, cum æquatio ſit inter Q − R, & N.) Deſcribatur ſupra A B, quadratum A B G E, ſecetur A C, in D, bifariam; agatur diameter B E, ducaturque recta D H, parallela ipſi A E, ſecans B E, in puncto H, per quod agatur H K, parallela ipſi A B, & F C, ipſi B G, ſecans B E, in N, & H K in I; deinde per punctum N, ducatur O L, parallela ipſi A B, ſecans D H, in M, erunt [a] D K, M I, C O, quadrata. Cùm autem rectangulum A F, comprehendatur ſub A E, radicis pretio, ſeu latere quæſito (ſunt enim A E, A B, latera æqualia) & A C. radicum numero, erit A F, radicum omnium pretium. Sed quia quadratum A B G E, hoc eſt, quadratum ignotum, minus radicum pretio; æquale eſt numero cuidam abſoluto (eſt enim æquatio 1 Q − R ⫤ N,) & quadratum idem A B G E, æquale eſt rectangulis A F, C G, ſeu quadratum ipſum minus rectangulo A F, radicum prætio, æquale eſt rectangulo C G, erit rectangulum C G, numero abſoluto, ſeu comparationis homogeneo æquale. Cum autem A M, D N, ſint [b] æqualia; quemadmodum ſunt [d] D N, N K, erunt etiam æqualia duo A M, N K; addatur commune D O, fiet rectangulum A O, æquale gnomoni M B I, ergo, & eidem gnomoni æqualis erit numerus abſolutus; cùm C G, numerus abſolutus, & A O, cui æquatur gnomon M B I, ſint æqualia (nam A N, N G, ſunt æqualia, quare addito, communi C O, erunt æqualia A O, C G,) ſi verò gnomon, ſeu numerus abſolutus, addatur M I, quadrato dimidij numeri radicum, nempe ſegmenti D C, notum erit quadratum D K; atque adeo latus eius D B, huic verò addito A D, dimidio numeri radicum, fit notum A B, latus quæſitum, ſeu radicis valor; Rectè ergo regula iubet, quadrato dimidij numeri radicum, vt addatur, numerus abſolutus, &c,



a Corol. prop. 4. lib. 2.

b 36. primi.

d 43. eiuſdē.

Demonſtratio alia eiuſdem methodi.

Aliter iiſdem poſitis. Quoniam A C, eſt numerus radicum, & A B, radix quæſita, erit rectangulum B A C, æſtimatio omnium radicum (vt ſæpè dictum eſt) at verò quadratum totius A B, minùs rectangulo B A C, omnium radicum pretio, æquale ponitur cuidam numero abſoluto (eſt enim æquatio 1 Q − R ⫤ N,) ergo rectangulum A B C, erit æquale numero abſoluto, ſiquidem quadratum, ex A B, minus rectangulo B A C, æquale eſt rectangulo A B C: ſed quia A C, ſecta eſt bifariam in D, & in directum ei addita C B, rectangulum A B C, vna cum quadrato D C, dimidij numeri radicum æquale erit [a] quadrato ex D B; itaut rectangulo A B C, nempe numero abſoluto addito ad quadratum dimidij numeri radicum fiat notum quadratum ex



a 6. ſecundi.

D B,

D B; at huic ſi addatur A D, dimidium numeri radicum, fit nota A B, radix quæſita: ergo ſi ad quadratum dimidij numeri radicum; addatur numerus abſolutus, fit quadratum ad cuius latus addito dimidio numeri radicum, habetur radicis pretium. Quod oportebat oſtendere.

Quadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri abſoluti, & aggregati lateri addatur numerus radicum; ſummæ enim dimidium quæſiti lateris valorem repræſentabit. *Methodus Petri Nonij & eius præcepta.*

EXEMPLVM.

$1 Q - 4 R = 165.$

1 6	*Quadratum numeri Radicum.*	} *Adde.*
6 6 0	*Quadruplum numeri abſoluti.*	
6 7 6	*Aggregatum.*	
2 6	*Aggregati latus*	} *Adde.*
4	*Radicum numerus*	
3 0	*Summa.*	
1 5	*Dimidium ſummæ, & lateris valor.*	

Et eadem præcepta applicari poſſunt numeris irrationalibus.

Eſto A B, latus ignotum, & A C, radicum numerus; atque A B, intelligatur producta vſque ad E, ita tamen, vt B D, ſit æqualis ipſi C B, & D E, ipſi A C, quoniam A B, ſecta eſt vtcunque in C; erit [a] quadratum ex A B, deſcriptum æquale rectangulis B A C, A B C, ſeu quadratum idem, minus rectangulo B A C, æquale erit rectangulo A B C, ſed rectangulum B A C, quod comprehenditur ſub A B, radicis pretio, & A C, radicum numero, eſt radicum omnium pretium (numerus enim radicum ductus in radicis pretium facit omnium radicum valorem) & quia quadratum ex A B, minus rectangulo B A C, radicum pretio ponitur æquale cuidam numero abſoluto noto, cum ſit $Q - R = N$: ergo rectangulum A B C, erit numero abſoluto æquale; ſi quidem quadratum ipſius A B, minus rectangulo B A C, æquale eſt rectangulo A B C; cum autem adiecta ſit B D, æqualis ipſi C B, erit [b] quadratum ex A D, deſcriptum æquale quadruplo rectangulo A B C, vna cum quadrato ſegmenti A C, numeri radicum; itaut ad quadratum ipſius A C, numeri radicum, addito quadruplo numeri abſoluti, nempe rectanguli A B C, fiat quadratum notum, cuius latus eſt A D; at huic ſi addatur ſegmentum D E; quod fecimus æquale noto ſegmento A C, nempe numero radicum, fiet nota tota recta A E, cuius dimidium eſt A B, latus quæſitum. Rectè igitur regula iubet, vt ad quadratum numeri radicum addatur numeri abſoluti quadruplum, &c. Quod oportebat oſtendere, &c.

A C B D E

Superioris methodi demonſtratio.

[a] *2. ſecundi*

[b] *8. ſecundi.*

Sumatur numerus, cuius quadratum æquale ſit numero abſoluto, & ille ſtatuatur medium latus ex tribus proportionalibus; extremorum differentia ſit radicum numerus, his poſitis reperiantur extrema latera, maius enim ex ipſis, radicis quæſitæ pretium repræſentabit. *Peculiaris methodus Vietæ & eius præcepta.*

Sit æquatio vt ſupra,

$$1Q - 4R = 165.$$

Exemplo declaratur præcepta tradita. Latus quadratum numeri 165, eſt ℞ 165, & hoc ſit medium ex tribus proportionalibus lateribus, & extremorum differentia ſit 4, numerus radicum. Quoniam autem extrema latera, ſunt quemadmodum latera rectanguli, & medij quadratum eſt ipſum rectangulum ſub lateribus debemus, dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum reperire latera; ſed quadratum differentiæ laterum additum quadruplo rectangulo ſub lateribus æquale eſt quadrato aggregati laterum; vt oſtendimus in noſtrorum Problematum reſolutionibus; proinde ſit laterum aggregatum 1 R; ergo erit æquatio 1 Q = 676: ergo 1 R = 26, erit ergo laterum aggregatum 26, data autem differentia, & aggregato laterum, reperiuntur latera, facili negotio, vt ibidem oſtendimus. Nempe ad dimidium aggregati, addatur dimidium differentiæ, & erit radicis quæſitæ valor 15, vt ſupra.

Demonſtratio in ſpecioſâ Algebram differtur. Quoniam methodus hæc repetenda eſt in Algebra ſpecioſa; proinde eo recurrendum eſt, vt eius demonſtratio habeatur.

Methodus Stevini traditur. Sumantur numeri quicunque qui quidem opportuni credantur; & in his iterum, atque iterum periculum fiat, donec quæſitus numerus reperiatur.

EXEMPLVM.

$$1Q - 4R = 165.$$

Exemplo declaratur ſuperior doctrina. Fingo numerum quæſitum eſſe exempli gratia 10, ergo 4 R, valebunt 40, & 1 Q, valebit 100, ablatis 40, à 100, remanebit numerus 60; & erit æquatio 60 = 165, quod eſt falſum, vt patet, & ita concluſum cùm ſit, latus maius eſſe, quàm 10, in reliquis maioribus numeris procedendum eſt, donec numerus quæſitus occurrat, nempe 15.

Declaratur methodus Coigneti. Reperiantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & in his iterum atque iterum periculum fiat, donec occurrat pars quæſita Problemati ſatisfaciens.

EXEMPLVM.

$$1Q - 4R = 165.$$

Partes aliquotæ ſunt 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165, procedatur autem vt ſupra, &c.

Girardi methodus explicatur. Sumantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & ſic ipſæ ordinentur, ac diſponantur, vt binæ contra ſe poſitæ per multiplicationem efficiant numerum ipſum abſolutum; poſtea diuidatur vtraque pars æquationis per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum, cuius æquationis ſenſus erit. Si numerus radicum addatur vni ex partibus aliquotis numeri abſoluti, conſtituetur valor radicis quæſitæ. Ea verò pars eligi debet aliquota, cui ſi addatur radicum numerus; fiat altera coefficiens correlata.

EXEM-

EXEMPLVM.

1 Q = 4 R + 165

Hæc æquatio ad hanc reuocabitur 1 R = 4 + $\frac{165}{1R}$ ſi nimirum omnia diuidantur per 1 R, ex partibus aliquotis autem eligatur illa, cui additis 4, fiat altera coefficiens correlata, & reperietur eam eſſe 11, nam additis 4, fit ſumma 15, nempe altera pars coefficiens correllata; proinde 15, dicebamus eſſe 1 R, pretium. *Exemplũ ad ſuperiorẽ methodum illuſtrandam.*

1	—	165
3	—	55
5	—	33
11	—	15

COROLLARIVM.

Ex hactenus explicatis, colligitur per hanc æquationem nil aliud quæri, quàm numerum, à cuius quadrato, ſi ſubtrahatur productum ex numero quæſito in datum aliquem numerum, remaneat alter, ſtatutus itidem numerus: vt ſi proponatur:

Numerum reperire, à cuius quadrato, ſi auferatur numerus, qui producitur ex multiplicatione 8, in quæſitum numerum, remaneat numerus 425.

Quæſitus numerus eſto 1 R, cuius quadratum erit 1 Q, à quo detractis 8 R, fit reſiduum 1 Q — 8 R, & erit æquatio 1 Q — 8 R = 425.

SCHOLION.

Prætereundum non eſt, quod aduertit Bombellus; nimirum hanc æquationem inter Q — R, & N, ad ſimplicem æquationem reduci poſſe inter R, & N, hoc modo. Sumatur radix ipſius quadrati, nempe 1 R, & ex hoc auferatur dimidium numeri radicum, & in noſtro exemplo erit dimidium 4, & fiet reſiduum 1 R — 4; huius reſidui quadratum eſt 1 Q — 8 R + 16. Sed eſſe debebat ſumma 1 Q — 8 R; proinde, vtrobique additis 16, fit 1 Q — 8 R + 16 = 441: ergo eorum latera æqualia erunt. nempe 1 Q — 4 = 21. Vtrinque additis 4, fit æquatio 1 R = 25, & erit Radicis quæſita valor numerus 25, vt priùs. *Æquationis compoſita iam explicata ad ſimplicem reuocatio.*

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem inter R — Q, & N.

Methodus Diophanti.

A Quadrato dimidij numeri radicum ſubtrahatur productum ex numero quadratorum in numerum abſolutum, & à reſiduo ſumatur radix: hæc enim ſi addatur dimidio numeri radicum, vel ab eodem ſubtrahatur, atq; ſumma, vel reſiduum diuidatur per numerum quadratorum; quotiens radicis quæſitæ pretium exhibebit. *Diophãtea methodi explicatio.*

EXEMPLVM.

56 R — 4 Q = 192.

784	*Quadratum dimidij numeri Radicum.*	} *Subtrahe.*
768	*Productum ex numero quadratorum in numerum abſolutum.*	
16	*Reſiduum:*	
4	*Reſidui latus*	} *Adde.*
28	*Dimidium numeri radicum*	
32	*Summa diuidenda.*	
4	*Diuiſor.*	
8	*Quotiens, & valor lateris; nimirum lateris maioris.*	
28	*Dimidium numeri Radicum*	} *Subtrahe.*
4	*Latus reſidui*	
24	*Reſiduum diuidendum,*	
4	*Diuiſor.*	
6	*Quotiens, & lateris valor, nempe lateris minoris.*	

Hæc

Hæc æquatio duplicem habet radicem.

Hæc autem æquatio duplicem radicem habet, vt vidimus. Verùm quandoque vtraque quæſtionem ſoluit; aliquando altera tantùm. Cæterum ſecundum hanc Diophanti methodum, quando numerus productus ex numero quadratorum in numerum abſolutum, æqualis fuerit quadrato dimidij numeri radicum, vnicum eſt latus videlicet, dimidium numeri radicum, &c. Si numerus autem abſolutus fuerit maior quadrato dimidij numeri radicum, Problema, nonniſi ſophiſticè ſoluitur; non enim debet eſſe maior numerus abſolutus quadrato dimidij numeri radicum. Non diſſimili modo procedendum erit, cum interceſſerint numeri irrationales in æquationis analyſi.

EXEMPLVM.

56 R — 4 Q = 164.

784	*Quadratum dimidij numeri radicum*	} *Subtrahe.*
656	*Productum ex numero quadratorum in numerum abſolutum*	
128	*Reſiduum.*	
℞ 128	*Reſidui latus*	} *Adde.*
28	*Dimidium numeri radicum*	
℞ 128 + 28	*Summa.*	
4	*Diuiſor.*	
℞ 8 + 7	*Valor lateris, nimirum maioris.*	
28	*Dimidium numeri Radicum*	} *Subtrahe.*
℞ 128	*Latus reſidui.*	
28 — ℞ 128	*Reſiduum.*	
4	*Diuiſor.*	
7 — ℞ 8	*Lateris valor, nempe minoris.*	

Methodus communis, Antiquorum declaratur.

A Quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus abſolutus: etenim ſi radix quadrata reſidui addatur dimidio numeri radicum; vel ex hoc dimidio ſubtrahatur radix eadem; duplex ſe offerre latus comperiemus.

EXEMPLVM PRIMVM.

14 R — 1 Q = 48.

Exemplum ad ſuperiorem doctrinam explicandam.

7	*Dimidium numeri radicum.*	
49	*Eius quadratum*	} *Subtrahe.*
48	*Numerus abſolutus*	
1	*Reſiduum.*	
1	*Latus reſidui*	} *Adde.*
7	*Dimidium numeri Radicum*	
8	*Latus vnum, nempe latus maius.*	
7	*Dimidium numeri radicum*	} *Subtrahe.*
1	*Latus reſidui*	
6	*Latus alterum, nempè latus minus.*	

EXEM-

EXEMPLVM SECVNDVM.

20 *R* — 1 *Q* ⊏ 96.

1 0 *Dimidium numeri radicum.*

---

1 0 0 *Quadratum dimidij numeri Radicum*
9 6 *Numerus abſolutus* } *Subtrahe.*

---

4 *Reſiduum.*
2 *Latus reſidui*
1 0 *Dimidium numeri radicum* } *Adde.*

---

1 2 *Latus vnum, nempe latus maius.*

---

1 0 *Dimidij numeri radicum*
2 *Latus reſidui* } *Subtrahe.*

---

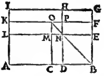
8 *Latus alterum, nempe latus minus.*

Animaduertendum verò, quando numerus abſolutus, fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, tunc vnicum fore latus; nempe dimidium ipſum numeri radicum.

Nota.

Radicum numerus eſto A B, quæ ſecetur [a] bifariam in C, & non bifariam in D: ſuper partem maiorem A D, deſcribatur [b] quadratum A D H I; perficiaturque rectangulum A G: poſtea ſupra B C, radicum numeri dimidio, deſcribatur [b] quadratum B C O F; cuius ducta diameter B O, ſecet D H, in N, puncto; per quod agatur [c] L E, linea parallela ipſi A B, ſecans C O, in M; & producta F O, ſecet A I, in K, & D H, in P: erunt [d] D E, M P, quadrata; rectangulum verò A O, æquale erit [e] quadrato C F: ſiue quæſitum quadratum, quod datur, ſit A H, ſiuè D E ſiuè C F. Oſtendam perpetuò, veram eſſe æquationem, nempe radices, minus quadrato æquari numero abſoluto, &c. Datum ſit quadratum quod quæritur A H; ergo rectangulum A G, comprehenſum ſub A I, latare quadrati, & numero radicum A B, omnium radicum valor, ſiue pretium erit. Dictum eſt enim ſupra ex ductu lateris, ſeu radicis in radicum numerum, fieri omnium radicum pretium. Cum autem pretium radicum A G, minus quadrato nempe A H, æquale ſit numero abſoluto (eſt enim æquatio R — Q ⊏ N,) erit proinde D G, rectangulum æquale numero abſoluto; ſunt autem duo rectangula A N, D G, æqualia, cum ſub æqualibus lateribus contineantur; rectangulum autem A N, æquale eſt gnomoni M B P, (ſiquidem complementa C N, N F, ſunt æqualia; commune ſi addatur D E, erit C E, ipſi D F, æquale: ſed C E, A M, ſunt [f] æqualia; ob id D F, erit æquale ipſi A M; commune addatur C N, fiet A N, æquale gnomoni P B M:) ergo D G, nempe numerus abſolutus, erit æqualis gnomoni P B M: at ſi ex C F, quadrato dimidij numeri radicum auferatur gnomon P B M; remanebit notum quadratum M P; cuius latus eſt M N, ſeu C D: addito autem C D, ipſi A C, dimidio numeri radicum fit notum A D, latus quadrati A H, quæſiti. Si itaque ex quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus abſolutus, & reſidui latus quadratum, addatur dimidio numeri radicum; fit notum latus quæſitum, quod oportebat oſtendere.

a 10. primi. b 46. primi. b 46. primi. c 31. primi. d coroll. 4. ſecundi. e 36. primi. Primus caſus. f 36 primi.



Secundò Datum ſit quadratum D E; ijſdem poſitis, &c. erit rectangulum A E, contentum ſub numero radicum A B, & latere quadrati B E, omnium radicum æſtima-

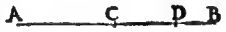
Secundus caſus.

Digitized by Google

æſtimatio; cùm autem radicum valor A E, minus quadrato D E, æquale ſit cuidam numero abſoluto (eſt enim æquatio $R - Q = N$,) & rectangulum A E, minus quadrato D E, æquale ſit rectangulo A N; erit ergo A N, rectangulum numero abſoluto æquale; ſed rectangulum A N, eſt æquale gnomoni P B M, vt ſupra oſtendimus; proinde numerus abſolurus, erit ipſi gnomoni P B M, æqualis, hoc autem ablato ex C F, quadrato dimidij numeri radicum, remanet notum M P, quadratum, cuius latus eſt C D, quo ſublato, ex C B, dimidio numeri radicum; remanebit notum D B, latus quadrati quæſiti, quod erat oſtendendum.

Tertius caſus. Tertio ſit datum quadratum C F, ergo rectangulum A F, contentum ſub numero radicum A B, & latere B F, erit radicum omnium æſtimatio; cùm autem radicum valor, nempe A F, minus quadrato, nempe C F, æquale ſit cuidam numero abſoluto (eſt enim æquatio $R - Q = N$,) & rectangulum A F, minus quadrato C F, æquale ſit rectangulo A O; erit ob id A O, æquale namero abſoluto, ablato autem A O, ex C F, quadrato dimidij numeri radicum, nihil remanet; ſiquidem A O, C F, rectangula ſunt æqualia; proinde nihil erit addendum dimidio numeri radicum; neque ſubtrahendum, vt habeatur latus quæſitum: ſed ipſum dimidium numeri radicum erit latus quæſitum, &c. Quod oportebat oſtendere.

Aliter breuiùs. Sit radicum numerus, vt priùs A B, cuius dimidium A C, vel C B; latus quæſitum A D; erit ergo rectangulum B A D, æquale pretio omnium radicum; cum numerus radicum ductus in radicis pretium, producat omnium radicum valorem; & quia rectangulum B A D, radicum valor minus quadrato A D, æquale eſt numero abſoluto (eſt .n. æquatio $R - Q = N$,) & rectangulum B A D, minus quadrato A D, æquale eſt rectangulo A D B; proinde rectangulum A D B, erit numero abſoluto æquale.



25. ſecundi. Sed quadratum, ex C B, dimidio numeri radicum æquale eſt a. rectangulo B D A, vna cum quadrato ex C D; ſi ſubtrahatur ergo à quadrato ex C B, dimidio numeri radicum, rectangulum A D B; ſcilicet numerus abſolutus remanebit notum quadratum, cuius latus eſt C D; quo addito ad dimidium A C, numeri radicum, fit notum latus queſitum A D; & non diſſimili modo procedetur in demonſtrando, quando latus fuerit D B, vel demum C B, &c.

COROLLARIVM.

Quid ex hactenus explicatis colligendum ſit. EX demonſtratis colligitur in præſenti æquatione; ſi radix numeri, qui relinquitur ex numeri abſoluti ſubtractione à quadrato dimidij numeri radicum, addatur dimidio numero radicum, reperietur maior radix propoſitæ æquationi faciens ſatis.

Si verò eodem ex dimidio numeri radicum ſubtrahatur, emerget radix minor.

Demum patet ſi numerus abſolutus fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, dimidium ipſum, quæſitam exhibere radicem, &c.

Explicatur methodus Petri Nonij. A quadrato numeri radicum, ſubtrahatur quadruplum numeri abſoluti, & ex reſiduo ſumatur latus; quod quidem ſi addatur numero radicum, vel ab eodem ſubtrahatur, aggregati, vel reſidui dimidium, lateris valorem dabit.

EXEMPLVM.

$$14 R - 1 Q = 48.$$

196 *Quadratum numeri radicum.* } *Subtrahe*
192 *Quadruplum numeri abſoluti.* }

4 *Reſiduum.*
2 *Latus reſidui* } *Adde.*
14 *Numerus radicum* }

16 *Summa.*
8 *Dimidium ſummæ, & latus maius.*

14 *Numerus radicum* } *Subtrahe.*
2 *Latus reſidui* }

12 *Reſiduum.*
6 *Dimidium reſidui, & latus minus.*

Cæ-

Cæterum quando numeri abſoluti quadruplum, fuerit æquale quadrato dimidij numeri radicum, vnicum erit latus, nempe ipſum dimidium numeri radicum.

Quando quadruplum numeri abſoluti æquale fuerit quadrato dimidij numeri rad. cum unicum eſt latus. Methodus ſuperior, ſignata demonſtratur.

Radicum numerus eſto A D, & quæſitum quadrati latus ſit A B; ſitque primò maius dimidio numeri radicum; ergo rectangulum D A B, contentum ſub numero radicum, & latere quæſito, erit radicum omnium pretium, ob rationem ſæpè allatam; Cùm autem ſit æquatio R — Q = N. Si à rectangulo D A B, radicum pretio, auferatur quadratum ex A B, reſiduum erit numerus abſolutus; nimirum rectangulum A B D, ſeu A B C: ſed quadratum ex A D, æquale eſt [a] quadruplo rectangulo A B C, vna cum quadrato ex A C; proinde & quadruplo numero abſoluto, vna cum quadrato ex A C: itaque ſi à noto quadrato ex A D, auferatur quadruplum rectanguli A B C; hoc eſt quadruplum numeri abſoluti, remanebit quadratum notum, cuius latus eſt A C: huic, autem, vel illi æquali D E, ſi addatur A D, numerus radicum, fiet nota tota A E, quæ dupla eſt ipſius A B, lateris quæſiti.



a 8. ſecundi.

Si verò quadrati latus B D, dimidio numeri radicum minus erit; Tunc rectangulum contentum ſub A D, D B, radicum erit omnium pretium. Si verò ex A D B, rectangulo dematur quadratum B D, remanebit rectangulum A B D, æquale numero abſoluto (eſt enim æquatio R — Q = N). At verò quadratum ipſius A D, eſt æquale quadruplo rectangulo A B C, ſeu A B D, vna cum quadrato A C; quarè ſi a quadrato noto ipſius A D, auferatur notum quadruplum rectangulum A B D, hoc eſt, quadruplum numeri abſoluti, remanebit notum quadratum, cuius latus eſt A C: hoc autem ſi dematur ex A D, numero radicum, remanet C D, quæ dupla eſt lateris B D, &c. Quod oportebat oſtendere.

Secundus caſus.

Demum ſi quadruplum numeri abſoluti fuerit æquale quadrato numeri radicum; oſtendemus dimidium numeri radicum æquale eſſe lateri quæſito. Itaquæ dico ſi quadruplum numeri abſoluti, æquale fuerit quadrato numeri radicum, dimidium numeri radicum fore latus quadrati quæſiti.

Tertius caſus.



Sit A C, latus quadrati, & A B, dupla ipſius A C, ſit numerus radicum; rectangulum A B C, comprehenſum ſub numero radicum, & radicis pretio, erit omnium radicum valor, ob rationem ſæpè dictam: & quoniam eſt æquatio inter R — Q, & N; erit proinde rectangulum A B C, minus quadrato ex A C, ſeu C B, æquale numero abſoluto; ſed rectangulum A B C, minus quadrato ex A C, vel C B, eſt alterutrum quadratorum ex A C, & C B; cùm A C, C B, ſint æquales: ergo alterutrum de quadratis ex A C, C B, erit æquale numero abſoluto; & quia quadratum rectæ A B, quadruplum eſt quadrati A C, vel C B; ob id quadratum ex A B, erit quadruplum numeri abſoluti; Subtracto autem quadrato ex A B, nempe quadruplo numeri abſoluti, à quadrato A B; quadrato .ſ. numeri radicum, remanebit nihil: hoc autem addito ad A B, numerum radicum, vel ſubtracto ab eodem; nota remanet recta A B, radicum numerus, & eſt dupla lateris A C, quæſiti. Quòd oportebat &c. Rectè igitur regula iubet, &c.

Demonſtratio quòd numeri abſoluti quadruplo æquale fuerit quadrato numeri radicum dimidium numeri radicum fore latus.

Sumatur numerus, cuius quadratum æquale ſit numero abſoluto, & numerus hic intelligatur medius inter extremos; & numerus radicum ſit exremorum ſumma: ex medio autem, & extremorum ſumma, quærantur numeri extremi, & ita reperietur valor, vtriuſq; radicis quæſitæ, &c.

Peculiaris methodus Vieta.

E X E M P L V M.

Sit æquatio 14 R — 1 Q = 48.

Hoc nihil eſt aliud, quàm dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato laterum, reperire latera, rectangulum autem erit 48; ſiquidem ℞ 48, eſt latus medium ex tribus proportionalibus, &c. Summa laterum erit 14; cùm autem quadratum aggregati

Quid ſit hæc æquatio, explicatur ſuperior doctrina.

R gregati

gregati laterum, minus quadruplo rectangulo ſub lateribus, æquale ſit quadrato differentiæ laterum; vt in noſtrorum Problematum analyſi oſtendimus. Proinde differentia laterum eſto 1 R, cuius quadratum 1 Q, erit æquale quadrato ſummæ laterum, nimirum 196; minus tamen quadruplo rectangulo, hoc eſt minus quadruplo numeri 48. Itaque 1 Q ⩵ 4, ergo 1 R ⩵ 2. Proinde differentia laterum erit 2, qua habita, & etiam laterum ſumma cognita, habentur latera; & ita reperiemus latera eſſe 8, & 6, & vtrumque quæſtioni ſatisfacere De his autem latius in Specioſa Logiſt. loquemur tractantes de æquationum conſtitutione.

Huius methodi demonſtrationem, vide in Algebra Specioſa.

Huius methodi demonſtrationem in ſpecioſam Logiſticen differimus, &c.

Sumantur numeri quicunque ad libitum, qui quidem opportuni eredantur, & in his iterùm, atque iterum periculum fiat, donec occurrat numerus quæſitus, &c.

EXEMPLVM.

14 R — 1 Q ⩵ 48.

Procedatur non diſſimili modo, ac ſuperiùs dictum fuit; perieulo nimirum facto in varijs numeris, qui idonei eredantur, & reperiemus latera eſſe 8, & 6.

Coigneti methodus declaratur.

Sumantur partes aliquotæ numeri abſoluti, propoſitæ æquationis; & in his iterum, ac iterum perieulum fiat, donee reperiatur numerus Problemati ſatisfaciens.

EXEMPLVM.

14 R — 1 Q ⩵ 48.

Partes aliquotæ numeri 48, ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; facto verò periculo in ijs, reperiemus, vt ſupra 8, & 6, quæſtioni ſatisfacientes.

Methodus Girardi.

Exponantur partes aliquotæ numeri abſoluti, tali ordine, vt binæ contra ſe poſitæ per multiplicationem efficiant numerum abſolutum; poſteà verò vtraque æquationis pars diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum; deinde pars ea aliquota eſt eligenda, quæ ſi auferatur à numero radicum, remaneat altera pars coefficiens correlata.

EXEMPLVM.

1 Q ⩵ 14 R — 48.

1	—	48
2	—	24
3	—	16
4	—	12
6	—	8

Diuiſa vtraque æquationis parte per 1 R, fiet 1 R ⩵ 14 — $\frac{48}{1R}$ hoc eſt, ſi ſubtrahatur à 14, aliqua pars aliquota ipſius numeri 48, remanebit pars altera eoefficiens eorrelata. Si auferatur 4, remanet 10; non eſt autem hie numerus, altera pars coefficiens correlata; ſi quidem ei reſpondet numerus 12; & ita de alijs; demum ablata parte 6, remanet 8, coefficiens eorrelata, & erit latus maius. Deinde auferatur abs 14, numerus 8, & remanet 6, eoefficiens correlata: dieemus itaq; 6, eſſe partem minorem.

COROL-

COROLLARIVM.

COnſtat ex dictis per hanc æquationum nihil aliud inquiri, quám numerum, qui ſi ducatur in numerum datum, & á producto ſubtrahatur quadratum numeri quæſiti, remaneat numerus alter datus; Vt ſi proponeretur. *Quid colligendum ex dictis,*

Numerum reperire, qui ſi ducatur in 20, productũ numerum, à quo ſi dematur, quadratum numeri quæſiti, remaneat numerus 75. *Problema.*

Quæſitus numerus ſit 1 R, quæ ſi ducatur in 20, facit numerum 20 R, à quo ſi ſubtrahatur 1 Q, nimirum Q, vnius radicis, fit reſiduum 20 R — 1 Q, & erit æquatio 20 R — 1 Q ⊐ 75. *Eiuſdem enodatio.*

SCHOLION.

HIC etiam aduertere nos opera pretium duximus artem reuocandi huiuſmodi æquationem, ad æquationem ſimplicem inter R, & N; fitq; hoc pacto. Sit æquatio vt ſupra; ſed hoc modo 1 Q ✢ 75 ⊐ 20 R. Auferantur 20 R, vtrinque; & erit æquatio 1 Q — 20 R ✢ 75 ⊐ 0. Sumatur — 10, dimidium numeri radicum, & huic addito latere quadrati; nempe 1 R, fit ſumma 1 R — 10, cuius quadratum eſt 1 Q — 20 R ✢ 100, ſed eſſe debebat 1 Q — 20 R ✢ 75. Proinde vtrinque oportet addere 25, & erit æquatio 1 Q — 20 R ✢ 100 ⊐ 25, ergo, & eorum latera æqualia erunt 1 R — 10 ⊐ 5. Vtrobique addatis 10, fit æquatio 1 R ⊐ 15, &c. *Nõnulla aduertenda.*

De huiuſmodi autem reductionibus in quibus precipuè conſiſtunt huius Artis Arcana, cumulatè nobis, in Specioſa præſtabitur tractandi locus, vbi quantum fieri poterit implicatiores æquationes ad ſimpliciores reuocare tentabimus, vt explicabiles demum ipſę reddantur, cum alioquin omnem ἀκρίβειαν. effugiant; neque fieri poteſt, vt quæ in æquationibus ipſis, quæſita Radix latitat intercedente numerorum aſymmetria, quantacumque ſit ea, quæ adhibeatur induſtria, prodeant vnquam in lucem. Solùm igitur hæc obiter adnotaſſe ſit ſatis, quæ nimirum à maioribus, tradita eſſe aduertimus, memoriaque prodita vidimus.

Digitized by Google

De explicandis Æquationibus cæteris, in quibus terminorum exponentes ſeruant Arithmeticam proportionem.

CAPVT XIII.

Quando in æquationibus, terminorum exponẽtes, nõ ſeruat Arithmeticam proportionẽ, qua arte procedẽdum ſit declaratur.

QVANDO exponentes ſeruant Arithmeticam proportionem præter eas, quas diximus, adſunt aliæ æquationes, quæ Antiqua via poſſunt explicari; vt Q Q ✣ Q ⊐ N. Inſuper C C ✣ C ⊐ N. Ex dictis autem facilè colligi poteſt, quid agendum in huiuſmodi æquationum explicationibus; Radix enim eius generis eſt eruenda, quæ ab altiori dignitate ſignificatur; vt ſi foret æquatio, Q Q ✣ Q ⊐ N; eruenda eſſet radix, vt loquuntur Zenſizenſica, ſeu Quadratoquadratica, &c. à maiori namq; poteſtate Radix appellationem mutuatur, obſeruatis præceptis ſuperiùs traditis.

EXEMPLVM.

1 QQ ✣ 8 Q ⊐ 8 2 5.

4 *Dimidium numeri Quadratorum.*

1 6 *Eius quadratum* } *Adde.*
8 2 5 *Numerus abſolutus*

8 4 1 *Aggregatum.*
2 9 *Aggregati latus* } *Subtrahe.*
4 *Dimidium numeri quadratorum*

2 5 *Reſiduum.*
5 *Reſidui latus.*

Propoſita ſit æquatio vt ſupra. Dimidium numeri quadratorum eſt 4, cuius quadratum eſt 16; additum numero 825, facit 841, cuius latus quadratum eſt 29; a quo ſubtracto 4, dimidio numeri quadratorum, remanet numerus 25, cuius latus quadratum eſt 5, & eſt 1 R, pretium.

Hæc æquatio nõ indiget particulari explicatione.

Hæc autem æquatio, vt patet, non indiget particulari explicatione; nam ſi 1 Q Q ✣ 8 Q ⊐ 825: ergo 1 Q ✣ 8 R ⊐ 825, & 1 R, intelligetur quadratm lateris de quo primùm quærebatur. Et in hiſce æquationibus explicandis obſeruanda ſunt præcepta ſuperiùs tradita, ad enodandas æquationes quadrati affecti adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. Item affecti multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. Demum plani ſub latere, & data coefficiente longitudine affecti multa quadrati.

Non erit tamen abs re, ſi quædam exempla ad id, de quo agimus, attinentia nos afferamus in medium; Hinc enim plurimùm eluceſſet harum æquationum explicandarum ratio; Exempla verò ſunt; quorum primum pertinet ad quadrato-quadratum affectum multa plano-plani ſub latere, datoq; cœfficiente ſolido Secundum ad plano-planum ſub quadrato, datoq; cœfficiente plano, affectum multa quadratoquadrati Tertium, ad cubo-cubum affectum adiunctione ſolido-ſolidi, ſub cubo, datoq; cœfficiente ſolido,

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLVM.

$$1\,\mathcal{Q}\mathcal{Q} - 8\,R \sqsupset 425.$$

4 *Dimidium numeri quadratorum.*

16 *Eius quadratum*
425 *Numerus abſolutus* } *Adde.*

441 *Aggregatum.*
21 *Aggregati latus*
4 *Dimidium numeri quadratorum* } *Adde.*

25 *Aggregatum.*
5 *Aggregati latus.*

EXEMPLVM SECVNDVM.

$$30\,\mathcal{Q} - 1\,\mathcal{Q}\mathcal{Q} \sqsupset 125.$$

15 *Dimidium numeri Quadratorum.*

225 *Eiuſdem dimidij Quadratum.*
125 *Numerus abſolutus* } *Subtrahe.*

100 *Reſiduum.*

10 *Reſidui latus*
15 *Dimidium numeri quadratorum* } *Adde.*

25 *Aggregatum.*
5 *Aggregati latus quadratum, & latus eius quæſitum.*

15 *Dimidium numeri quadratorum*
10 *Reſidui latus* } *Subtrahe.*

℞ 5 *Differentia latus quadratum, & latus minus quæſitum.*

Et hæ quidem æquationes explicari poſſent per omnes alios modos, quos ſuperiùs attulimus.

Sit æquatio 1 C C + 8 C ⊐ 945, hac eadem arte poterit enodari; vt in æquatione inter Q + R, & N.

EXEM-

EXEMPLVM.

1 CC ✠ 8 C = 945.

4	*Dimidium numeri cuborum.*	
16	*Eius quadratum*	} *Adde.*
945	*Numerus abſolutus*	
961	*Aggregatum.*	
31	*Aggregati latus*	} *Subtrahe.*
4	*Dimidium numeri Cuborum.*	
27	*Reſiduum*	
3	*Reſidui latus cubicum.*	

Operationis examen. Dimidium numeri cuborum eſt 4, cuius quadratum 16, additum numero 945, facit 961; cuius latus quadratum eſt 31, à quo dempto 4, dimidio numeri cuborum, remanet 27, cuius latus cubicum eſt 3; Dicemus itaq; latus cubo-cubicum quæſitum eſſe 3, & ita ſuo modo de reliquis, &c.

MONITVM.

Non eſt autem cur hîc vlteriùs immoremur, ſiquidem commemoratæ æquationes facilè poſſunt ex dictis explicari.

Illud tamen ad maiorem intelligentiam ſupradictorum, ac dicendorum ſubijciam, nimirum, nihil intereſſe, quo ordine literæ, ſiue ſpecies ſcribantur, tam in additione, quàm in multiplicatione. Perinde enim eſt ſcribere a † b ac ſcribere b † a; vt enim priori modo ſignificamus b, additam eſſe ad a, ita intelligere debemus ijsdem literis, eo modo ordinatis, ſignificari a additam eſſe ad b nihil enim refert quòd litera præponatur b, vel a. Idem intellige cum poſteriori modo ſcribimus, nempe b † a. Ratio autem ea eſt, quia huiuſmodi ſymbolo ſignificare intendimus additionem, quæ cùm mutua neceſſariò ſit, propterea hoc ipſo quod b, additur ad a, etiam a, additur ad b; ſi igitur a † b; ſignificat b addi ad a, etiam ſignificabit a addi ad b.

Non diſſimiliter cùm ducimus a, in b, & ſcribimus a b, redditur etiam ſenſus quòd b, ducta ſit in a; vnde nihil refert vtro modo ſcribatur, ſcilicet, vel a b, vel b a, vt enim ſcribendo a b, intendimus ſignificare a ductam eſſe in b, ita eodem ſymbolo retento, ſignificamus b, ductam eſſe in a, atq; adeo, vtroq; modo poteſt enunciari, dicendo a ductam eſſe in b, vel b, eſſe ductam in a. Item cum ſcribimus a e^2 ſi a, dicatur latus primum, e verò ſecundum, ſignificabimus idem, quod denotamus ſcribendo e^2 a; atq; adeo, vt a e^2 explicamus dicendo latus primum ductum in quadratum lateris ſecundi, ita etiam enunciare poſſumus quadratum lateris ſecundi ductum eſſe in latus primum; atque adeo etiam ſcribendo e^2 a, non magis ſignificamus quadratum ſecundi ductum eſſe in latus primum, quàm primum eſſe ductum in quadratum ſecundi. Ob rationem ſuperiùs allatam. Quamobrem ſi qui ſunt, qui in ipſo literarum, ſpecierumue ordine miſteryum faciant ad additionem, & multiplicationem quod attinet, ij profectò deſipiunt, & mea ſententia greuiter peccant in Arte; De his tamen in Speciosa diſſeremus.

Theo-

Theoremata præmittenda ad numeroſam affectarum æquationum Analyſin.

C A P V T XIV.

PVris, atque ſimplicibus æquationibus explicatis, compoſitas, & affectas aggreſſi, primò tractandas aſſumpſimus illas, in quibus terminorum exponentes, ſunt Arithmeticè proportionales, ſiuè eundem ſeruant exceſſum. Aliæ igitur ſuperſunt, alteriùs generis, & quidem longè difficiliores, quæ proinde maiorem φιλοπονίαν, requirunt.

Sequitur agendū de æquationibus difficilioribus.

E veteribus autem plerique cùm in hoc puluere ſedulò verſarentur; argumenti præſtantia, ac dignitate, ad Veritatis indagationem accenſi, omnes ingenij neruos in nobile, præclarumque opus intenderunt. Poſteritas tamen aduertit, rectè ab illo pronunciatum fuiſſe, multa dum adhuc in mentibus Auctorum tenerentur, magnas ſui expectationes concitaſſe; ſed perfecta tandem, & alijs oſtenſa longè tenuiorem, quàm pro concepta ſpe gloriam conſecuta eſſe. Regulas enim haud generales denique tradiderunt, peculiaribus quibuſdam præceptionibus contenti. Sunt nihilominus, ampliſſimis exornandi laudibus, cùm ad rem eximiam animum appulerint.

E recentioribus quidem Vieta, non mediocri diligentia tractandum idem argumentum aſſumens, viſus eſt omne tuliſſe punctum. Multorum tamen iudicio, in eius lucubrationibus, & maior doctrinæ claritas, & plerunque demonſtrationes, ac denique ipſius Artis τελείωσις. Deſiderantur.

Vie a hoc argumentum accuratè tractauit ſed multa prætermiſit.

Supereſſe videtur igitur, ad artis abſolutionem, generalis doctrina, & vniuerſalis methodus, demonſtrationibus firmata, de quibus partim hìc, partim in Specioſa nobis eſt ſuſcipienda tractatio.

Multa ſuperſunt ad perfectionem Analytices.

Duo autem ad hæc præſertim conducunt, quæ Deo fauente laboribus noſtris conſecuti iam ſumus. Primum eſt; accurata cubici binomij conſideratio, in qua non parum defeciſſe cognouimus omnes, qui de re Analytica monumenta reliquerunt, cùm aduerteremus ipſorum nemini benè perſpectam huiuſmodi binomij naturam fuiſſe. Secundum eſt refutatio erroris, in quem, è recentioribus nõnullis incidiſſe notauimus; ſiquidē ex commemorato binomio cubicam radicem extrahere conantes, haud ſatis rem pro dignitate tractarunt. Sed falſa veris potius admiſcendo maximum Arti dedecus inurere viſi ſunt. Quòd ſi ad hæc etiam acceſſerit elegans, ac induſtrioſa quæda Analyſtæ ratio, qua gradu elatiores æquationes ad depreſſiores reuocantur; nemini puto futurum in contr060uerſia poſitum, quin huius diſciplinæ præcepta tractanti præclariora liceat adire.

Cæterum hinc Matheſi plurimum ſplendoris affulſit, cum illi dedecori eſſet, in numera Problemata extra eius eſſe ditionem. Quo hæc alioquin præſtantiſſima pars, haud abſoluta numeris videbatur. Nunc autem plurimum aucta, ad ſacratiora ſe perueniſſe gloriatur.

Hinc multum ſplendoris affulſit Matheſi.

Noſtrum igitur erit, quamplurima ab alijs, prætermiſſa ſupplere; præſertim in Specioſa, in qua curam omnem adhibuimus, vt Geometricum Problema quodcunque huius Artis opitulatione reſolui poſſet, quod à nemine factum aduertimus. In Numeroſa verò, quam hic præ manibus babemus, omnes conatus noſtri, eò ſpectant, vt nullum Problema ſit oblatum, cui ab huius Artis præceptis inſtructus obuiam ire ſatisfacturus non poſſit.

Auctoris munus.

Et quoniam ad horum conſecutionem, quibuſdam propoſitionibus nidigemus, ſine quibus omnis labor irritus foret; propterea quædam præmittemus: ſunt autem, quæ ſequuntur.

SE-

SECTIO I.

AD Æquationem, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine.

LEMMA I.

QVadratum à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectum adiunctione plani, ſub ipſo ſingularium laterum aggregato, & coefficiente longitudine, æquale eſt quadrato lateris primi, plus plano à duplo latere primo, in ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi, plus plano à coefficiente in latus primum, plus plano ab eadem coefficiente in latus ſecundum.

$$\begin{array}{rrrrr} & & a + e + b & & \\ & & a + e & & \\ \hline & & ae + e^2 + be & & \\ a^2 + & & ae + ba & & \\ \hline a^2 + 2ae + e^2 + ba + be & & & & \end{array}$$

Latus ſingulare primum ſit .a. ſingulare ſecundum ſit .e. coefficiens longitudo ſit b, qua addita ad binomium latus, fit aggregatum, ex cuius ductu in idem latus binomium, fit id, vnde veritas innoteſcit.

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine; latus autem binomium ſit; atque adeo conſtet, è duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens longitudo ſit b comparationis homogeneum ſit Z pl. ſingulare latus primum ſit .a. ſecundum verò .e. ita vt vniuerſum ſit $a + e$ huius quadratum eſt $a^2 +$ Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate. $2ae + e^2$. Planum afficiens eſt $ba + be$, quo addito ad $a^2 + 2ae + e^2$ fit $a^2 + 2ae + e^2 + ba + be$ quod eſt æquale Z pl. & per Antitheſin, vtrinque ſublatis a^2, & ba remanebit $2ae + be + e^2 =$ Z pl. $- a^2 - ba$.

Si itaque Quadratum ſingularis lateris primi, ſubtrahatur ex comparationis homogeneo, & inde etiam ſubducatur planum ſub coefficiente, & latere primo; quod remanet æquale eſt $2ae + e^2 + be$; hoc eſt plano ſub duplo latere primo, & latere ſecundo, plus quadrato lateris ſecundi, plus plano ſub coefficiente, & eodem latere ſecundo.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud, ad $2a + b$ hoc eſt ad aggregatum, ex duplo latere primo, & coefficiente.

PORISMA.

ITaque ad extrahendam Radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto latere ſingulari primo, & eius quadrato ſubtracto, à comparationis homogeneo; ex reſiduo autem, ſubducto afficiente plano ſub latere primo, & coefficiente longitudine. Quod remanet applicandum eſt, ad duplum latus primum, plus coefficiente longitudine. Ex huiuſmodi enim, quę tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, prouenit ſingulare latus ſecundum; itaut hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem planorum, in quæ reſiduum illud reſolui debet,

Ad Æquationem, in qua Quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine.

LEMMA II.

Qvadratum à binomio latere, ſeu à duobus ſingularibus lateribus affectum multa plani ſub aggregato ſingularium laterum, & coefficiente longitudine; æquale eſt quadrato lateris primi plus plano, ſub duplo latere primo, & ſecundo, plus quadrato lateris ſecundi, minus plano, à latere primo in coefficientem longitudinem, minus plano, à latere ſecundo in eandem coefficientem longitudinem.

$$
\begin{array}{rl}
 & a + e - b \\
 & \quad\; a + e \\
\hline
 & ae + e^2 - be \\
a^2 + & ae - ba \\
\hline
a^2 + & 2ae + e^2 - ba - be
\end{array}
$$

Latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e; vt eorum aggregatum ſit $a + e$ ſitque coefficiens longitudo b, negata de aggregato laterum, reſiduum autem ductum in ſingularium laterum aggregatum producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II.

SI fuerit æquatio, in qua Quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, latus ſit autem binomium; atq; adeo conſtet ex duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens longitudo ſit b comparationis homogeneum ſit Z pl. ſingulare latus primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$. Planum verò, cuius multa quadratum afficitur eſt $ba + be$, quo ſubtracto ex quadrato iam dicto, remanet $a^2 + 2ae + e^2 - ba - be$ æquale Z pl. & per antitheſin, vtrinque ſcilicet addito ba, fiet $a^2 + 2ae + e^2 - be = Z\,pl. + ba$. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Vtrinque ſubtracto a^2 fiet $2ae + e^2 - be = Z\,pl. + ba - a^2$. Itaut hæc duo ſint proſthaphæritica plana,

Si igitur ad comparationis homogeneum additum ſit planum ſub coefficiente, & ſingulari latere primo, ex aggregato verò, ſubtractum ſit quadratum eiuſdem lateris ſingularis primi, Quod ſupereſt æquale eſt $2ae + e^2 - be$. Hoc eſt plano ſub duplo latere primo, & ſecundo, plus quadrato ſecundi, minus plano ſub coefficiente, & eodem latere ſecundo,

Hoc autem eſt applicaſſe, reſiduum illud ad $2a - b$. Hoc eſt ad differentiam inter duplum latus primum, & coefficientem longitudinem. Hinc.

PORISMA.

ITaque ad eruendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto latere ſingulari primo, plano verò ſub ipſo, & ſub coefficiente, ad comparationis homogeneum addito, ex aggregato autem ſubtracto quadrato eiuſdem lateris ſingularis primi; quod remanet, eſt applicandum ad differentiam inter duplum latus primum, & coefficientem longitudinem. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum; itaut hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem planorum in quæ reſiduum illud reſolui debet.

Digitized by Google

Ad Æquationem, in qua planum ſub latere, dataq; coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

LEMMA III.

Planum ſub coefficiente longitudine, & binomio quidem latere, ſeu aggregato duorum laterum ſingularium, affectum multa quadrati, ab aggregato eorundem laterum; æquale eſt plano a latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano a latere ſecundo in eandem coefficientem longitudinem, minus quadrato lateris primi, minus plano à duplo latere primo in ſecundum, minus quadrato lateris ſecundi.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & b & - a & - e & \\ & & & & a & + e & \\ \hline & & & be & - ae & - e^2 & \\ & ba & - a^2 & - ae & & & \\ \hline & ba + be & - a^2 & - 2ae & - e^2 & & \end{array}$$

Latus ſingulare primum ſit a, ſingulare ſecundum ſit e, ita vt vniuerſum ſit $a + e$ coefficiens longitudo ſit b, de qua negetur $a + e$ laterum aggregatum, in hoc ductum reſiduum illud, producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcet.

THEOREMA III.

SI fuerit æquatio, in qua quadratum negatur de plano ſub latere, dataque coefficiente longitudine. Latus autem ipſum ſit binomium, atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit Z pl. Latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$. Planum autem ſub latere, & coefficiente longitudine eſt $ba + be$, ex quo ſubtracto quadrato iam dicto, fiet $ba + be - a^2 - 2ae - e^2 = Z$ pl., per antitheſin vtrinque addito a^2 fiet $ba + be - 2ae - e^2 = Z$ pl. $+ a^2$ & rurſus $ba + be = Z$ pl. $+ a^2 + 2ae + e^2$; & deinde $2ae + e^2 - be = ba - a^2 - Z$ pl. Vel $be - 2ae - e^2 = Z$ pl. $+ a^2 - ba$.

Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.

Quia tamen contingit plerumq; vt $2ae + e^2$ maius ſit quàm bc, & $ba - a^2$ maius ſit quam Z pl. aliquando verò, contra. Vt vniuerſalia vniuerſaliter tractentur, præſtat adhibere differentię ſymbolum $\sim$; Ne ſubtractionis ἀμφιβολία diuiſioni officiat; vnde fiet $2ae + e^2 \sim be = ba \sim a^2 - Z$ pl. Cuius eſt ſenſus, vt ſi ba, fuerit maius quam a^2 & Z pl. ſimul, ſubtrahantur hæc ab illo, ſin autem contra Ita ſi $2ae + e^2$, fuerit maius, quàm bc hoc ſubtrahatur ab illo; ſin autem, contra: In hoc autem plerique decepti ſunt.

Si igitur ſumatur differentia inter planum à latere primo in coefficientem longitudinem, & homogeneum comparationis auctum quadrato lateris primi, differentiæ æqualis erit differentiæ inter planum à coefficiente in latus ſecundum, & planum ſub duplo latere primo, & ſecundo auctum quadrato ſecundi.

Hoc autem eſt reſiduum illud applicaſſe ad $2a \sim b$, hoc eſt ad differentiam inter coefficientem, & duplum latus primum. Hinc.

PORISMA.

ITaque ad exhibendam Radicem propoſitæ æquationis affectæ. Ad comparationis homogeneum addatur quadratum ſingularis lateris primi, differentia verò inter hoc aggregatum, & planum à latere primo in coefficientem, applicetur ad differentiam inter duplum latus primum, & coefficientem longitudinem. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum, ita vt hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem planorum, in quæ reſidum illud reſolui debet.

Cùm

Cùm Q eſt *ακέφαλος* ; eodem modo ſe res habet ſolùm illud intereſt, quòd nulla tunc *αμφιβολία* quantum ad diuiſionem occurrit. Homogeneum ſit Z pl. latus ſingulare primũ ſit a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$: planum autem ſub latere, & coefficiente erit $ba + be$, à quo ſubtracto quadrato iam dicto, remanet $ba + be - a^2 - 2ae - e^2 = Z$ pl. & per antitheſin vtrinque addito a^2 fiet $ba + be - 2ae - e^2 = Z$ pl. $+ a^2$, & rurſus $ba + be = Z$ pl. $+ a^2 + 2ae + e^2$ & rurſus $2ae + e^2 - be = ba - a^2 - Z$ pl.

SECTIO II.

AD Æquationem. in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

LEMMA I.

CVbus à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus affectus adiunctione ſolidi ſub coefficiente plano, & aggregato laterum, æqualis eſt cubo lateris primi, plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus ſolido, à triplo latere primo, in ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, plus ſolido à coefficiente plano in latus primum, plus ſolido ab eodem coefficiente plano in latus ſecundum.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ae + e^2 + b \text{ pl.} \\ a + e \\ \hline a^2e + 2ae^2 + e^3 + b \text{ pl. } e \\ a^3 + 2a^2e + ae^2 + b \text{ pl. } a \\ \hline a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + b \text{ pl. } a + b \text{ pl. } e \end{array}$$

Si latus ſingulare primum fuerit a, ſecudum verò e, itaut binomia radix ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, cui ſi intelligatur additum b pl. fiet aggregatum quod ductum in binomiam Radicem prædictam, producet id vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio in qua eſt cubus affectus adiunctione ſolidi ſub latere datoq; cœfficiente plano. Latus autem binomium ſit, atque adeo conſtet ex duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit z ſol. ſingulare autem latus primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$. At verò ſolidum afficiens erit b pl. $a +$ b pl. e horum aggregatum eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 +$ b pl. $a +$ b pl. e, quod æquabitur z ſol. vtrinque ſubtractis a^3 & b pl. a, ramanebit $3a^2e + 3ae^2 + e^3 +$ b pl. e, quod æquabitur z ſol. $- a^3 -$ b pl. a. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur ex comparationis homogeneo ſubtrahatur cubus lateris ſingularis primi; itemque Solidum ſub coefficiente plano, & eodem latere primo; quod ſupereſt. æquale eſt $3a^2e + 3ae^2 + e^3 +$ b pl. e, hoc eſt ſolido à triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, vna cum cubo lateris ſecundi, plus ſolido à coefficiente plano, in latus ſecundum.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $3a^2 + 3a +$ b pl. hoc eſt ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, plus coefficiente plano.

PORISMA.

Itaque ad extrahendam Radicem propoſitæ æquationis affectæ, repetto latere ſingulari primo, eiuſque cubo ſubtracto, à comparationis homogeneo; ex reſiduo autem ſubducto ſolido facto à coefficiente plano in latus primm; Quod ſupereſt eſt applicandum ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo plus coefficiente plano. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit, applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum, ita vt hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem ſolidorum, in quæ reſiduum illud eſt reſoluendum.

AD Æquationem, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano.

LEMMA II.

Cubus à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectus, multa ſolidi ſub plano coefficiente, & aggregato laterum, æqualis eſt cubo lateris primi, plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus ſolido à triplo latere primo, in lateris ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, minus ſolido à coefficiente plano in latus primum, minus ſolido à coefficiente plano in latus ſecundum.

$$\begin{array}{r} a^2c + 2\,a\,c + e^2 - b\ pl. \\ a + e \\ \hline a^2e + 2\,a\,e^2 + c^3 - b\ pl.\ c \\ a^3 + 2\,a^2e + a\,e^2 - \qquad b\ pl.\ a \\ \hline a^3 + 3\,a^2e + 3\,a\,e^2 + e^3 - b\ pl.\ a - b\ pl.\ e \end{array}$$

Si latus ſingulare primum fuerit a, ſecundum verò e, atque adeo binomia Radix ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, à quo ſi intelligatur demptum b pl. fiet reſiduum, quod ductum in binomiam Radicem producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II.

SI fuerit æquatio, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere datoque coefficiente plano, Latus autem binomiam ſit, atque adeò ex duobus ſiugularibus lateribus conſtet.

Coefficiens planum ſit b pl. comparationis autem homogeneum ſit z ſol. ſingulare latus primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + c$, cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate. Solidum autem de cubo negatum eſt b pl. $a +$ b pl. e, quo ſubducto ex cubo remanet $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 -$ b pl. $a -$ b pl. e. Hoc autem æqnabitur z ſol. & per antitheſin fiet $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 -$ b pl. e $=$ z ſol. $+$ b pl. a; & rurſus fiet $3a^2e + 3ae^2 + e^3 -$ b pl. e $=$ z ſol. $+$ b pl. a $- a^3$.

Si igitur ad comparationis homogeneum addatur ſolidum ſub coefficiente plano, & latere ſingulari primo, ex aggregato autem auferatur cubus lateris eiuſdem ſingularis primi, quod ſupereſt, æquale eſt $3a^2c + 3ae^2 + c^3 -$ b pl. e, hoc eſt ſolido

ſub

ſub triplo quadrato lateris primi, in ſecundum plus ſolido, ſub triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo eiuſdem ſecundi, minus ſolido ſub cœfficiente plano, & eodem ſecundo latere.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $3\,a^2 + 3\,a - b$ pl. hoc eſt ad differentiam inter planum cœfficiens, & triplum quadratum lateris primi, auctum eodem triplo latere primo.

PORISMA.

ITaque ad extrahendam radicem propoſitæ æquationis affectæ. Ad comparationis homogeneum, addatur ſolidum, ſub coefficiente plano, & latere primo; Ex aggregato auferatur cubus ſingularis lateris primi. Reſiduum verò applicandum eſt ad differentiam inter coefficiens planum, & triplum quadratum lateris primi, auctum eodem triplo latere primo; ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit, applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum; ita vt hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem ſolidorum, in quæ reſiduum illud reſolui debet.

Ad æquationem in qua ſolidum ſub latere, datoq; coefficiente plano, afficitur multa Cubi.

LEMMA III.

SOlidum ſub cœfficiente plano, & binomio latere ſiue aggregato duorum laterum, ſi multetur cubo ab eodem laterum aggregato, æquale eſt ſolido a cœfficiente plano in latus primum, plus ſolido à cœfficiente plano in latus ſecundum, minus cubo lateris primi, minus ſolido à triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, minus ſolido à triplo latere primo in ſecundi quadratum, minus cubo lateris ſecundi.

$$\begin{array}{r} b\text{ pl.} - a^2 - 2\,a\,e - e^2 \\ a + e \\ \hline b\text{ pl.}\,e - a^2 e - 2\,a\,e^2 - e^3 \\ b\text{ pl.}\,a - a^3 - 2\,a^2 e - a\,e^2 \qquad\quad \\ \hline b\text{ pl.}\,a + b\text{ pl.}\,e - a^3 - 3\,a^2 e - 3\,a\,e^2 - e^3 \end{array}$$

Si latus ſingulare primum fuerit a, ſecundum verò e, ita vt binomia Radix ſit a + e, cuius quadratum eſt $a^2 + 2\,a\,e + e^2$, quod ſi intelligatur ſubtractum ex cœfficiente b pl. fit reſiduum, quod ductum in binomiam Radicem producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA III.

SI fuerit æquatio in qua Solidum ſub latere, datoque cœfficiente plano, afficitur multa cubi. Latus autem binomium ſit; atque adeo ex duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Cœfficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit Z ſol. Singulare latus primum ſit a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus eſt $a^3 + 3\,a^2 e + 3\,a\,e^2 + e^3$ Solidum autem de quo negatur cubus eſt b pl. a + b pl. e, ex quo Subtracto cubo remanet b pl. a + b pl. $e - a^3 - 3\,a^2 e - 3\,a\,e^2 - e^3$; quod æquabitur Z ſol. & per antitheſin vtrinque addito a cubo, fiet b pl. a + b pl. $e - 3\,a^2 e - 3\,a\,e^2 - e^3 =$ Z ſol. $+ a^3$; & rurſus per antitheſin b pl. $e - 3\,a^2 e - 3\,a\,e^2 - e^3 =$ Z ſol. $+ a^3 -$ b pl. a. Vel $3\,a^2 e + 3\,a\,e^2 + e^3 -$ b pl. e = b pl. a − Z ſol. $- a^3$. *Ex eo quod traditum eſt Lemm. ante.*

Ideo

Ideo propter hanc ἀμφιβολίαν adhibendum ſymbolum $\sim$; vt fiat $b\ pl.\ e \sim 3a^2 e - 3ae^2 - e^3 = z\ ſol. + a^3 \sim b\ pl.\ a$, cuius ſenſus patet.

Si igitur ad comparationis homogeneum addatur cubus ſingularis lateris primi, ſumaturque differentia inter hoc aggregatum, & ſolidum, a cœfficiente plano in latus ſingulare primum, hæc erit æqualis $b\ pl.\ e \sim 3a^2 e - 3ae^2 - e^3$; hoc eſt differentiæ inter ſolidum a cœfficiente plano, in latus ſecundum, & ſolidum a triplo quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus, ſolido a triplo latere primo in quadratum ſecundi, vna cum cubo eiuſdem lateris ſecundi.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad differentiam inter cœfficiens planum & triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo Hinc.

PORISMA.

Itaque ad extrahendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto ſingulari latere primo ſummatur differentia inter ſolidum a cœfficiente plano in latus primum, & comparationis homogeneum, auctum cubo eiuſdem lateris primi; & hæc applicetur ad differentiam inter planum cœfficiciens, & triplum quadratum lateris primi; plus triplo latere primo; ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum, itaut hæc duo ſint latera, quæ faciant ad conſtitutionem ſolidorum in quæ reſiduum illud reſolui debet.

Quando cubus eſt ἀκέφαλος non diſſimili modo ſe res habet, illud ſolùm intereſt; quòd hìc nulla eſt ἀμφιβολία quantum ad diuiſionem.

Si fuerit æquatio huiuſmodi, cœfficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit Z pl. ſingulare latus primum ſit a ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2 e + 3ae^2 + e^3$. Solidum autem, de quo negatur cubus erit $b\ pl.\ a + b\ pl.\ e$, a quo ſubtracto cubo, remanebit $b\ pl.\ a, + b\ pl.\ e - a^3 - 3a^2 e - 3ae^2 - e^3$, quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet $b\ pl.\ a + b\ pl.\ e - 3a^2 e - 3ae^2 - e^3 = z\ ſol. + a^3$; & rurſus per antitheſin $b\ pl.\ e - 3a^2 e - 3ae^2 - e^3 = z\ ſol. + a^3 - b\ pl.\ a$, & rurſus fiet æquatio $3a^2 e + 3ae^2 + e^3 - b\ pl.\ e = b\ pl.\ a - z\ ſol. - a^3$.

SECTIO III.

AD æquationem in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataq; cœfficiente longitudine.

LEMMA I.

Cubus à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectus adiunctione ſolidi ſub cœfficiente longitudine, & aggregati laterum quadrato, æqualis eſt cubo lateris primi; plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in ſecundum, plus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo lateris ſecundi, plus ſolido à cœfficiente in quadratum primi, plus ſolido à duplo latere primo, in planum ſub latere primo, & latere ſecundo, plus ſolido à cœfficiente, in quadratum ſecundi,

Si

$$
\begin{array}{r}
a^2 + 2ae + e^2 \\
a + e + b \\
\hline
b\,a^2 + 2bae + be^2 \\
a^2e + 2ae^2 + e^3 \quad\quad\quad \\
a^3 + 2a^2e + ae^2 \quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + ba^2 + 2bae + be^2.
\end{array}
$$

Si fuerit a ſingulare latus primum, e verò ſecundum; itaut binomia radix ſit $a + e$; cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$; hoc ductum in $a + e + b$; facit productum, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio, in quà cubus eſt affectus adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato dataq; cœfficiente longitudine, latus autem binomium ſit, atq; adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Cœfficiens longitudo ſit b. comparationis homogeneum ſit z ſol. latus autem ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$ cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, ſolidum autem ſub cœfficiente longitudine, & binomiæ radicis quadrato, eſt $ba^2 + 2bae + be^2$, quo addito ad cubum prædictum, fiet ex eo, quod præmiſſum ex Lemmate $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + ba^2 + 2bae + be^2$; quod æquabitur z ſol. vtrinq; ſubtractis a^3, $b\,a^2$ remanebit $2bae + be^2 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 =$ z ſol. $- a^3 - ba^2$.

Si igitur ex comparationis homogeneo ſubtrahatur cubus lateris primi, vna cum ſolido à cœfficiente longitudine in quadratum lateris primi, quod remanet, æquale eſt $2bae + be^2 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$. Hoc eſt ſolido à* duplo latere primo in cœfficientem longitudinem, plus ſolido à cœfficiente in quadratum lateris ſecundi, plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in ſecundum, plus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo ſecundi. * ſimplo ſecundo, &

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud, ad $2ba + b + 3a^2 + 3a$. Hoc eſt ad aggregatum iſtud, ſcilicet ad planum ſub duplo latere primo, & cœfficiente, plus cœfficiente, plus triplo quadrato lateris primi, plus triplo latere primo.

PORISMA.

ITaque ad exhibendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto primo latere. Ex comparationis homogeneo ſubtrahatur cubus ipſius lateris primi, vna cum ſolido à coefficiente, in quadratum lateris primi, reſiduum verò eſt applicandum ad planum à duplo latere primo in coefficientem, plus coefficiente, plus triplo quadrato lateris primi, plus triplo latere primo; ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum. Itaut &c.

Ad Æquationem, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataq; coefficiente longitudine.

LEMMA II.

CVbus à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectus multa ſolidi à coefficiente longitudine, in quadratum binomiæ radicis, æqualis eſt cubo lateris primi, plus ſolido à triplo quadrato lateris primi in ſecundum, plus ſolido à latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo lateris ſecundi, minus ſolido à quadrato lateris primi, in coefficientem longitudinem, minus ſolido à coefficiente in duplum planum à lateribus, minus ſolido à coefficiente in quadratum ſecundi.

Latus

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ae + e^2 \\ a + e - b \\ \hline - ba^2 - 2bae - be^2 \\ a^2e + 2ae^2 + e^3 \\ a^3 + 2a^2e + ae^2 \\ \hline a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 - ba^2 - 2bae - be^2 \end{array}$$

Latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$. Cuius quadratum ductum in idem latus vniuerſum, multatum coefficiente b producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II.

SI fuerit æquatio, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub coefficiente longitudine & lateris quadrato, latus autem binomium ſit; atque adeo ex duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens longitudo ſit b; comparationis homogeneum ſit z ſol. ſingulare latus primum ſit a ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus ſit $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$; ſolidum ſub coefficiente longitudine, & lateris quadrato erit $ba^2 + 2bae + be^2$ quo ſubtracto ex cubo iam dicto, fit ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 - ba^2 - 2bae - be^2$. Quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin vtrinque addito ba^2, & ſubtracto a^3 fiet $3a^2e + 3ae^2 + e^3 - 2bae - be^2 = z\ \text{ſol.} + ba^2 - a^3$

Si igitur ad ſolidum comparationis homogeneum addatur ſolidum à coefficiente longitudine in quadratum lateris primi, & ex aggregato ſubducatur cubus lateris primi, reſiduum erit æquale $3a^2e + 3ae^2 + e^3 - 2bae - be^2$.

Hoc eſt ſolido ſub triplo quadrato lateris primi & ſecundo, plus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, plus cubo lateris ſecundi, minus ſolido à coefficiente longitudine in duplum planum à lateribus, minus ſolido à coefficiente longitudine in quadratum ſecundi.

Hoc autem eſt reſiduum illud applicaſſe, ad $3a^2 + 3a - 2ba - b$. Hoc eſt ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, minus plano à duplo latere primo in coefficientem longitudinem, minus ipſa coefficiente. Hinc.

PORISMA.

ITaque ad exhibendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto latere primo, ſub ipſius quadrato, & coefficiente, ſolidum, addatur, ad comparationis homogeneum. ex aggregato autem ſubtracto cubo ipſius lateris primi, quod ſupereſt, eſt applicandum ad aggregatum illud; ſcilicet ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, minus duplo plano ſub coefficiente, & latere primo, minus ipſa coefficiente. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, prouenit ſingulare latus ſecundum.

Ad Æquationem, in qua ſolidum ſub lateris quadrato & coefficiente longitudine, afficitur multa cubi.

Soli-

LEMMA III.

Solidum ſub coefficiente longitudine & quadrato binomij, lateris ſeu aggregati duorum laterum, multatum cubo, ab eodem aggregato ſingularium laterum, æquale eſt ſolido ſub coefficiente longitudine & quadrato lateris primi, plus ſolido à coefficiente in duplum planum ſub lateribus, plus ſolido à coefficiente in quadratum lateris ſecundi, minus cubo lateris primi, minus ſolido à triplo quadrato lateris primi in ſecundum, minus ſolido à triplo latere primo in quadratum ſecundi, minus cubo ſecundi.

$$a^2 + 2ae + e^2$$
$$b - a - e$$

$$- a^2e - 2ae^2 - e^3$$
$$- a^3 - 2a^2e - ae^2$$
$$ba^2 + 2bae + be^2$$

$$ba^2 + 2bae + be^2 - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$$

Si igitur fuerit a, ſingulare latus primum e, verò ſecundum, itaut binomia radix ſit $a + e$, quæ ſubtracta ſit ex coefficiente b, reſiduum ductum in Quadratum eiuſdem binomiæ Radicis producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA III.

SI fuerit æquatio in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi; latus autem ſit binomium, atque adeò e duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit z ſol. Singulare latus primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$. Solidum autem de quo negatur cubus eſt $ba^2 + 2bae + be^2$, ex quo, ſubtracto cubo iam dicto, remanet $ba^2 + 2bae + be^2 - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$, quod æquabitur z ſol. Et per antitheſin vtrinque addito a^3, & ſubtracto ba^2 fiet $2bae + be^2 \sim 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = z$ ſol. $+ a^3 \sim ba^2$. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur differentia inter ſolidum à coefficiente in quadratum lateris primi, & comparationis homogeneum auctum cubo lateris primi, ſumatur, hæc erit æqualis $2bae + be^2 \sim 3a^2e - 3ae^2 - e^3$, hoc eſt differentiæ inter aggregatum ex ſol. à triplo quadrato lateris primi in ſecundum; plus ſol. à triplo latere primo, in quadratum ſecundi; plus cubo lateris ſecundi, & ſolidum ſub coefficiente, & duplo plano à lateribus, auctum ſolido à coefficiente longitudine in quadratum ſecundi.

Hoc autem eſt reſiduum illud applicaſſe ad differentiam inter aggregatum ex triplo quadrato lateris primi, vna cum triplo latere primo, & planum à duplo latere primo in coefficientem longitudinem, plus ipſa coefficiente. Hinc.

PORISMA.

Itaque ad inueniendam radicem propoſitæ æquationis affectæ, ſumpta differentia inter ſolidum à coefficiente in quadratum lateris primi, & comparationis homogeneum auctum cubo lateris primi, applicanda eſt ad differentiam inter triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, & planum à duplo latere primo in coefficientem, plus ipſa coefficiente. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur, ſingulare latus ſecundum.

T Quan-

Digitized by Google

Quando cubus eſt ἀκέφαλος. Illud intereſt, quod locum nullum admittit vitio iam dicto, atque adeo Analyſtæ patet ſtatim, quid agendum, cùm nihil illi officiat, τῆς ὑπεξαιρέσεως ἀμφιβολία.

SECTIO IV.

AD Æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoq; coefficiente ſolido.

LEMMA I.

QVadrato-quadratum, à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectum adiunctione plano-plani, ſub coefficiente ſolido, & aggregato laterum, æquale eſt quadrato-quadrato lateris primi, plus quadruplo cubo lateris primi, in latus ſecundum, plus ſextuplo quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus QQ, lateris ſecundi, plus pl. plano à ſolido coefficiente in latus primum, plus plano plano à ſolido coefficiente, in latus ſecundum.

$$a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3 \dagger b\ ſol.$$
$$a \dagger e$$

$$a^3e \dagger 3a^2e^2 \dagger 3ae^3 \dagger e^4 \dagger b\ ſol.\ e$$
$$a^4 \dagger 3a^3e \dagger 3a^2e^2 \dagger ae^3 \dagger b\ ſol.\ a$$

$$a^4 \dagger 4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4 \dagger b\ ſol.\ a \dagger b\ ſol.\ e$$

Si fuerit latus ſingulare primum a, ſecundum verò e, itaut latus vniuerſum ſit a † e, coefficiens verò ſolidum ſit, b ſol. quo addito ad cubum ex binomia radice, fit id quod ductum in eandem Radicem, facit productum, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio, in qua, quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido; latus autem binomium ſit; atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens ſolidū ſit b ſolidū comparationis homogeneum ſit z pl.pla. ſingulare latus primum ſit a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit a † e cuius, quadrato-quadratū eſt $a^4 \dagger 4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4$, cui addito b ſol. a † b ſol. e, nempe coefficiente ſolido ducto in radicem binomiam, fiet $a^4 \dagger 4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4 \dagger$ b ſol. a † b ſol. e, quod æquabitur Z pl. pl. Et per antitheſin, vtrinque ſcilicet ſubtracto a^4, vna cum b ſol. a, remanebit $4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4 \dagger$ b ſol. e = Z pl. pl. — a^4 — b ſol. a. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur ex comparationis homogeneo ſubtrahatur, QQ lateris primi, vna cum pl. pl. ſub coefficiente ſol. & latere primo, quod ſupereſt, æquale eſt $4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4 \dagger$ b ſol. e. Hoc eſt quadruplo cubo lateris primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à ſolido coefficiente, in latus ſecundum.

Hoc autem eſt reſiduum applicaſſe ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, plus coefficiente ſolido Hinc.

PO-

PORISMA.

ITaque ad extrahendam radicem propoſitæ æquationis; affectæ ex comparationis homogeneo ſubtrahatur QQ; ſingularis lateris primi, vna cum plano plano ſub cœfficiente ſolido & eodem latere primo; Reſiduum eſt applicandum ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus eodem quadruplo, plus cœfficiente ſolido; ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum.

Ad æquationem in qua quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub latere, datoq; cœfficiente ſolido.

LEMMA II.

QVadrato-quadratum à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus multatum, pl. pl. ſub cœfficiente ſolido, & aggregato laterum, æquale eſt quadrato quadrato lateris primi, plus quadruplo Cubo lateris primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo, in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, minus pl. pl. ſub cœfficiente ſol. & latere primo, minus pl. pl. ſub cœfficiente ſol. & latere ſecundo.

$$a^3 + 3\,a^2 e + 3\,a e^2 + e^3 - b \text{ ſol.}$$
$$a + e$$
$$a^3 e + 3\,a^2 e^2 + 3\,a e^3 + e^4 * - b \text{ ſol. } e$$
$$a^4 + e\,a^3 e + 3\,a^2 e^2 + \quad a e^3 + b \text{ ſol. } a$$
$$a^4 + 4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a e^3 + e^4 - b \text{ ſ. } a - b \text{ ſ. } e$$

Si fuerit latus primum ſingulare a, ſecundum verò e, ex cuius cubo intelligatur ſubtractum ſolidum coefficiens, b ſol. reſiduum enim ductum in ipſam binomiam Radicem producit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II.

SI ſit æquatio in qua quadrato quadratum afficitur abiunctione plano-plani, ſub latere, datoq; cœfficiente ſolido latus autem binomium ſit, atque adeo conſtet e duobus ſingularibus lateribus.

Cœfficiens ſol. ſit, b ſol. comparationis homogeneum ſit z pl. pl. ſingulare latus primum ſit, a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit a + e, cuius quadrato-quadratum eſt $a^4 + 4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a e^3 + e^4 - b$ ſol. a $- b$ ſol. e, quod æquabitur z pl. pl. Et per Antitheſin, vtrinque ſcilicet addito b ſol. a, & ſubtracto a^4 remanebit $4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a e^3 + e^4 - b$ ſol. e $=$ z pl. pl. $+$ b ſol. a $- a^4$. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur ad comparationis homogeneum additum fuerit pl. pl. ſub cœfficiente ſol. & ſingulari latere primo, ab aggregato verò ſubductum ſit quadrato-quadratum lateris primi; Quod ſupereſt æquale eſt $4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a e^3 + e^4 - b$ ſol. e; Hoc eſt quadruplo cubo lateris primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato eiuſdem in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, minus pl. pl. ſub cœfficiente ſol. & eodem ſecundo latere.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $4\,a^3 + 6\,a^2 + 4\,a - b$ ſol. Hoc eſt ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, minus cœfficiente ſol. Hinc.

Digitized by Google

PORISMA.

ITaque ad indagandam radicem propoſitæ æquationis affectę, Ad comparationis homogeneum addito pl. pl. ſub cœfficiente ſol. & ſingulari latere primo, ex aggregato ſubtrahatur quadrato-quadratum ſingularis lateris primi; quod ſupereſt, eſt applicandum ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, minus cœfficiente ſol. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum; Ita vt, hæc duo ſint latera, quę faciant ad conſtitutionem plano planorum, in quæ reſiduum illud reſolui dabet,

Ad æquationem in qua plano-planum ſub latere datoq; cœfficiente ſolido afficitur multa Quadrato-quadrati,

LEMMA III.

PLano-planum ſub cœfficiente ſolido, & binomio latere, ſiue aggregato duorum ſingularium laterum, multatum quadrato-quadrato ab eodem aggregato laterum, æquale eſt cœfficienti ſolido in latus ſingulare primum, plus cœfficiente ſolido in latus ſecundum, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus quadruplo cubo lateris primi in latus ſecundum, minus ſextuplo quadrato primi in quadratum ſecundi, minus quadruplo primo in cubum ſecundi, minus quadrato-quadrato ſecundi.

$$\text{b ſol.} - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$$
$$a + e$$

$$\text{b ſol.}\, e - a^3e - 3a^2e^2 - 3ae^3 - e^4$$
$$\text{b ſol.}\, a - a^4 - 3a^3e - 3a^2e^2 - ae^3$$

$$\text{b ſol.}\, a + \text{b ſol.}\, e - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$$

Si igitur fuerit latus ſingulare primum a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit a + e &c. A cœfficiente ſolido, ſubductus ſit cubus ab aggregato laterum, ſingularium reſiduum ductum in ſingularium laterum aggregatum; producit id vnde propoſitionis veritas innoteſcit &c,

THEOREMA III.

SI ſit æquatio, in qua plano-planum ſub cœfficiente ſolito, & latere, afficitur multa quadrato-quadrati; latus autem ſit binomium, atque adeo e duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Cœfficiens ſolidum ſit b ſol. Comparationis homogeneum ſit z pl. pl. Latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, vt vniuerſum ſit a + e, huius quadrato-quadratum eſt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$: quo ſubtracto ex plano-plano b ſ. a + b ſol. e; facto nimirum ex cœfficiente ſolido in binomium latus remanebit b ſol. a + b ſol. e $- a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$; quod æquabitur z pl. pl. & per antitheſin fiet æquatio huiuſmodi b ſol. a + b ſol. e $- 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 =$ z pl. pl. + a^4; & rurſus b ſol. e $\sim 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 =$ z pl. pl. + $a^4 \sim$ b ſol. a.

Si igitur ad comparationis homogeneum addatur quadrato-quadratum lateris primi, differentia inter aggregatum, & plano planum ſub cœfficiente ſolido, & latere ſingulari primo; æqualis quidem eſt b ſol. e $\sim 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$. Hoc eſt differentiæ inter plano-planum à cœfficiente ſolido in latus ſecundum, & quadruplum cubum lateris primi, in ſecundum, plus ſextuplo quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi,

Hoc

Hoc autem eſt reſiduum illud applicaſſe ad b ſol. $\sim 4a^3 - 6a^2 - 4a$. Hoc eſt ad differentiam inter cœfficiens ſolidum, & quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem Hinc.

PORISMA.

Itaque ad eruendam radicem propoſitæ æquationis affectæ, ſumenda eſt differecntia inter plano-planum a coefficiente ſolido in ſingulare latus primum, & comparationis homogeneum auctum quadrato-quadrato ſingularis lateris primi, & hæc eſt applicanda ad differentiam inter ſolidum coefficiens, & quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione oritur ſingulare latus ſecundum; ita vt hæc duo ſint latera &c.

SECTIO V.

Ad æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-ſolidi ſub latere, datoq; cœfficiente plano-plano.

LEMMA I.

Quadrato-cubus à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus affectus adiunctione plano-ſolidi ſub aggregato ſingularium laterum, & cœfficiente plano-plano, æqualis eſt quadrato cubo lateris primi, plus quintuplo quadrato-quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus decuplo cubo lateris primi in quadratum ſecundi, plus decuplo quadrato lateris primi in cubum ſecundi, plus quintuplo latere primo in quadrato-quadratum ſecundi, plus quadrato-cubo lateris ſecundi plus plano ſolido à cœfficiente in latus primum, plus plano ſolido à cœfficiente in latus ſecundum.

$$a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + b\ \text{pl. pl.}$$
$$a + e$$

$$a^4e + 4a^3e^2 + 6a^2e^3 + 4ae^4 + e^5 + b\ \text{pl. pl.}\ e$$
$$a^5 + 4a^4e + 6a^3e^2 + 4a^2e^3 + ae^4 + b\ \text{pl. pl.}\ a$$

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + b\ \text{pl. pl.}\ a + b\ \text{pl. pl.}\ e$$

Si enim latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadrato-quadratum auctum cœfficiente plano-plano, ductum in binomium latus, efficit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit,

THEOREMA I.

Si fuerit æquatio in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano ſolidi ſub latere, & cœfficiente plano-plano; latus autem ſit binomium atque adeo conſtet è duobus ſingularibus lateribus.

Cœfficiens plano-planum ſit b pl. pl. at verò comparationis homogeneum ſit Z pl. ſol. latus ſingulare primum ſit a ſingulare ſecundum ſit e, vt vniuerſum latus ſit $a + e$, cuius quadrato cubus eſt $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$, at verò plano ſolidum afficiens eſt $b\ \text{pl. pl.}\ a + b\ \text{pl. pl.}\ e$, vnde ſit aggregatum $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + b\ \text{pl. pl.}\ a + b\ \text{pl. pl.}\ e$; quod æquabitur Z pl. ſol. & per antitheſin vtrinque ſub tracto a^5; & $b\ \text{pl. pl.}\ a$ remanebit $5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + b\ \text{pl. pl.}\ e = Z\ \text{pl. ſol.} - a^5 - b\ \text{pl. pl.}\ a$.

Si igitur ex comparationis homogeneo ſubtrahatur quadrato cubus lateris primi, & ex reſiduo ſubducatur plano-ſolidum à coefficiente plano-plano in latus ſingulare primum, quod remanet, eſt ęquale $5a^4e + 3\ 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + b\ \text{pl. pl.}\ e$. Hoc eſt quintuplo quadrato-quadrato lateris primi, in latus ſecundum, plus decuplo cubo lateris primi in quadratum ſecundi, plus decuplo quadrato lateris primi in cubum ſecundi, plus quintuplo latere primo in quadrato-quadratum ſecundi, plus quadrato cubo lateris ſecundi, plus plano-ſolido à plano-plano cœfficiente in latus ſecundum,

Hoc

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + b$ pl. pl. Hoc eſt ad quintuplum quadrato-quadratum lateris primi, plus &c. Hinc.

PORISMA.

Itaque ſi ſit exhibenda radix propoſitæ æquationis affectæ. A comparationis homogeneo, ſubtrahatur quadrato-cubus lateris primi, & ex reſiduo ſubducatur plano-ſolidum, ſub coefficiente plano-plano, & latere primo; Reſiduum eſt applicandum ad quintuplum quadrato-quadratum lateris primi, plus decuplo cubo eiuſdem, plus decuplo quadrato eiuſdem, plus quintuplo eodem, plus plano-plano coefficiente. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen operi ſuſcepto congruit, applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum &c;

Ad æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi, ſub latere, datoq; cœfficiente plann-plano.

LEMMA II.

Quadrato-cubus à binomio latere, ſiue à duobus, ſingularibus lateribus affectus multa plano ſolidi, ſub cœfficiente plano-plano, & aggregato ſingularium laterum, æqualis eſt quadrato-cubo lateris primi, plus quintuplo quadrato-quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus decuplo cubo lateris primi in quadratum ſecundi, plus decuplo quadrato-primi in cubum ſecundi, plus quintuplo latere primo in quadrato-quadratum ſecundi, plus quadrato-cubo lateris ſecundi, minus plano-ſolido à cœfficiente plano-plano in latus primum, minus plano-ſolido à cœfficiente plano-plano in latus ſecundum.

$$a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 - b \text{ pl. pl.}$$
$$a + e$$

$$a^4e + 4a^3e^2 + 6a^2e^3 + 4ae^4 + e^5 - b \text{ pl. pl. } e$$
$$a^5 + 4a^4e + 6a^3e^2 + 4a^2e^3 + ae^4 - b \text{ pl. pl. } a$$

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 - b \text{ pl.pl. } a - b \text{ pl. pl. } e$$

Singulare latus primum ſit a, ſecudum verò e, vt vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadrato-quadratum multatum cœfficiente b pl. pl. ductum in binomiam Radicem producit id vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II

Si fuerit æquatio in qua quadrato-cubus afficitur multa plano ſolidi ſub latere, datoq; cœfficiente plano-plano. Latus autem ſit binomium, atque adeo conſtet è duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens plano-planum ſit b pl. pl. comparationis homogeneum ſit z pl. ſol. latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius qua-
Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate. drato-cubus eſt $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$ à quo dempto plano-ſolido ſub cœfficiente plano-plano, & aggregato laterum b pl. pl. $a +$ b pl. pl. e remanet $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 -$ b pl. pl. a — b pl. pl. e, quod æquale eſt z pl. ſol. & per antitheſin vtrinque addito b pl. pl. a, & ſubtracto a^5 fiet æquatio $5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 -$ b pl. pl. e $=$ z pl. ſol. $+$ b pl. pl. $a - a^5$.

Si igitur ad compatationis homogeneum additum fuerit plano ſolidum ſub latere ſingulari primo, & coefficiente plano-plano, ex aggregato autem ſubtractus fuerit cubo-cubus lateris eiuſdem primi; Quod ſupereſt æquale eſt $5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 -$ b pl. pl. e. Hoc eſt quintaplo quadrato-quadrato lateris primi in

quadra-

ſecundum, plus decuplo cubo lateris primi in quadratum ſecundi, plus decuplo quadrato primi in cubum ſecundi, plus quintuplo latere primo in quadrato-quadratum ſecundi, plus quadrato-cubo ſecundi, minus plano-ſolido à coefficiente plano-plano in latus ſecundum.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $5 a^4 + 10 a^3 + 10 a^2 + 5 a -$ b pl. pl. hoc eſt ad quintuplum quadrato-quadratum lateris primi, plus decuplo cubo eiuſdem, plus decuplo quadrato eiuſde, plus quintuplo eodem, minus plano-plano cœfficiente Hinc.

PORISMA.

ITaque ad exhibendam radicem propoſitæ æquationis affectæ, reperto latere ſingulari primo; plano-ſolidum ſub ipſo, & ſub cœfficiente plano-plano, addendum eſt ad comparationis homogeneum, ex aggregato autem ſubtrahendus eſt cubo-cubus eiuſdem, reſiduum verò eſt applicandum ad $5 a^4 + 10 a^3 + 10 a^2 + 5 a -$ b pl. pl. Hoc eſt ad quintuplum &c.

Ad æquationem in qua plano-ſolidum ſub latere datoq; coefficiente plano-plano, afficitur multa Quadrato-cubi.

LEMMA III.

SOlidum ſub coefficiente plano-plano, & binomio latere, ſiue duorum laterum aggregato, affectum multa quadrato cubi, æquale eſt plano-ſolido à plano-plano coefficiente in ſingulare latus primum, plus plano-ſolido, à plano-plano coefficiente in ſingulare latus ſecundum, minus quadrato cubo lateris primi, minus quintuplo quadrato-quadrato eiuſdem in latus ſecundum, minus decuplo cubo eiuſdem in quadratum ſecundi, minus decuplo eiuſdem quadrato in ſecundi cubum, minus quintuplo eodem in quadrato-quadratum ſecundi, minus quadrato-cubo ſecundi.

$$\text{b pl. pl.} - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$$
$$a + e$$

$$\text{b pl. pl. } e - a^4e - 4a^3e^2 - 6a^2e^3 - 4ae^4 - e^5$$
$$\text{b pl. pl. } a - a^5 - 4a^4e - 6a^3e^2 - 4a^2e^3 - ae^4$$

$$\text{b pl. pl. } a + \text{b pl. pl. } e - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$$

Si latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, coefficiens plano-planum ſit b pl. pl. a quo ſubtracto quadrato-quadrato ipſius $a + e$, reſiduoque ducto in idem vniuerſum latus, fit id vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA III.

SI fuerit æquatio, in qua quadrato-cubus negatur de plano-ſolido ſub coefficiente plano-plano, & latere. Latus autem ipſius binomium ſit; atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens plano-planum, ſit b pl. pl. comparationis homogeneum ſit z pl. ſol. latus ſingulare primum ſit a ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadrato-cubus eſt $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 + e^5$. Plano ſolidum autem ſub plano-plano coefficiente, & binomio latere eſt b pl. pl. a + b pl. pl. e de quo ſi negetur quadrato-cubus iam dictus, remanebit b pl. pl. a + b pl. pl. $e - a^5 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 - 5 a e^4 - e^5$ quod æquabitur z plano-ſolido; & per antitheſin *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

tithesin vtrinque addito a^5, & vtrinque ſubtracto b pl. pl. a, remanebit b pl. pl. e $\sim 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5 = $ z pl. ſol. $+ a^5 \sim$ b pl pl. a.

Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.

Si igitur ad comparationis homogeneum addatur quadrato-cubus lateris ſingularis primi, & ex aggregato auferatur plano-ſolidum ſub plano-plano coefficiente, & ſingulare latere primo, *quod ſupereſt æquale eſt b pl. pl. $e - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$, Hoc eſt differentię inter plano-ſolidū à coefficiente plano-plano in latus ſecundum, & quintuplum quadrato-quadratum lateris primi in ſecundum; plus decuplo cubo lateris primi in quadratum ſecundi, plus decuplo quadrato primi in cubum ſecundi, plus quintuplo latere primo in quadratum ſecundi, plus quadrato-cubo lateris ſecundi.

* e contra &c.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad b pl. pl. $\sim 5a^4 - 10a^3 - 10a^2 - 5a$; hoc eſt differantiæ inter plano-plano coefficiens &c.

PORISMA.

Itaq; ad eruendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; ſumatur differentia inter plano-planum ſub latere ſingulari primo, & coefficiente plano-plano, & comparationis homogeneum auctum cubo ipſius ſingularis lateris primi; Hæc autem applicetur ad differentiam inter plano-planum coefficiens & quintuplum quadrato-quadratum lateris primi, plus decuplo cubo eiuſdem, plus decuplo quadrato eiuſdem, plus quintuplo eodem. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen operi ſuſcepto congruit, applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum, itaut &c.

SECTIO. VI.

Ad æquationem, in qua Cubo-cubus afficitur adiunctione ſolido-ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano-ſolido.

LEMMA. I.

Cubo-cubus a binomio latere, ſiue a duobus ſingularibus lateribus affectus adiunctione ſolido-ſolidi ſub coefficiente plano ſolido, & aggregato ſingularium, laterum æqualis eſt cubo-cubo lateris primi, plus ſextuplo quadrato-cubo primi in latus ſecundum, plus decuquintuplo quadrato-quadrato primi in quadratum ſecundi, plus vigecuplo cubo primi in cubum ſecundi, plus decuquintuplo quadrato primi in quadrato-quadratum ſecundi, plus ſextuplo primo in quadrato-cubum ſecundi, plus cubo-cubo ſecundi, plus ſolido-ſolido a plano ſolido coefficiente in latus primum, plus ſolido-ſolido a plano ſolido coefficiente in latus ſecundum.

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + \text{b pl.sol.}$$
$$a + e$$

$$a^5e + 5a^4e^2 + 10a^3e^3 + 10a^2e^4 + 5ae^5 + e^6 + \text{b pl.sol.e}$$
$$a^6 + 5a^5e + 10a^4e^2 + 10a^3e^3 + 5a^2e^4 + ae^5 + \text{b pl.sol.a}$$

$$a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6 + \text{b pl.sol.a} + \text{b pl.sol.e}$$

Latus ſingulare primum ſit a ſecundum; verò e, itaut binomium latus ſit $a + e$; cuius quadrato-cubus eſt $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$; cui addito coefficiente b pl. ſol. ſit aggregatum a, quo in binomiam radicem $a + e$ producitur id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEO-

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio, in quà Cubo-cubus afficitur adiunctione ſolido-ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano-ſolido, latus autem binomium ſit, atq; adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens plano ſolidum ſit b plano-ſolidum comparationis homogeneum ſit z ſolido-ſolidum, latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubo-cubus eſt $a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6$, Afficiens autem ſolido-ſolidum, eſt b plano-ſolidum a + b plano-ſolido e, quo addito ad cubo-cubum prædictum, fit $a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6 + b$ pl. ſol. a + b pl. ſol. e, quod æquabitur z ſol. ſol. per antitheſin verò, vtrinq; ſcilicet ſubtractis, a^6, & b pl. ſol. a, fiet, $6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6$ + b pl. ſol. e = z ſol. ſol. — a^6 — b pl. ſol. a. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur ex comparationis homogeneo ſubtractus fuerit cubo-cubus ſingularis lateris primi, itemque ſolido-ſolidum à coefficiente plano-ſolido in latus primum, quod ſupereſt, æquale eſt $6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6$ + b pl. ſol. e; hoc eſt ſextuplo quadrato-cubo lateris primi in ſecundum, plus decuquintuplo quadrato-quadrato primi in quadratum ſecundi, plus vigecuplo cubo primi in cubum ſecundi, plus decuquintuplo quadrato primi in quadrato-quadratum ſecundi, plus ſextuplo primo in quadrato-cubum ſecundi, plus cubo-cubo ſecundi, plus ſolido-ſolido a coefficiente plano-ſolido in latus ſecundum.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + b$ plano-ſolido. Hinc.

PORISMA.

ITaque ad indagandam radicem propoſitæ æquationis affectæ; reperto latere ſingulari primo à comparationis homogeneo ſubtrahatur cubo-cubus lateris ſingularis primi, itemque ſolido-ſolidum à pl.ſol.coefficiente in latus primum, quod ſupereſt autem applicetur ad ſextuplũ quadrato-cubum lateris primi, plus decuquintuplo quadrato-quadrato eiuſdem, plus vigecuplo cubo eiuſdem, plus decuquintuplo quadrato eiusdem, plus ſextuplo eodem latere primo, plus plano-ſolido coefficiente. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum; ita vt hæc duo ſint latera &c.

SCHOLION.

ET hunc in modum procedendum eſt in reliquis omnibus æquationibus quomodocumque ſe habentibus, ſiue in iis ſit vna, ſiue plures coefficientes magnitudines; ſiue affirmatè tantummodo, ſiue negatè, ſiue partim affirmatè, partim negatè afficiantur, a quarum explicatione hìc abſtinendum exiſtimo; tam quia ex dictis facile omnia deprehendi poſſunt, cùm quia hac de re iterum in Specioſa redibit ſermo. *Aliæ æquationes imitatione ſuperiorum reſolui poſſũt.*

Interim illud adiciam, nimirum ad ſectionem quartam pertinere etiam, quæ ſequuntur reſolutiones, quia tamen Typographi incuria fuerunt, perturbato ordine prætermiſſa, propterea hic appendicis loco ſubſtituemut illas.

Digitized by Google

AD SECTIONEM IV.

APPENDIX.

AD Æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub cubo, dataq; coefficiente longitudine.

LEMMA I.

QVadrato-quadratum à binomio latere, ſeu à duobus ſingularibus lateribus, affectum adiunctione plano-plani ſub cubo aggregati duorum ſingularium laterum, & coefficiente longitudine, æquale eſt quadrato-quadrato lateris primi, plus quadruplo cubo primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato primi, in ſecundi quadratum, plus quadruplo primo, in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato ſecundi, plus plano plano à coefficiente in cubum primi, plus plano-plano à cœfficiente in ſolidum à triplo quadrato primi in ſecundum, plus plano-plano à coefficiente in ſolidum à triplo primo, in quadratum ſecundi, plus plano-plano à coefficiente in cubum ſecundi.

$$
\begin{array}{r}
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\
a + e + b \\
\hline
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \\
a^3e + 3a^2e^2 + 3ae^3 + e^4 \qquad\qquad \\
a^4 + 3a^3e + 3a^2e^2 + ae^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3
\end{array}
$$

Si fuerit a ſingulare latus primum, ſecundum verò e itaut vniuerſum ſit $a + e$ huius cubus ductus in binomium latus auctum cœfficiente, producit id vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA I.

SI fuerit æquatio, in qua quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani, ſub cubo, dataq; cœfficiente longitudine: eius autem latus binomium ſit, atq; adeo conſtet è duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit z pl. pl. latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e; itaut vniuerſum ſit $a + e$; cuius quadtato-quadratum eſt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, & afficiente addito fit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + c^4 + ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = z$ pl. pl. & per antitheſin vtrinque ſubtractis a^4 & $b a^3$ fiet æquatio $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = z$ pl. pl. $- a^4 - ba^3$. *Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.*

Si igitur ex comparationis homogeneo, auferatur a^4 & $b a^3$, reſiduum æquale erit $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3$; Hoc eſt quadruplo cubo lateris primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato primi in ſecundi quadratum, plus quadruplo primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato ſecundi, plus pl. pl. à coefficiente in ſolidum a triplo quadrato primi in ſecundum, plus pl. pl. à coefficiente in ſolidum à triplo primo in quadratum ſecundi, plus pl. pl. à coefficiente in cubum ſecundi.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum ipſum ad $4a^3 + 6a^2 + 4a + 3ba^2 + 3ba + b$. hoc eſt ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, plus à triplo quadrato primi in coefficientem, plus à triplo latere pri-

primo in coefficientem, plus ipſa coefficiente longitudine. Hinc,

PORISMA.

ITaque ad exhibendam radicẽ propoſitæ æquationis affectæ, reperto latere primo, eius quadrato-quadratum auferatur à comparationis homogeneo, & præterea ſubducatur plano-planum à coefficiente in cubum lateris primi; Quod ſupereſt eſt applicandum ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, plus triplo à coefficiente in quadratum primi, plus plano à triplo latere primo, in coefficientem, plus ipſa coefficiente. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen operi ſuſcepto congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum. Itaut, &c.

LEMMA II.

QVadrato-quadratum à binomio latere, ſiue à duobus ſingularibus lateribus, affectum, multa plano-plani ſub cubo aggregati duorum laterum, ſingularium, dataque coefficiente longitudine, æquale eſt quadrato-quadrato lateris primi, plus quadruplo cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo quadrato primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo primo, in cubum ſecundi, plus quadrato quadrato ſecundi, minus à coefficiente in cubum lateris primi, minus plano-plano à coefficiente in ſolidum à triplo quadrato primi in ſecundum, minus plano plano à coefficiente in ſolidum à triplo latere primo in quadratum ſecundi, minus, plano-plano à coefficiente in cubum ſecundi.

$$
\begin{array}{r}
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\
a + e - b \\
\hline
-ba^3 - 3ba^2e - 3bae^2 - be^3 \\
a^3e + 3a^2e^2 + 3ae^3 + e^4 \\
a^4 + 3a^3e + 3a^2e^2 + ae^3 \\
\hline
a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 - ba^3 - 3ba^2e - 3bae^2 - be^3
\end{array}
$$

Si fuerit a ſingulare latus primum, at verò e, ſit ſecundum; itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus ductus in aggregatum laterum multatum, coefficiente, facit id vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA II.

SI fuerit æquatio, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub cubo, & coefficiente longitudine, eius autem latus ſit binomium, atque adeò è duobus ſingularibus lateribus conſtet.

Coefficiens longitudo ſit b comparationis autem homogeneum ſit z pl. pl. Latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius quadrato-quadratum eſt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ afficiens autem homogeneum eſt $ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3$, quo ſubtracto ex quadrato quadrato prædicto, remanet $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 - ba^3 - 3ba^2e - 3bae^2 - be^3$ quod æquabitur z pl. pl. & per antitheſin fiet $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 - 3bae^2 - be^3 = z$ pl. pl. $+ ba^3 - a^4$. Vtrinque nimirum addito ba^3, & ſubtracto a^4. Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.

Si igitur ad comparationis homogeneum addatur ba^3, & ab aggregato auferatur a^4 quod remanet, æquale erit $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 - 3bae^2 - be^3$.

Hoc eſt quadruplo cubo lateris primi in ſecundum, plus ſextuplo lateris primi quadrato in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato ſecundi, minus à coefficiente in ſolidum à triplo latere primo in quadratum ſecundi, minus à coefficiente in cubum ſecundi.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum illud ad $4a^3 + 6a^2 + 4a - 3ba - b$. Hoc eſt ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem, minus à coefficiente in latus triplum primum, minus ipſa coefficiente longitudine. Hinc.

PORISMA.

Itaque ad exhibendam radicem propoſitæ æquationis affectæ. Ad comparationis homogeneum addatur plano-planum à cœfficiciente in cubum lateris ſingularis primi; ex aggregato autem ſubtrahatur quadrato-quadratum eiuſdē lateris ſingularis primi, reſiduum eſt applicandum ad quadruplum cubum lateris primi, plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem ſingulari latere primo, minus plano à coefficiente in triplum latus primum, minus coeffi- ipſa longitudine.

Quæ præmiſſa ſunt ad Æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plan. ſub cubo dataq; coefficiente longitudine.

Ad Æquationem, in qua plano-planum ſub cubo, dataq; coefficiente longitudine afficitur multa Quadrato-quadrati.

LEMMA III.

Plano-planū ſub cubo à binomio latere, dataq; cœfficiente longitudine multatū quadrato quadrato eiuſdem binomij lateris: æquale eſt plano plano ſub coefficiente longitudine, & cubo lateris primi, plus plano plano ab eadem coefficiente, in ſolidum à triplo quadrato lateris primi in ſecundum, plus plano-pano ab eadem coefficiente longitudine in ſolidum à triplo latere primo in quadratum ſecundi, minus quadrato-quadrata lateris primi, minus quadruplo cubo primi lateris in ſecundum, minus ſextuplo quadrato primi, in quadratum ſecundi, minus quadruplo latere primo, in cubum ſecundi, minus quadrato-quadrato lateris ſecundi.

$$
\begin{array}{r}
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\
b - a - e \\
\hline
-a^3e - 3a^2e^2 - 3ae^3 - e^4 \\
-a^4 - 3a^3e - 3a^2e^2 - ae^3 \quad\quad \\
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4
\end{array}
$$

Si latus ſingulare primum fuerit a, ſecundum verò e, itaut latus binomium ſit $a + e$; cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, ſi autem à coefficiente b ſubductum fuerit binomium $a + e$, remanebit $b - a - e$, quo ducto in cubum prædictum fit id, vnde propoſitionis veritas innoteſcit.

THEOREMA III.

Si fuerit plano-planum ſub cubo, datq; coefficiente longitudine affectum multa Qaudrato-quadrati; latus autem binomium ſit, atque adeo conſtet è duobus ſingularibus lateribus.

Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum, ſit z plano-planum; latus ſingulare primum ſit a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$, cuius cubus eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, quo ducto in b, fit pla. pla. affectum $ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3$

Ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate. ex quo dempto quadrato-quadrato à binomio latere, remanet $ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quod æquabitur z plano-plano, & per antitheſin

theſin vtrinque addito a^4 & ſubtracto ba^3, remanebit $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \backsim 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 = z\,pl.pl. + a^4 \backsim ba^3$.

Si igitur ad comparationis homogeneum additum fuerit quadrato-quadratum lateris ſingularis primi, ex aggregato verò ſubtractum ſit plano-planum ſub coefficiente longitudine, & cubo lateris primi; vel contra ſubtractum ſit aggregatum illud ab, &c. quod remanet æquale eſt $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \backsim 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$.

Hoc eſt differentiæ inter plano-planum à coefficiente longitudine in ſolidum ſub triplo quadrato lateris primi, & ſecundo, plus plano-plano à coefficiente in ſolidum ſub triplo latere primo, & quadrato ſecundi, plus à coefficiente in cubum ſecundi, & quadruplum cubum primi in ſecundum, plus ſextuplo quadrato primi, in quadratum ſecundi, plus quadruplo latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato ſecundi.

Hoc autem eſt applicaſſe reſiduum ipſum ad $3ba^2 + 3ba + b \backsim 4a^3 - 6a^2 - 4a$ nempe ad differentiam inter $3ba^2 + 3ba + b$, & $4a^3 + 6a^2 + 4a$. Hinc.

PORISMA.

ITaque ad eruendam radicem propoſitæ æquationis affectæ; ad comparationis homogeneum addatur ſingularis primi lateris quadrato-quadratum, differentia inter aggregatum, & plano-planum ſub coefficiente longitudine, & cubo lateris primi, applicanda eſt ad differentiam inter ſolidum ſub triplo quadrato lateris primi, in coefficientem auctum plano à triplo latere primo in coefficientem, & rurſus auctum ipſa coefficiente, & quadruplum cubum lateris primi plus ſextuplo quadrato eiuſdem, plus quadruplo eodem. Ex huiuſmodi enim, quæ tamen ſuſcepto operi congruit applicatione, oritur ſingulare latus ſecundum; itaut hæc duo ſint latera, quæ faciant, &c.

SCHOLION.

SI verò fuerit æquatio in qua Quadrato-quadratum eſt affectum adiunctione duplicis plano-plani, vnius quidem ſub latere, alterius ſub Quadrato adeo, vt coefficiens vnum ſit ſolidum, aliud autem planum.

Explicari hac methodo poſſunt. Imo, quocunque modo æquationes ipſæ affectæ fuerint. Quia tamen de his iterum nobis erit in Specioſa diſſerendum: propterea eò Lectorem, remiſimus; vbi dabitur nobis locus ampliſſimus ad huiuſmodi contemplationem ſumma quidem iucunditatis, & vtilitatis ſimul, cum hac Arte obſtruſioribus problematibus liceat ſatisfacere.

Numeroſa

Numeroſa æquationum affectarum Analyſis.

CAPVT XV.

PRæmiſſa theoria æquationum explicandarum beneficio ſpecioſę Logiſtices, proximum eſt, vt numeroſam aggrediamur earundem æquationum reſolutionem, primò exordientes ab æquationibus Quadraticis affectis ſub latere, quarum tres ſunt ſpecies, vt ſuperiùs vidimus. Deinde cæteras perſequemur: ſit igitur.

SECTIO I.

Numeroſa Analyſis æquationis, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine.

Iſomœria præſidiū eſt Analyſtæ aduerſus fractionis vitium.

FRactionis vitium in his æquationibus explicandis Analyſtæ parum negotij faceſſit, cùm ei præſidio ſit Iſomœria, cuius beneficio propoſitas æquationes ab ipſis fractionibus expurgat. Numerorum quidem Aſymmetria illi moleſta eſt; Nec Methodus cuius hic pragmatiam aggredimur ex præcedentibus Theorijs deductam, præualet omnino aduerſus æquationes huiuſmodi vitio laborantes. De his tamen paulò infra nobis erit agendum.

Oblata autem æquatio ſit 1 Q † 16 R ⩵ 336.

Quando quidem facta punctorum deſignatione in comparationis homogeneo iuxta quadraticam naturam, deprehenditur propoſitæ æquationis affectæ latus vniuerſum binomium eſſe, atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Propterea effingo ſingulare latus primum eſſe, a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit, a † e; Coefficiens autem appelletur b, & comparationis homogeneum dicatur Z pl. quadratum ex a † e eſt a^2 † 2 a e † e^2. Homogeneum afficiens erit b a † b e, quo addito ad quadratum prædictum fiet a^2 † 2 a e † e^2 † b a † b e; Quod equabitur Z pl. Et per antitheſin, vtrinque nimirum ſublatis a^2, & b a, remanebit 2 a e † e^2 † b e ⩵ Z pl. — a^2 — b a. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ requiruntur ad propoſitæ æquationis explicationem.

Specioſa reſolutio.

Numeroſa reſolutio explicatur.

Facta igitur ſignatione punctorum, à dextra ad læuam pergendo iuxta quadrati Naturam, ſcilicet alternatim figuris ſignatis primum punctum cadet ſub 6, à dextris, & vna intermiſſa figura, ſecundum cadet ſub 3. Eliciatur ſingulare latus primum, vſque ad primum punctum à ſinixtris, & erit 1, cumque binomia ſit radix conſtans ex duobus ſingularibus lateribus, & ita quidem, vt à ſiniſtris, non ſint plura, quę vnius munere fungi debeant, vt contingeret, ſi ſubtus homogeneum comparationis, tria caderent puncta quadratica, duo enim priora ſingularia latera fungerentur vice vnius, duo enim ſingularia latera primum elicita, tanquam vnum, ad inueſtigandum tertium tanquam ſecundum adhiberentur, ſic ſi forent quatuor, tria priora aliquando tanquam vnum vſurparentur. In propoſita igitur æquatione duo ſunt abſolutè ſingularia latera, & proinde ſingulare primum erit numerus denariorum; ſingulare latus primum eſt 1, atque adeo 10, cuius quad: erit 100, quo ſubtracto ex 336, comparationis homogeneo, ſic enim præſcribit Poriſma, iuxta quod ſubtrahendum eſt etiam planum ſub coefficiente, & ſingulari latere primo, nempe 160, & remanet 76, numerus diuidendus per duplum latus ſingulare primum, plus coefficiente, nimirum per 36, vt oriatur ſecundum ſingulare latus 2; Ex ipſo igitur, 76,

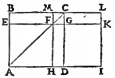
ſub-

ſubtrahi deinde debet 40 planum factum ex duplo latere primo in ſecundum; & rurſus 32, planum à coefficiente in latus ſecundum, denique 4, quadratum lateris ſecundi, ita vt nihil remaneat.

Iuuat autem quam maximè ad confuſionem euitandam reſolutionem ipſam ordinare ſecundum diſpoſitionem, qua vſus eſt Vieta.

Huius methodi demonſtratio Geometrica.

Hæc autem Geometricè facilè poterunt oſtendi. Intelligatur enim A D vniuerſale eſſe latus conſtans ex duobus ſingularibus lateribus A H, H D, ita vt quadratum ex A D, ſit A B C D, quadratum verò ex A H, ſit A E F H; quadratum autem ex H D, ſit F M C G; duplum planum ſub ſingularibus lateribus erunt E M, H G ſimul. Intelligatur verò D I, coefficiens, ita vt planum ſub latere, & coefficiente ſit, D C L I, & D G K I, erit planum ſub coefficiente, & latere ſingulari primo D G; præterea G C L K, erit planum ſub coefficiente, & ſingulari latere

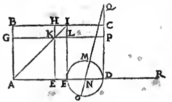


ſecundo. Itaque planum A B L I, conſtabit ex A F, quadrato ſingularis lateris primi A H, & ex E M; H G, nempe duplo plano ſub ſingularibus lateribus A H, H D, & ex F C, quadrato ſingularis lateris ſecundi, & ex D K, plano ſub coefficiente D I, & latere ſingulari primo D G, atque demum ex G L, plano ſub G K, hoc eſt D I, coefficiente, & ſub G C, latere ſingulari ſecundo, hoc autem rotum æquabitur Z plano comparationis homogeneo. Itaque vtrinque ſubtracto, A F, & rurſus D K, quod remanet nempe E L, plus H G, eſt applicatam ad duplum A H, plus D I, excedens quadrato ipſius H D, vt perſpicuum eſt, ſi nimirum A H, hoc eſt E F, F H, & D I, ſeu G K, in directum intelligantur, vt vna.

Geometricè ætenditur quã bene hanc methodum cum veteri conuenire.

Mirificè autem nouam hanc cum veteri methodo conſentire ſic oſtendo.

Sit coefficiens F D, ſit autem A F, conſtans ex A E, E F, ita vt ſi ex A C, rectangulo, auferatur A K, quadratum ex A E, & ex reſiduo auferatur F P, quod remanet eſt applicatum ad duplum A E, plus coefficiente excedẽs, &c. Manifeſtũ eſt A F, ſeu B I, eſſe Radicis pretium, ex antecedentis conuerſo.



Intelligatur diuiſa F D, bifariam in N, ex centro N, ad interuallum alterutrum N F, N D, deſcriptus ſit circulus F M D O, recta verò D Q, poſſit rectangulum A C, & per N, ducta ſit O Q.

Quoniam F D, eſt coefficiens, & D Q, poteſt comparationis homogeneum Manifeſtum eſt [a] iuxta veterem Methodum ſegmentum M Q, eſſe Radicis pretium.

a Auctor id in ſpecioſa oſtendit.

Oſtendendum eſt igitur M Q, æquari A F.

Quandoquidem A C, rectangulum, æquale eſt comparationis homogeneo; & D Q, illud poteſt, ſiue A C, æquale eſt quadrato D Q, cui eſt æquale rectangulum O Q M, propterea rectangulum O Q M, æquale erit rectangulo A C.

Intelligatur A D, protracta in R, vt D R, ſit æqualis M Q. Cùm igitur F D, ſit æqualis O M, erit F R, æqualis O Q, quare rectangulum F R D, æquale erit rectangulo O Q M, ſed O Q M, eſt æquale ipſi A C, ſeu D A F; proinde rectangulum F R D, æquale erit rectangulo D A F; quamobrem erit [a] vt F R, ad A D, ita A F, ad D R, & permutando, [b] vt F R, ad A F, ita A D, ad D R, & componendo [c], vt A R, ad A F, ita A R, ad D R; quare A F, æquabitur D R, ſed D R, facta eſt æqualis M Q; ergo A F, M Q, erunt inter ſe æquales.

a 16. Sexti.
b 16. Quinti.
c 18. Quinti.

Aptiſſima verò eſt reſolutionis diſpoſitio, qua nos aliàs Vietam ſecuti vſi ſumus. Et ex ſuprà explicatis conſtet cùm de reſolutione numeroſa purarum poteſtatum verba fecimus; ſiquis igitur eandem reſolutionis formam retinere velit, vt diſtinctè procedat, reſpiciat adiunctum alterius æquationis Exemplum, quod iuxta eam, quam præmiſimus, θεωρίαν, extruximus.

Pro-

Propoſita ſit æquatio 1 Q+ 12 R = 58528; Analyſis hoc ſequenti modo ordinabitur iuxta eam, quæ præmiſſa eſt θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b	Coefficiens longitudo.		1 2 ·	Sublateralis · ·	Tot puncta &c. ○ ○ ○ — R 2 3 6 — Q 5 2 9: 3 6 — 2 — 200 — Tot numerales circuli, &c.
Z pl.	Quadratum affectum reſoluendum.	5 · Q I.	8 5 R . Q II	2 8 R . Q III	
a²	Plana ablatitia.	4			Quadratum lateris primi.
b a			2 4		Planum à latere primo in coefficientem.
a² † b a	Summa planorum ablatitiorum.	4	2 4		
Z pl. − a² − b a	Reliquum reſoluendi quadrati affecti.	1	6 1	2 8	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b	Diuiſorũ pars ſuperior { Coefficiens lõgitudo.		1	2	
Z pl. − a² − b a	Reliquum reſoluendi quadrati.	1	6 1 ·	2 8 · · ·	a † e — 200 † 30
2 a	Diuiſorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		4		
2 a † b	Summa diuiſorum.		4 1	2	
2 a e	Plana ablatitiá.	1	2		A latere ſecundo in duplum primi.
e²			9		Quadratum lateris ſecundi.
b e			3	6	A latere ſecundo in coefficientem.
2 a e † e² † b e	Summa planorum ablatitiorum.	1	3 2	6	
Z pl. − a² − b a − 2 a e − e² − b e	Reliquum reſoluendi affecti quadrati.		2 8	6 8	

Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, ſeu primi, & fit.

Edu-

Eductio lateris ſingularis III.

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens long.		1 2	
	Reliquũ reſoluendi affecti quadrati.	2 8	6 8	a + e 2 3 0 + 6
Diuiſorum pars inferior.	Duplum lateris eliciti.	4	6	
	Summa diuiſorum.	4	7 2	
Plana ablatitia.		2 7	6	A latere ſecundi in duplum lateris primi.
			3 6	Quadratum lateris ſecundi.
			7 2	A latere ſecundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo reſoluendi quadrati affecti.		2 8	6 8	

b

Z pl. - a^2
&c.

Æquatio, quam attulimus, eſt in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine; Et è quadrato ſic affecto propoſitum nobis eſt analyticè latus elicere. In huiuſmodi autem æquatione coefficiens longitudo eſt 1 2, comparationis homogeneum eſt 5 8 5 2 8; huiuſmodi autem homogeneum comparationis non eſt quadratum purum, ſed affectum ſub latere, & data coefficiente longitudine 1 2. Inter geneſim verò quadrati affirmatè affecti, & eam, quæ eſt quadrati puri, vt etiam ſuperiùs innuimus, hoc tantùm intereſt vt ordinata geneſis affecti quadrati affirmatè hoc amplius addat, vt ſingulare latus, quod primùm elicitur, ducatur in coefficientem longitudinem, hoc igitur addit geneſi quadrati-puri, vt præterea latus, quoque ſecundum in eandem coefficientem longitudinem ducatur. *Præcepta ad hanc æquationẽ explicandã*

Primùm autem propoſitus numerus, qui in æquatione fungitur munere comparationis homogenei, ſignandus eſt quibuſdam punctis ad eum modum, quo ſuprà notauimus; poſito puncto ſub prima figura ad dextram, & alio ſub tertia, & alio ſub quinto, & ita deinceps ſub alijs locis imparibus, ita vt quodlibet punctum duas habeat figuras, illam ſcilicet, ſub qua punctum ſignatum eſt, & aliam, quæ hanc ſiniſtrorſum præcedit excepto vltimo puncto ad ſiniſtram, quod quandoque figuram vnicam habet, cum ſcilicet figurarum numerus impar eſt. Facta igitur hac ſignatione quibus deſignantur ſedes vnitatum quadrata ſingularia metientium per binas alternas, quot numerantur ſedes, ac puncta, tot laterum, atque ſimplicium ſedes conſtituentur per ſingulas figuras deſuper poſitiſque punctis etiam deſignabuntur, & in vltima ſimplicium ſede, quæ prima ſit, dum tenditur à læua ad dextram coefficiens ipſa longitudo conſiſtet.

Quando coeffi ciens pluribus, quam vna figura conſtat.

Coefficiens verò ipſa cum pluribus figuris, quàm vna conſtat, figuræ reliquæ in anteriora prorumpant.

Quomodo ſingularia ſint eligenda latera.

His autem peractis eliciantur ſingularia latera, non ſecus, ac in Analyſi puri quadrati, hoc vnum amplius obſeruando, quòd coefficiens longitudo iam dicta inter diuiſores eſt recenſenda; elicita verò ſingularia latera, ducantur in coefficientem longitudinem; planum autem, quod inde fit ſubijciendum ſic, vt deſinat ſub ſede ipſius coefficientis, & eſt auferendum ab ipſo quadrato affecto.

Coefficiẽs longitudo ordine in ſuccedentia loca ſubijcienda.

Denique eadem coefficiens longitudo in ſuccedentia loca ordine ſubijcienda eſt, vt etiam ſubtus reliqui diuiſores moueri debent. Hæc autem præcepta in ſuperiori exemplo obſeruata cernis.

SCHOLION.

Forma reſolutioni aptiſſima eſt, quam diximus; Breuiter tamen ſic tradi poteſt.

Facta enim figurarum ſignatione punctis ad eum, quem explicuimus modum, inſtituetur analyſis hoc pacto.

Breuius eadẽ reſolutio tractatur.

Quoniam in ſuperiori exemplo, tria ſunt puncta, tres itidem figuræ erunt, ex quibus vniuerſum latus conſurget. Sumatur latus maximi quadrati contenti in prima figura 5 ad ſiniſtram ſub qua primum punctum cadit ab eadem parte, huiuſmodi latus erit 2, cuius quadratum eſt 4, quo ſubtracto ex 5, remanebit 1, cui apponantur duæ ſequentes figuræ, quales ſunt 8, & 5, vt fiat numerus 185, cui ſubijciatur numerus 24, productus ex 2, prima figura in 12 coefficientem; & ita conſtitui debet, vt 4 figura numeri 24, cadat ſub 5. numeri 185. id exigente producto à latere primo, in coefficientem, ſubtrahatur autem 24 ex 185, vt remaneat 161, cui appingi debet 2, figura ſequens in comparationis homogeneo, diuiſionis gratia.

```
1Q + 12R =        2  3  6
                  5 8 5 2 8
                  .   .   .
                  1 8 5
                    2 4
                  ---------
Diuiſor primus    412
Diuiſor ſecundus  472
                  1 6 1 2
                  1 3 2 6
                  ---------
                    2 8 6 8
                    2 8 3 2
                  ---------
                        3 6
                        3 6
                  ---------
                        0 0

4            4 6
  1 2          1 2
-----        -----
4 1 2        4 7 2
           1 2
               9
             3 6
           -------
           1 3 2 6
             4 6
               6
           -------
           2 7 6
             7 2
           -------
           2 8 3 2
             3 6
           -------
           2 8 6 8
```

Ad habendã ſecundam figuram.

Ad habendam ſecundam figuram; Sumatur 4, duplum figuræ primæ, cui apponatur 12, numerus radicum, vt fiat numerus 412, ſic autem appoſitio numeri ad numerum fieri debet id exigente primi lateris pretio; per hunc autem numerum 412, diuidere oportet 1612, diuiſioneque inſtituta, quæ ſuſcepto operi ſit conſentanea fiet quotiens 3, erit igitur 3, figura ſecunda; ſumatur autem 4, duplum primæ figuræ 2, & in hunc ducatur 3, figura ſecunda, vt fiat 12, cui addere oportet 9, quadratum ſecundæ figuræ, factaque additione, vt 9, antecedat vnius figuræ ſpatio deſtrorſum, id exigente ducti primi lateris pretio, itemque ſecundi; mox verò addatur 36, productum ex 12 numero radicum in 3, latus ſecundum vt fiat 1326, quo ſubtracto ex 1612 remanebit 286, cui apponenda eſt figura 8, poſtrema quidem comparationis homogenei diuiſionis gratia, vt fiat 2868.

Ad habendã tertiã figurã.

Ad inueſtigandam tertiam figuram, Sumatur duplum numeri 23, qui vnius, nimirum primæ figuræ munere fungitur, cuius duplum eſt 46, huic addatur 12, numerus Radicum, ita vt 12, antecedat dextrorſum vnius figuræ ſpatio, prout èxigit huius primi lateris pretium, & fiet 472, per quem oportet diuidere 2868, vt fiat quotiens 6, qui ductus in 46, duplum

primæ

Digitized by Google

primæ figura * *facit 276, cui addito 72, nempe producto ex ſecunda figura in 12, facta tamen additione, vt antecedat dextrorſum, vnius figura ſpatio id exigente producto à latere ſecundo in duplum lateris primi, fiet 2832, facta autem huiuſmodi numeri ſubtractione à numero 2868, remanebit 36, à quo ſubtrahere oportet 36, quadratum ex 6, tertia figura nunc adhibita tamquam ſecunda, vt remaneat 0.*

* Sumitur enim 23. tanquam figura vna, nempe prima seu vt latus primum.

Non rarò tamen contingit lateris figuras non eſſe tot, quot puncta, quibus fit numeri ſignatio; ſint igitur vno amplius; in huiuſmodi autem caſu fit deuolutio. Vt ſi foret æquatio huiuſmodi 1 Q ✢ 436 R ⊐ 11040. Deuolutio fieri debet parui facto primo puncto ad reliqua procedendum eſt, quemadmodum in adiuncto paradigmate cernere licet; dum planum affectionis maius eſt quadrato.

Ordinabitur autem analyſis ad eum modum, quo ſupra ſignificauimus, & hic ex adiuncto exemplo videre licebit. In quo, vt coſtat planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine maius eſt Quadrato.

Radix autem eius deprehendetur 24. Puncta autem quadratica, quibus ſignantur figuræ propoſiti numeri 11040, tria ſunt, totidemque vt conſtat, ex generali præcepto, forent puncta ſublateralia in ſingulis figuris deſuper à dextra ad læuam pergendo. Sed vt paruifacto primo puncto, remanent duo puncta quadratica, ita, & duo ſublateralia remanebunt in primo, quorum ad læuam, coefficiens longitudo conſiſtet.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo	4	3 6		Sublateralis.
		.	. .	Tot puncta lateralia, quot quadratica.
	1	1 0	4 0	
	.	.	R .	Puncta quadratica.
	Q I	Q II	Q III	

Quoniam

Quoniam autem 4, maior eſt vnitate, ideò ſit deuolutio.

II. Eductio lateris primi poſt deuolutionem.

b	Coefficiens longitudo	4 3	6	
			. .	Tot puncta lateralia quot quadratica. R 2 4, Q 4: 16 (0 0) Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, la teraue ſingularia.
z pl.	Quadratum reſoluendum	1 1 0	4 0	
		.	R .	Puncta quadratica.
		Q 1	Q 1	
ba	Plana auferenda.	8 7	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.
a^2		4		Quadratum lateris primi.
ba † a^2	Summa planorum ablatitiorum.	9 1	2	
z pl. – ba – a^2	Reliquum reſoluendi afficientis quadrati.	1 9	2 0	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b.	Diuiſorẽ pars ſuperior. } Coefficiens lõgitudo.	4	3 6	
z pl. – ba – a^2	Reliquum reſoluendi afficientis quadrati.	1 9	2 0	
2 a	Diuiſorũ pars inferior. } Duplum lateris primi.		4	
2 a † b	Summa diuiſorum.	4	7 6	
be	Plana ablatitia.	1 7	4 4	A latere ſecundo in coefficientem.
2 ae		1	6	A latere ſecundo in duplum primi.
e^2			1 6	Quadratum lateris ſecundi.
be † 2 ae † e^2 † be = z pl. – ba – a^2.	Summa planorũ auferenda æqualis reliquo reſoluẽdi afficientis quadrat.	1 9	2 0	

SCHO-

SCHOLION.

ADuertendum eſt itaque aliquando contingere, ex vnica figura quæſitam radicem conſtare, & ſi numeri duæ notæ punctis deſignentur; vt ſi ſit æquatio 1 Q ✠ 16 R ⊐ 225. Latus vnica conſtabit figura.

Si namque primam figuram diceremus eſſe 1, eius quadrato ſubtracto ex 2, remaneret 1, non poſſet autem à reliquo numero fieri ſubtractio, vt opus eſt.

Sit æquatio 1 Q ✠ 16 R ⊐ 225. Dicemus faciendam eſſe deuolutionem, de qua ſermo quoque redibit. Propterea paruiſacto primo puncto, per deuolutionem ad ſecundum proceditur; Dicamus ergo latus eſſe 9, eius quadratum 81, ſi ſubtrahatur à 225, vt vides, remanet numerus 144, productum ex 9, latere in 16, numerum radicum, huius ab eo ſubtractione facta, nihil remanet, erit ob id, 1 R, pretium 9.

	9	
1 Q ✠ 16 R ⊐	225	16
	· ·	9
	81	——
	———	144
	144	
	144	
	———	
	000	

Numeroſa Analyſis, in qua Quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataq; coefficiente longitudine.

EGimus de æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine; nunc doctrinæ ordo poſtulat, vt ſermonem inſtituamus de æquatione altera, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere dataque coefficiente longitudine.

Oblata autem æquatio ſit 1 Q — 4 R ⊐ 480.

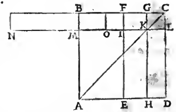
Quandoquidem deprehenditur propoſitæ æquationis affectæ latus eſſe binomium; *Specioſa reſolutio.* atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens longitudo ſit b. comparationis homogeneum ſit z planum latus; ſingulare primum ſit a; ſecundum verò e; ita vt aggregatum ſit a † e, cuius quadratum eſt a^2 † 2 a e † e^2; planum autem de quadrato negatum, eſt b a † b e; ac proindè vt ex ſuo Theoremate conſtat ſi hoc de quadrato negetur, fiet a^2 † 2 a e † e^2 — b a — b e, quod æquabitur z pl. & per Anthiteſin proueniet a^2 † 2 a e † e^2 — b e ⊐ z pl. † b a, & rurſus 2 a e † e^2 — b e ⊐ z pl. † b a — a^2; quod igitur ſupereſt, eſt applicandum ad duplum latus primum minus coefficiente, vt oriatur ſingulare latus ſecundum. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ requiruntur ad propoſitæ æquationis explicationem.

Facta igitur punctorum ſignatione in comparationis homogeneo iuxta quadraticam naturam, punctum primum à dextris incipiendo, cadet ſub o. numeri 480; *Numeroſa reſolutio explicatur.* aliud vero intermiſſa figura vna, cadet ſub 4; Eliciatur igitur ſingulare latus primum ex 4; illudque eſt 2. cumque radix duabus figuris conſtet erit 2. numerus denariorum; atque adeo valebit 20, quo ducto in 4. coefficientem longitudinem fit 80, quo addito ad 480, fit 560, ex quo ſubtracto 400, quadrato ipſius lateris ſingularis primi, remanet 160, numerus applicandus ad 36, exceſſum quo 40, duplum ſingulare latus primum, ſuperat 4, coefficientem, vt oriatur ſingulare latus ſecundum, facta autem applicatione prouenit 4, pro ſingulari latere ſecundo. Si enim ducatur 4, in 4, coefficientem, fit 16, ſi verò 4, ſingulare latus ſecundum ducatur, in 40, duplum ſingulare latus primum, fit 160, cui addito 16, quadrato ſingularis

gularis lateris ſecundi, fit 176, ex quo ſubtracto 16, facto ex latere ſecundo in coefficien tem, remanet 160, numerus æqualis alteri æquationis parti. Ita vt hoc ſubtracto ab illo nihil remaneat.

Hæc autem Geometricè demõſtrari poſſunt.

Demonſtratio Geometrica.

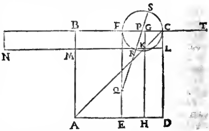


Sit enim quadratum A B C D, cuius latus B C, conſtet ex ſingularibus lateribus B G, G C; ſit autem F C, coefficiens longitudo; itaut F D, ſit planum ſub latare, & coefficiente. Itaque quadratum A B C D, minus rectangulo E F C D, hoc eſt rectangulum A B F E, erit æquale comparationis homogeneo; ſi autem ad A B F E, addatur E I L D, nempè planum ſub latere ſingulari primo, & coefficiente, fiet A B F E, plus E I L D; à quo ſi dempſeris A M K H, quadratum lateris ſingularis primi MK, vel BG, remanebit M B F I, plus H K L D, hoc eſt duplum rectangulum BK, ſeu quod idem eſt, duo rectangula M B G K, & H K L D, plus quadrato K G C L, minus rectangulo I F C L; Hoc autem eſt applicaſſe exceſſum quo gnomon M B C D H K M, ſuperat rectangulum I F C L, applicaſſe inquam ad differentiam inter duplum M K, & I L; itaut excedat quadrato ipſius G C; eſt enim rectangulum M F, plus rectangulo H K L D, exceſſus gnomonis ſupra I C, applicatus ad, differentiam inter M K, plus K H, & F C, excedens quadrato ipſius G C; Quandoquidem intelligatur L M, producta in N; ita vt M N, ſit æqualis M K, ſeu K H, at verò ex N K, ſubtracta O K, æquali ipſi I L, ſeu quod idem eſt, ex M I, ſubtracta O I, æquali ipſi K L, differentia erit N O, ad quam dum applicatur M F, plus K D, hoc eſt plus rectangulo ſub N M, & M B, hoc eſt dum applicetur rectangulum ſub N I, & I F, excedit quadrato O F, ita vt ex huiuſmodi applicatione fiat exceſſus, cuius latus eſt O I, ſeu K L, ſeu G C, ſingulare latus ſecundum. Quod oportebat &c.

Hanc autem apprimè conſentire cum veteri methodo ſic oſtendo.

Oſtenditur hac apprimè cū veteri methodo conſentire.

Sit coefficiens F C; ſitque B C, conſtans ex B G, G C, itaut ſi ad A F, comparationis homogeneum addatur E C, ex aggregato autem auferatur quadratum ipſius B G, cuiuſmodi eſt quadratum A M K H, quod remanet ſit applicatum ad differentiam inter duplam B G, nempè duplum ſingularis lateris primi, & F C, coefficientem longitudinem, excedens exceſſu, cuius latus quadratum ſit G C; Manifeſtum eſt B C, eſſe radicis pretium ex antecedentis conuerſo.



Diuiſa F C, bifariam in P, centro P circulus deſcriptus ſit interuallo, alterutro F R C, ſecta verò ſit F E, in Q, vt F Q, poſſit rectangulum A F, comparationis homogeneum, ducta verò per P, recta S Q; Manifeſtum eſt iuxta veterem methodum rectam S Q, eſſe radicis pretium.

Author id oſtendit in ſpecioſa.

Proximum eſt igitur vt oſtendamus S Q, æqualem eſſe ipſi B C. Intelligatur B C, protracta in T: ita vt C T, ſit æqualis R Q; erit F T, æqualis S Q. Quoniam autem rectangulum C B F, æquale eſt rectangulo S Q R, ** huic verò æquale eſt rectangulum F T C; * * proindè rectangulum C B F, æquale erit rectangulo F T C; quamobrem vt F T, ad B C, ita quidem erit B F, ad C T, & permutando vt F T, ad B F, ita B C, ad C T; atque adeo componendo vt B T, ad B F, ita B T, ad C T, quare B F, C T, erunt inter ſe æquales. Communis autem eſt F C; proinde B C, erit æqualis F T. Sed F T, æqualis eſt S Q, propterea S Q, erit æqualis B C, quod oportebat oſtendere.

** Cum C B F, ſit æquale A F, cui eſt æquale quadratum Q F, & huic æquale eſt C Q R.

** Facto enim C T, eſt æqualis Q R, & R S, æqualis F C, quare F T, æqualis erit S Q, ergo rectangulum F T C, æquale erit rectangulo S Q R.

Sequitur autem reſolutio, iuxta formam conſuetam; ne confuſio ſuboriatur.

Propo-

Propoſita ſit æquatio 1 Q — 8 R = 5 8 5 4 8 Analyſis hoc ſequenti modo ordinabitur iuxta eam, quæ premiſſa eſt *θεωρίαν*.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.		8		Sublateralis	b
		·	· ·	Tot lateralia puncta quot quadratica. ● o o — R 2 4 6 Q 5 7 6: 36 — Tot numerales circuli quot puncta quadratica lateraue ſingularia.	
Quadratum affectum reſoluendum.	5	8 5	4 8	a 2 0 0	z pl.
		·	· ·		
	Q I	Q II	Q III		
Plana proſtaphæretica. { Ablatitium.	4			Quadratum lateris primi.	a^2
Plana proſtaphæretica. { Additium.		1 6		A latere primo in Coefficientem.	b a
Exceſſus planorum ablatitionum	3	8 4			a^2 − b a
Reliquum reſoluendi quadrati.	2	0 1	4 8		z pl. † b a − a^2

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorū pars ſuperior { Coefficiens lōgitudo.				8			b
Reliquum reſoluendi quadrati.	2	0	1	4	8	a † e 2 0 0 † 4 0	z pl. † b a − a^2
Diuiſorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		4					2 a
Exceſſus diuiſorum inferiorum.		3	9	2			2 a − b
Plana ablatitia.	1	6				A latere ſecundo in duplum primi.	2 a e
		1	6			Quadratum lateris ſecundi.	e^2
Summa planorum ablatitiorum.	1	7	6				2 a e † e^2
Planum addititium.			3	2		A latere ſecundo in coefficientem.	b e
Exceſſus planorum ablatitiorum.	1	7	2	8			2 a e † e^2 − b e
Reliquum reſoluendi affecti quadrati.		2	8	6	8		z pl. † b a − a^2 − 2 a e − e^2 † b e

III. Edu-

III. Eductio lateris ſingularis tertij, vt ſecundi.

b

2 pl. † b a ∞ a² &c.

a † e
240 † 6

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiẽs lõgitudo.		8	
Reliquum reſoluendi quadrati.		2 8	6 8	
Diuiſorũ pars inferior.	Duplum lateris primi.	4	8	
Exceſſus diuiſorum.		4	7 2	
Plana ablatitia.		2 8	8	A latere ſecundo in duplum primi.
			3 6	Quadratum lateris ſecundi.
Summa planorum ablatitiorum.		2 9	1 6	
Plannum addititium.			4 8	A latere ſecundo in coefficientem.
Exceſſus planorum ablatitiorum æqualis reliquo reſoluendo quadrato.		2 8	6 8	

SCHOLION.

Breuius tractatur methodus.

HAEC eadem æquatio breuius explicari poteſt methodo ſuperiùs inſinuata. Signatione facta per puncta iuxtà leges numeri quadrati, &c. extrahatur latus quadratum numeri, vſque ad primum punctum à ſiniſtris, cumque numerus, modo occurrens, ad primum illud punctum ſit 5, eius latus quadratum autem ſit 2, ſcribatur 2, numerus ſuprà 5: eius verò quadratum 4, poſitum ſub 5, auferatur ex 5, & remanebit 1; cui annectantur duæ ſequentes figuræ 8, & 5, vt fiat 185. Scribatur autem ſub 185, numerus 16, factus ex multiplicatione 8, numeri radicum in 2, primum latus[a], fiet ſumma 201, cui quidem annectatur ſequens figura 4, diuiſionis gratia, vt fiat 2014.

a. Id exigente huiuſmodi producto.

Ad indagandam ſecundã figuram.

b Id exigẽte primi lateris pretio.

Ad indagandam ſecundam figuram, ſiue ſecundum latus ſingulare, parandus eſt diuiſor hoc modo. Sumatur 4, duplum primi lateris, cui intelligantur annexa duæ cifræ 00,[b] à quo ſubtrahatur 8, numerus radicum, vt remaneat 392, per quem diuiſo 2014, fiet quotiens 4, & ſecundum latus, quod ductum in 8, numerum radicum producit numerum 32, qui additus numero 2014, facit 2046; ſub hoc numero ſcribatur 16, productum à 4, latere ſecundo in 4, duplum lateris primi; ſcribi tamen debet, vt in ſuprà poſito paradigmate vides[c]; & remanebit 446; ſubſcribatur 16, quadratum lateris ſecundi, vt vides[d], factaq; huius ſubtractione, remanet numerus 286, cui intelligatur annexa ſequens figura 8[e], vt fiat numerus 2868.

c Id exigente huiuſmodi producto.
d Id exigente ſecundi lateris pretio.
e Diuiſionis gratiâ.

Paretur modo diuiſor ad indagandam tertiam figuram, nempè ſingulare latus; Intelligatur addi 0, ad 48[f], duplum primi lateris 24 (diximus enim duo illa elicita latera, fungi munere vnius adeò vt hæc tertia figura rationem habeat ſecundi lateris) vt fiat 480, à quo ſubtractus intelligatur 8, vt remaneat 472; inſtituta verò diuiſione per huiuſmodi numerum; hoc eſt diuiſo 2868, per 472, fiet quotiens 6; modo ducatur 6, in

f Id exigẽte primi lateris pretio.

48, duplum

48, *duplum lateris primi fiet* 288, *quo ſubtracto ex* 2916, *ad eum tamen modum, quo factum vides; Id exigente pretio huiuſmodi producti; ſcilicet primi lateris in ſecundum remanebit* 36, *à quo ſubtracto* 36, *quadrato ipſius* 6, *tertia figura, ſiuè lateris ſecundi cum iam illa duo elicita vt dictum eſt fungantur munere vnius, & remanebit* 0.

1 *Q* − 8 *R* = 58548 (root 2 4 6)

```
 2 4 6
58548
.  .  .
4
----
185
 16
----
2014
  32
----
2046
16
----
 446
 16
----
 2868
   48
----
 2916
 288
----
   36
   36
----
   00
```

400
  8
---
392 *Diuiſor primus.*

480
  8
---
472 *Diuiſor ſecundus.*

Sapè ſepiùs autem contingit, vt coefficiens longitudo, pluribus abundet ſingulis figuris, quàm quadratum negatè affectum binis, puncta enim conditionaria in hac æquatione cadunt in ſingulis figuris. Hoc autem argumentum eſt planum coefficiens maius eſſe reſoluendo affecto negatè quadrato. Huiuſmodi verò quadratum Acephalum appellatur. Vt igitur ſit locus diuiſioni, ſiue, vt poſſit diuiſio inſtitui, præponetur mutilo propoſito quadrato ea numeralium circulorum multitudo, vt illud tot puncta quadratica ſibi præfigenda vendicet, quot ſimplices figuras coefficiens longitudo. Prima verò coefficientis longitudis figura pergendo à læua, ad dextram, conſtituetur latus ſingulare primum ipſius reſoluendi quadrati negatè affecti, non immutata alioquin explicata methodo; vt ſi eſſet æquatio 1 *Q* − 320 *R* = 1625; *maius eſt planum* 320 *R, reſoluenda plana magnitudine* 1625; *quoniam coefficiens longitudo* 320, *tribus conſtat figuris; at plano* 1625, *præfiguntur duo tantum quadratica puncta, ob id plano* 1625, *præponetur vnus numeralis circulus, & tunc demum coefficienti, ſedes adijcietur, ipſius verò prima figura, ſi cætera conſentiant, vel proximè maior, aſſumetur ad primum ſingulare latus quadrati propoſiti mutili.*

Cùm eſt quadratum acephalum.

Præcepta ad hanc æquationem explicandam.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem *παρέμπτωσιν*.

I. Eductio lateris primi.

b	Coefficiens longitudo.	3	2 0		Sublateralis.
z pl.	Quadratum reſoluendū acephalum.	0	1 6	2 5	0 0 0
		.	R .	R .	R 3 .2 Q 9 .4 a 300
a²	Plana proſtaphæretica. Ablatitium	9			Quadratum lateris primi.
b a	Additium	9	6 0		A latere primo in coefficientem longitudinem.
b a − a²	Exceſſus additiţij.		6 0		
z pl. † b a − a²	Reliquum reſtituti mutili quadrati.		7 6	2 5	

II. Eductio lateris ſecundi.

b	Diuiſorum pars ſuperior. Coefficiens.		3 2	0	2†e 300†20
				. .	
z pl. † b a − a²	Reliquum reſtituti reſoluendi mutili quadrati.		7 6 .	2 5 .	
2 a	Diuiſorum pars inferior. Duplū lateris primi.		6		
2 a − b	Exceſſus diuiſorum inferiorum.		2 8		
2 a e	Plana ablatitia.	1	2		A latere ſecundo in duplum primi.
e²			4		Quadratum lateris ſecundi.
2 a e † e²	Summa planorum ablatitiorū.	1	2 4		
b e	Planum additium.		6 4	0	A latere ſecundo in coefficientem longitudinem.
2 a e † e² − b e	Exceſſus ablatitiorum.		6 0		
z pl. † b a − a² − 2 a e − e² † b e			1 6	2 5	

Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.

Iam duo elicite latera vnius, ſeu primi munere funguntur, & fit.

III. Eductio

III. *Eductio lateris ſingularis tertij.*

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens longitudo.	3	2 0	Sublateralis
Reliquum reſoluendi affecti quadrati.		1 6	2 5	
Diuiſorum pars inferior.	Duplum lateris primi.	6	4	
Exceſſus diuiſorum inferiorum.		3	2 0	
Plana ablatitia.		3 2	0	A latere ſecundo in duplum primi.
			2 5	Quadratum lateris ſecundi.
Summa planorum ablatitiorum.		3 2	2 5	
Planum addititium		1 6	0 0	A latere ſecundo in coefficientem.
Exceſſus ablatitiorum æqualis reliquo reſoluendo quadrato.		1 6	2 5	

Sublateralis: 0 0 0

R 3 2 5

Q 1 9 2 4 : 2 5

a † e

3 2 0 † 5

z pl. † b a &c.

Numeroſa analyſis æquationis affectæ in qua planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa Quadrati.

Conſideratis duabus; ſpeciebus ex æquationibus quadraticis; ſupereſt tertia, in qua planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa Quadrati. Oblata autem æquatio ſit $80 R - 1 Q = 1344$.

Hæc æquatio eſt anceps duplicem habens radicem; græcè amphibola Deprehenſum cũ fuerit radicẽ eſſe binomiam; atq; adeò è duobus lateribus ſingularibus cõſtare. Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit z pl. latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut aggregatum ſit $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$; *Specioſa reſolutio.*
planum verò ſub latere, & coefficiente data, erit $ba + be$, à quo, ſubtracto quadrato iam dicto, fit $ba + be - a^2 - 2ae - e^2$, quod æquabitur z pl. & per antitheſin vtrinq; addito a^2, & ſubtracto b a, fiet $be - 2ae - e^2 = z \text{ pl} + a^2 - ba$. Quod autẽ ob eſt applicationi, eſt ſubtractionis ἀμφίβολια, vt ſuperiùs eſt adnotatum, vnde prẹſtat ſcribere $be \sim 2ae - e^2 = z \text{ pl.} + a^2 \sim ba$ fieri igitur debet applicatio, vt oriatur ſingulare latus ſecundũ, & quidem ad differentiam inter coefficientem, & duplum latus primum, applicanda eſt differentia inter planum à coefficiente lõgitudine data, in latus ſingulare primum, & comparationis homogeneum auctum quadrato ſingularis lateris primi. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus; quæ requiruntur ad propoſitæ æquationis explicationem. *Numeroſa reſolutio explicatur.*

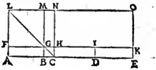
Facta igitur punctorum ſignatione in comparationis homogeneo iuxta quadrati-

eam naturam, punctum primum à dextris incipiendo, cadet ſub 4 figura numeri 1344; aliud verò, intermiſſa figura vna, cadet ſub 3. figura eiuſdem numeri. Eliciatur igitur ſingulare latus primum ex 13, illudque eſt 2, (maius enim aſſumendum non eſt; ſiquidem cætera non conſentiunt ad eliciendam radicem minorem æquationis propoſitæ) & eius quadratum 4, addere oportet ad comparationis homogeneum; quoniam verò radix binomia eſt abſolutè; propterea ſingulare latus primum eſt numerus denariorum; atque adeo 2, valebit 20, cuius quadratum 4, valebit 400, quo addito ad 1344, comparationis homogeneum fit 1744 à quo ſubtrahere oportet 1600, planum factum à latere primo in coefficientem longitudinem, & remanet 144, numerus diuidendus per 40, differentiam inter duplum ſingulare latus primum, & coefficientem, vt proueniat ſingulare latus ſecundum 4. diuiſione inſtituta operi ſuſcepto conſentanea, Ducatur autem 4, ſingulare latus ſecundum in 40, duplum ſingulare latus primum, fit 160, cui addito 16, quadrato lateris ſingularis ſecundi, fit 176, ducto autem eodam 4. latere ſecundo in 80, coefficientem longitudinem, fit 320, à quo ſubtractis 176, remanet numerus 144, quo ſubtracto ex 144, reſiduo iam habito, nihil remanet.

Hæc autem facilè poterunt Geometricè demonſtrari.

Demonſtratio Geometrica quando coefficiens longitudo maior eſt duplo latere ſingulari primo.

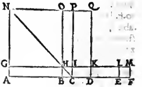
SIt AE, coefficiens longitudo; & AC, ſit radicis valor; conſtituatur ſuper AC, quadratum ALNC, & compleatur rectangulum ALOE; deinde ſit AB, latus ſingulare primum, illudque maius, & ſit BC, latus ſingulare ſecundum; dicatur BM, parallela alterutri rectarum AL, CN, item ducta diametro CL, per punctum interſectionis cum BM, in G, ducatur FK, parallela ipſi AE, erit enim BH, quadratum, quemadmodum FM; at verò quoniam AL, eſt lateris valor, & AE coefficiens; erit AO, planum ſub latere, & coefficiente: & quia eſt R — Q = N; ob id



ex AO, ſubtracto AN, remanebit CO, pro comparationis homogeneo; præcipit autem methodus, vt FM, quadratum lateris primi addatur CO, comparationis homogeneo, vt habeatur planum reſtitutum, cum quadratum lateris primi dicetur planum reſtituens; itaque habebimus duo plana FM, CO, à quibus, vt methodus iubet, auferri debet FO, planum ſub latere primo; & coefficiente longitudine, remanebitque planum applicandum, ſed idem eſt planum FO, ſubtrahere ex planis FM, CO; ac eſt planum GN, ſubducere ex CK, ſunt enim FM, HO, communia; at cum GN, CK, ſint eiuſdem altitudinis, commodiſſimè inſtituetur ſubtractio, ſubducendo GM, ex CE, fiat igitur DE, æqualis GM, & facta ſubtractione, remaneat CD, ducta DI, ad rectos angulos, ſeu parallela rectæ EO, vel CN erit CI, reſiduum applicatum ad BD, differentiam inter coefficientem longitudinem, & duplum lateris primi, defficiens BH, quadrato ipſius BC, lateris ſecundi ſingularis. Quod oportebat &c.

Demonſtratio Geometrica, quando duplũ latus ſingulare primũ maius eſt coefficiente longitudine.

Sit radix AC, coefficiens autem AD, erigatur AN, ad rectos angulos, & æqualis ipſi AC, compleatur rectangulum ANQD; ſit autem AB, latus ſingulare primum, illudque maius; BC, erit minus, & ſecundum; cõpleatur figura, ducta BO, parallela alterutri ipſarum AN, CP; & ducta GK, parallela alterutri AD, vel NQ, itaut tranſeat per H, punctum interſectionis diametri cum BO; erit GO, quadratum ipſius AB, vt BI, ipſius BC, fiat autem CF, æqualis ipſi AB, lateri primo, & ſecetur in E, vt EF, ſit æqualis BC,



compleatur

compleatur rectangulum A G M F. Quoniam A D, eſt coefficiens, A N, eſt radix; erit planum ANQD, comprehenſum ſub latere, & coefficiente: cui ſi ſubtrahatur quadratum A P, remanebit CQ: cui addito G O, quadrato primi lateris, vt methodus præcipit, fit planum reſtitutum, quod ſubtrahendum eſt à G Q, plano ſub latere primo, & coefficiente: hoc autem nil aliud eſt, quàm ſubtrahere CK, ex HP, ſunt enim G O, IQ, communia, & quia CK, H P, ſunt eiuſdem altitudinis, commodiſſimè poterit ſubtractio inſtitui auferendo CD, ex H O, ſeu ex CF, quæ illi facta eſt æqualis, vt remaneat differentia D F, quamobrem reſiduum planum erit DM, applicatum ad DE, differentiam, [a] qua duplum latus primum, ſuperat coefficientem longitudinem; excedens E M, ſeu quod idem eſt B I, quadrato ipſius ſingularis lateris ſecundi B C. Quod oportebat oſtendere.

a. Eſt enim A B, facta æqualis C F, & E F, æqualis B C, ergo A B, erit æqualis D E, quare A E, erit duplũ latus primũ, ſed A D, eſt coefficiẽs ergo D E, erit differentia inter coefficientem, & duplum latus primum.

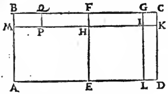
Ex his duabus demonſtrationibus, prima quidem pertinet ad æquationem, in qua coefficiens longitudo maior eſt duplo ſingulari latere primo. Secunda in qua duplum ſingulare latus primum maius eſt ipſa coefficiente longitudine.

Ex ſuperioribus demonſtrationibus, facilè quiſque deprehendet, vnius cuiuſque æquationis explicandæ methodum optimam eſſe.

Cæterùm hæc eadem breuiùs poſſunt Geometricè demonſtrari; Vnde cùm longitudo coefficiens maior eſt duplo ſingulari latere primo, breuiùs eadem oſtendemus; Quando verò duplum ſingulare latus primum maius fuerit coefficiente longitudine, ſuo modo contexi poterit demonſtratio. Quam hic ſtudio breuitatis pretermittam.

Breuiùs oſtenditur idem quando coefficiens longitudo maior fuerit duplo ſingulari latere primo.

Hæc breuiùs Geometricè ſic poterunt oſtendi. Supponamus A D, eſſe coefficientem vt radix ſit E D, conſtans ex duobus ſingularibus lateribus E L, L D. Quadratum autem ipſius E D, ſit E F C D, rectangulum verò ſub coefficiente, & latere vniuerſo erit A B C D, rectangulum ſub coefficiente, & latere ſingulari primo ſit A M K D, rectangulum ſu b coefficiente, & ſingulari latere ſecundo erit M B C K, ſubtracto quadrato E C, ex rectangulo A C,



remanet A F, quod erit comparationis homogeneum; intelligatur P H, æqualis H I, Quoniam igitur ſi ad A B F E, addatur E H I L, quadratum [b] ſingularis lateris primi, fiet A B E H I L A, ex quo ſi dempſeris A K, rectangulum ſub coefficiente, & latere ſingulari primo, remanebit M Q, nam P F, eſt æqualis L K, ergo remanebit M Q, reſiduum autem M Q, eſt applicatum ad B Q, plus G C, nempe ad differentiam inter B C, coefficientem, [c] & QG, duplum latus ſingulare primum, deficiens quadrato I C, cuius latus G C, eſt ſingulare latus ſecundum.

b. Supponuntur enim E I, I C, facta eſſe quadrata &c.

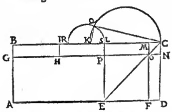
c. eſt enim B C, æqualis A D, & F C, æqualis E L & G C, æqualis L D, ex Elementis.

Hæc autem apprimè conſentire cum veteri methodo ſic oſtendo.

Sit coefficiens B C, & ſit LC, conſtans ex L M, M C, ita vt ſi, ad A B L E, addatur E O, quadratum ex L M, & ex aggregato auferatur A G N D, quod remanet applicatum ad, differentiam inter duplum L M, nempe I M, & B C, ſcilicet ad B I, plus M C, deficiat quadrato, cuius latus ſit M C, ipſa quid em L C, erit radicis pretium, & A L, erit comparationis homogeneum &c. ex ante cedentis concurſo.

Apprimè conuenire cum veteri methodo demonſtratur.

Intelligatur B C, diuiſa bifariam in K, & ſupra K C, deſcriptus ſit ſemicirculus K Q C, in quo aptata ſit Q C, quæ poſſit A L, comparationis homogeneũ. Ducta verò ſit K Q. Centro autem K, ad interuallum K Q, deſcriptus ſit ſemirculus ſecans B C, in R, & S. Dico punctum S, congruere puncto L.

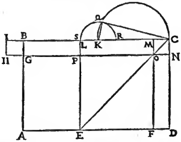


Quando

Quando quidem rectangulum R C S, æquale eſt[a] quadrato Q C, ſed quadratum Q C, æquale eſt[b] rectangulo A L, proinde rectangulum RCS, erit æquale rectangulo A L. Sed rectangulum R C S, æquale eſt rectangulo B S C, ob id rectangulum B S C, æquale erit rectangulo A L; at rectangulo A L, eſt æquale rectangulum B L C; ergo rectangulum B S C, æquale erit rectangulo B L C; quare punctum S, congruet puncto L; quod erat operę pretium oſtendere.

a. 36. ter.

b. ex conſtructione.



Suo modo etiam in ſecundo ſchemate. Si ad ABLE, addatur EO, & aggregatum auferatur ex A G N D, quod ſupereſt applicatum ad B I, minus M C, differentiam inter duplum latus primum, & coefficientem, vt excedat quadrato cuius latus ſit MC; Ipſa quidem L C, erit radicis pretium &c.

Suſcepto operi eſſentiam applicationis declaramus. Ea autem eſt quæ fit cum exceſſu, vel cum defectu, prout æquatio expoſcit. In hac pragmatia cautè procedere debet Analyſta, ne decipiatur.

In prima ſpecie æquationis quadratæ, itemque in ſecunda, applicatio fit cum exceſſu. In tertia, modo cum defectu, modo cũ exceſſu, prout duplũ ſingulare latus maius ſuperatur vel ſuperat coefficientem longitudinem.

Vt cum quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataq; coefficiente longitudine; reſiduum applicatum ad aggregatum ex duplo latere primo, & coefficiente; eſt excedens quadrato lateris ſecundi. Vt etiam cum quadratum afficitur multa plani, ſub latere, dataque coefficiente longitudine, reſiduum applicatum ad duplum latus primum, minus coefficiente longitudine, excedit quadrato, cuius latus eſt ſingulare latus ſecundum. Ita cum planum ſub latere, dataq; coefficiente longitudine afficitur multa quadrati; Aliquando differentia planorum applicata ad differentiam diuiſorum eſt deficiens; aliquando eſt excedens quadrato, cuius latus eſt ſingulare latus ſecundum.

In prima igitur æquationis ſpecie, rectè Methodus præcipit ad indagandum ſingulare latus ſecundum applicationem fieri quemadmodum dictum eſt, vt nimirum planum applicatum ſit excedens. In ſecunda itidem ad ſecundum ſingulare latus indagandum, vt planum ſit excedens; In tertia, ad idem, vt vel ſit deficiens, vel excedens, prout æquationis conditio requirit &c.

Propterea nos aliàs diximus ad eliciendum ſingulare latus ſecundum cautè procedendum eſſe, in prima ſiquidem æquatione reſiduum eſt applicandum ad aggregatum ex duplo latere ſingulari primo, & coefficiente longitudine, ita vt excedat quadrato cuius latus ſit id, quod aſſumitur pro ſingulari latere ſecundo; in ſecunda eſt applicandum ad duplum latus ſingulare primum minus coefficiente longitudine, ita vt excedat eodem modo &c. In tertia eſt applicanda differentia inter planum a coefficiente longitudine, in latus ſingulare primum, & comparationis homogeneum, auctum quadrato ſingularis lateris primi, ad differentiam inter duplum latus ſingulare primum, & coefficientem longitudinem. Sed modò applicatio eſt cum defectu, modò autem cum exceſſu; Proinde in ſuperioribus Schematibus ad tertiam hanc æquationis ſpeciem quod attinet; eſt coefficiens A E; lateris primi duplum eſt A B, plus D E, quamobrem differentia erit B D, ad quam oportet applicare reſiduum C I: vt facta applicatione, oriatur C H, ſeu B C, latus ſecundum; ſi ea cautela ſeruetur in eligendo latere ſecundo, vt nimirùm quadratum ipſius, plus plano, quod ſub ipſo, & duplo latere primo continetur, ſi ſubtrahatur à plano ſub coefficiente, & latere ſecundo, remaneat plano applicatum ad differentiam, qua coefficiens ſuperat duplum latus primum, deficiens tamen B H, quadrato ipſius B C, aſſumpti pro latere ſecundo. Et hoc quando coefficiens maior eſt duplo latere ſingulari primo.

Quando duplũ latus primũ eſt maius coefficiente in æquationibus quadraticis amphibolis.

Quando autem duplum ſingulare latus primum maius eſt coefficiente longitudine, eſt autem coefficiens A D, & A B, eſt latus ſingulare primum, cui facta eſt æqualis CF, cumque E F, facta ſit æqualis BC, erit BE, æqualis CF; vt, & A C, itaque A E,

Quando duplu latus primũ eſt minus coefficiente in ijſdem æquationibus quadraticis amphibolis.

A E: erit duplum latus primum inter quod, & A D, coefficientem, differentia erit DE, ad huiuſmodi verò differentiam ſi applicetur D M, ea lege, vt methodus præſcribit, vt lateris ſecundi quadrato, addito ad illud planum, quod ſub ipſo, & duplo latere primo continetur, fiat planum, à quo ſubtracto eo, quod ſub ipſo latere ſecundo, & coefficiente continetur, reſiduum ſit applicatum ad differentiam D E; excedens E M, quadrato ipſius E F, hoc eſt B I, quadrato ipſius B C, ſingularis lateris ſecundi.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν ad indagandam radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	1 0	4	Sublateralis	b
		. .	Tot pũcta lateralia quot quadratica. ● ○ R 3 6, Q 9: 36. Tot numerales circuli, quot quadratica pũcta, lateraue ſingularia.	
Planum ſublatere multatum lateris reſoluẽdi quadrato.	2 4	4 8		Z pl.
	.	R .	Puncta quadratica. 2 / 3 0	
	Q 1	Q 11		
Planum reſtituens.	9		Quadratum lateris primi.	a^2
Planum reſtitutum.	3 3	4 8		z pl. † a^2
Planum principale minuẽs.	3 1	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.	b a
Exceſſus plani reſtituti, reliquumue reſoluendi auulſi quadrati.	2	2 8		z pl. † a^2 − b a

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior { Coefficiens.	1	0 4 .		b
Reliquum reſoluendi quadrati auulſi.	2	2 8 .	a † e / 3 0 † 6	z pl. † a^2 − b a
Diuiſorũ pars inferior. } Duplũ lateris primi.		6 0		2 a
Exceſſus diuiſorum ſuperiorũ.		4 4		b − 2 a
Plana ablatitia. {	3	6	A latere ſecundo in duplum primi.	2 a e
		3 6	Quadratum lateris ſecundi.	e^2
Summa planorum addititiorum.	3	9 6		2 a e † e^2
Planum ablatitium.	6	2 4	A latere ſecundo in coefficientem longitudinem.	b e
Exceſſus plani ablatitij æqualis reſiduo reſoluendo quadrato.	2	2 8		b e − 2 a e − e^2 = z pl. † a^2 − b a

Ordina-

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi,

b	Coefficiens longitudo.	1 0	4	Sublateralis.
			. .	Tot pūcta lateralia, quot quadratica. — o o / R 6 8 / Q 3 6 64 — Tot numerales circuli, quot puncta quadratica laterale ſingularia.
z pl.	Planum ſub latere multatum lateris reſoluendi quadrato.	2 4	4 8	
		.	R.	Puncta quadratica. — 2 / 60
		Q 1	Q 1 1	
a^2	Planum reſtituens.	3 6		Quadratum lateris primi.
z pl. † a^2	Planum reſtitutum.	6 0	4 8	
b a	Planum principale minuendum.	6 2	4 0	A latere primo in coefficientem.
b a − z pl. − a^2	Exceſſus plani, reliquumue reſoluendi quadrati.	1	9 2	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b	Diuiſorū pars ſuperior. } Coefficiens	1	0 4	a † e / 60 † 8
			.	
b a − z pl. − a^2	Reliquum reſoluendi quadrati.	1	9 2	
			.	
2 a	Diuiſorū pars inferior. } Duplum lateris primi.	1	2 0	
2 a − b	Exceſſus diuiſorum inferiorum.		1 6	
2 a e	Plana ablatitia. }	9	6	A latere ſecundo in duplum primi.
e^2			6 4	Quadratum lateris ſecundi.
2 a e † e^2	Summa planorum ablatitiorum.	1 0	2 4	
b e	Plannum additiuum.	8	3 2	A latere ſecundo in coefficientem
2 a e † e^2 − b e = b a − z pl. − a^2	Exceſſus ablatitiorū, æqualis reſiduo quadrato aulſo.	1	9 2	

Æquatio

Æquatio igitur illa 104 R — 1 Q ⊐ 2448; Analyticè fuit à nobis tractata, vt ſupra ad indagandam radicem minorem 36, & maiorem 68. Si quæ ſuperſunt autem ad has æquationes attinentia; mox afferemus.

SECTIO II.

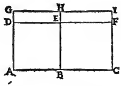
Alia quædam traduntur ad ſupra poſitas æquationes attinentia.

IN hac æquatione habita radice minori, facilè poſſumus maiorem aſſequi. Nimirum diuidendo numerum comparationis homogeneum per radicem minorem inuentam, hac enim inſtituta diuiſione, radix orietur maior. Vt ſit 80 R — 1 Q ⊐ 1344; cuius radix minor eſt 24. Si 1344, diuidamus per 24, radicem minorem, fiet quotiens 56, radix maior. Item ſi ſit 80 R — 1 Q ⊐ 1404, cuius radix minor eſt 26; diuiſo numero 1404, per 26, radicem minorem, orietur quotiens 54, & radix maior. Præterea ſi ſit 216 R — 1 Q ⊐ 7308, cuius radix minor eſt 42; Diuiſo 7308 per 42, radicem minorem, orietur 174 radix maior. Denique ſint 104 R — 1 Q ⊐ 2448, cuius radix minor eſt 36, Diuiſo 2448, per 36, radicem minorem, orietur 68, radix maior. *Habita radice minori, quo modo maior indagatur; in æquationes, amphibola.*

Eandem radicem aſſequemur quoque, ſi inuentam radicem minorem, ſubtraxerimus à coefficiente: itaque in priori exemplo, cum eſſet æquatio 80 R — 1 Q ⊐ 1344, inuenta minor radix 24, ſi ſubtrahatur ex 80, remanet 56, pro radice maiori. Et in ſecundo exemplo, cum eſſet æquatio 80 R — 1 Q ⊐ 1404, inuenta minor radix 26; ſi ſubtrahatur ex 80, relinquitur 54, pro radice maiori. Inſuper in tertio exemplo, cum eſſet æquatio 216 R — 1 Q ⊐ 7308; ſit radix minor 42, quæ ſubtracta de 216, relinquit 174; pro radice maiori. Demum cum eſſet æquatio 104 R — 1 Q ⊐ 2448; erat minor radix 36, ſubducta à coefficienti 104, relinquit 68, pro radice maiori. Id quod de reliquis intelligendum. *Idem aliter.*

Qualibet ex his æquationibus quadraticis, duplicem habet radicem, pro multitudine dimenſionum, quibus earum poteſtas prædita eſt. Sed affirmatiua, vt, & negatiua, vnam habet veram, aliam verò falſam. Ambigua autem vtramq; veram habet. *Qualibet ex his æquationibus duas habet radices.*

Hæc autem Geometricè, facilè oſtendi poſſunt: ſit enim coefficiens A C, latus minus A B; ſitque conſtructa figura, vt vides, eum A E, ſit quadratum lateris minoris A B, & A F, ſit planum ſub latere, & data coefficiente, erit B F, comparationis homogeneum; hoc autem applicato ad B E, ſeù A B, fit B C, latus maius; nam B I, quadratum ex B C, (ita enim figura ſuppono deſcriptam) ſi ſubtrahatur ex A I, quod erit planum ſub latere maiori, & coefficienti, relinquit A H, quod eſt æquale ipſi B F; quandoquidem compræhenditur ſub lateribus A B, A G, quæ æqualia ſunt lateribus B E, B C, ſub quibus B F, continetur. Hinc etiam patet, quod ſecundo loco dicebamus, nempè ſi ab ipſa coefficiente ſubtrahatur latus minus, remanere latur maius, &c. *Geometricè oſtenditur indagatio radicis maioris habita minori.*



Compendioſiùs hoc ſuperiori modo. Sumendus eſt numerus cuius quadratum, ſi ſubtrahatur à numero producto ex multiplicatione quæſiti numeri in numerum datum, remanet numerus, à quo ſi ſubtrahatur productum ex dato numero in numerum quæſitum, nihil remanet, & procedatur imitationis ſupradictorum.

SCHOLION.

Quadraticarum æquationum, ad ſimplices reductio.

ILlud porrò inficiari non licet; vtiliſſimum eſſe ſupradictas æquationes affectas ad ſimplices reuocare, cum in harum explicatione nullus ferè ſit labor; quamuis enim æquatio illa, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, nullo fere negotio explicetur; tamen duæ reliquæ nonnihil negotij faceſſunt Analyſtæ contendenti generali methodo tradita explicare, quod cuique ex hactenus dictis perſpicuum eſſe poteſt; Si verò libet illas ad ſimplices reuocare præter ſuperiùs dicta, & infra ſuo etiam loco dicenda breuiter hæc ſubijciam.

Propoſita ſit æquatio, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine.

Effinge propoſitæ æquationis latus auctum coefficientes longitudinis dimidio; eſſe e, *huiuſmodi effecte lateris quadratum* e^2, *æquabitur comparationis homogeneo, plus quadrato à dimidio coefficientis longitudinis, quod in Speciosa oſtendemus.*

Ex quo facilè intelliges, latus, quod poteſt comparationis homogeneum, plus quadrato à coefficientis longitudinis dimidio: multatum dimidio coefficientis eſſe propoſitæ æquationis radicem.

Æquatio Cataphatica.

Sit æquatio $1\,\mathcal{Q} + 12\,R = 640$. *Sume 6, dimidium coefficientis, & eius quadratum 36, adde ad 640, vt fiat 676, à cuius latere quadrato 26, ablato 6, dimidio iam dicto, & remanebit 20, pro radice æquationis propoſitæ.*

Propoſita ſit æquatio, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, datoque coefficiente longitudine.

Effinge propoſitæ æquationis latus multatum dimidio coifficientis longitudinis eſſe e, *huiuſmodi enim reſidui effecti lateris quadratum* e^2, *æquabitur comparationis homogeneo plus quadrato à dimidio coefficientis longitudinis, quod in Speciosa oſtendemus.*

Ex quo facilè intelliges, latus, quod poteſt comparationis homogeneum, plus quadrato à coefficientis longitudinis dimidio eſſe propoſitæ æquationis radicem.

Æquatio apophatica.

Sit æquatio $1\,\mathcal{Q} - 12\,R = 160$, *ſume 6, dimidium coefficientis, & eius quadratum 36, adde ad 160, vt fiat 196, ad cuius latus quadratum 14, addito dimidio iam dicto 6, fit 20, pro radice æquationis propoſitæ.*

Propoſita ſit æquatio, in qua planum ſub latere, dataq; coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

Effinge latus quoddam, e, *quo quidem ſubtracto, ex ipſius coefficèentis longitudinis dimidio, vel eidem addito, fiat radix æquationis propoſitæ; eius enim quadratum* e^2, *æquabitur exceſſui, quo quadratum à dimidio coefficientis longitudinis ſuperat comparationis homogeneum, quod in Speciosa oſtendemus.*

Ex quo facilè intelliges, latus, quod poteſt quadratum à dimidio coefficientes longitudinis, minus comparationis homogeneo, ſubtractum ex dimidio longitudinis coefficèentis, vel eidem additum, efficere radicem æquationis propoſitæ.

Æquatio amphibola.

Sit æquatio $20\,R - 1\,\mathcal{Q} = 96$, *quadratum a dimidio coefficientis eſt 100, à quo ſubtracto 96, remanet 4, cuius latus additum, vel ſubtractum ex 10, dimidio coefficientis longitudinis fit 12, vel 8, è quibus vterque eſt radix æquationis propoſitæ.*

Sæpè contingit vt duplum latus ſingulare primũ ſit minus coefficiẽte, ſiue radix ſit minor, ſiue maior.

Sæpè contingit in æquatione Amphibola; vt ſiue radix ſit minor, ſiue maior ſingulare latus primum duplum ſit minus coefficiente longitudine, vt ſi ſit $110\,R - 1\,\mathcal{Q} = 3024$; *cuius radix minor eſt 54, maior autem 56; & vtriuſq; duplum latus ſingulare primum eſt minus coefficiente 110. In hoc pleriq; allucinati ſunt; de applicatione ad ſingulare latus ſecundum indagandum, loquentes.*

Sedes cherurtes, quæ debentur numeris comparantur Analyſi.

Cæterùm illud aduerte; cum ſupra diximus numeri alicuis notas ita, vel ita in ſubtractione, vel additione diſponi debere, id exigente, lateris primi pretio, vel alicuius producti valore, vel numeri, exigentia naſcitur à pretio, pretium, à notarum vel ciſrarum multitudine, quæ intelligenda eſt ſubſequi ad notam, vel notas propoſitorum numerorum; at ad maiorem elegantiam ciſræ prætermittuntur ſubintelligi tamen debent. Vnde ſi latus ſingulare primum eſt 2, at verò ſubintelligantur 0, 0, iam in ſubtractione, vel additione ſedem ſibi vendicabit, non ſecus ac ſi foret 200; cum reuera eius valor ſit 200. Ita ſi ducatur illud in coefficientem exempli gratia 8; fit 16; ſed hic in additione vel ſubtractione vendicat ſibi ſedem debitam numero 1600: cum duo numerales circuli intelligi debeant figuram 2, comitari. Sedes autem Analyſis dictat.

De

De explicandis æquationibus affectis, in quibus terminorum exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionem, & primò de æquationibus Cubicis.

CAPVT XVI.

Non eſt cur hìc immoremur in recitandis aliorum quidem modis, quibus has explicant æquationes; etenim ex dictis de æquationibus quadratis, comprehendi facilè poteſt: qua arte praxis in explicatione harum æquationum inſtitui debeat. Mirum eſt autem quantum ingenia Veterum hæc æquationum genera vexauerint; & quantum hac in re Mathematici ſummæ æruditionis deſudauerint. Dabimus tamen operam, vt omnia explicata reddantur. Interim maioris doctrinæ gratia, primò quorumdam modum ac methodum afferemus; poſtmodum Analyſin inſtituturi. Cæterùm cùm fractiones numerorum in huiuſmodi æquationibus interceſſerint; itemque cùm æquationes ipſæ numeris aſymmetris fuerint inuolutæ, poſtea nobis futurus eſt ſermo. Res magni momenti eſt in Arte, nec exigui laboris; conabimur tamen huiuſmodi æquationes quomodocumque ſe habentes, explicare.

Auctor ſe abſtinet à recenſendis quorūdam aliorum methodis.

Methodus iſta non, indiget noua explicatione, præter ſuperiùs allatam; proinde ſtatim ad exemplum accedam.

Gherardi methodus explicatur.

EXEMPLVM.

1 C ⊐ − 8 R ✠ 264.

1	—	264	6	—	44
2	—	132	8	—	33
3	—	88	12	—	22
4	—	66			

Partes aliquotæ numeri 264; ſunt hæ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 22, 33, 44, 66, 88, 132, 264; quibus ordinatis ſic, vt binæ inter ſe ductæ faciant 264, vt vides; diuidatur vtraque pars æquationis per 1 R, & fiet depreſſio ad proximum inferiorem gradum hoc modo 1 Q ⊐ − 8 ✠ $\frac{264}{1 R}$, & fit 6, 1 R, pretium.

Explicatur ſuperior doctrina.

Hoc eſt ſi numerus 8, ſubtrahatur alicui ex partibus aliquotis numeri abſoluti 264, remanet quadratum quæſitæ radicis, ea tamen eſt eligenda pars aliquota, cui ſi auferatur numerus 8, remaneat quadratum alterius partis coefficientis correlatæ. Vt in hoc noſtro exemplo cuilibet cernere licet: ſi namque ſubtraheremus 8, à 264, remaneret numerus 256, quem haud eſſe quadratum, ipſius 1, partis nimirum alterius coefficientis correlatæ manifeſtum eſt. Idem continget ſi ſubducatur idem numerus 8; reliquis partibus 132, 88, 66; At ſecus ſi ſubducatur à 44; etenim facta ſubtractione, remanebit numerus 36, qui quidem eſt quadratum numeri 6; nempè alterius partis coefficientis correlatæ. Hoc autem pacto contenderunt.

E dato in numeris Cubo affecto adiunctione ſolidi ſub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere,

SECTIO I.

Numeroſa Analyſis æquationis in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

OBlata autem æquatio ſit 1 C ✠ 20 R = 51393.

Quandoquidem deprehenditur propoſitę ęquationis affectę latus vniuerſum binomium eſſe, atque adeò è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit z ſol. latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit a † e, cuius cubus eſt $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$, ſolidum autem afficiens erit b pl. a † b pl. e, quo addito ad cubum prædictum fiet $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3 \dagger$ b pl. a † b pl. e, quod æquabitur z ſol, & per antitheſin fiet $3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3 \dagger$ b pl. e = z ſol. $- a^3 -$ b pl. a. Hunc autem in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Specioſa reſolutio.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, vt infra.

Sit iniunctum, latus cubicum extrahere ex hac æquatione; in qua nimirum eſt 1 C ✠ 20 R = 51393.. Cubus eſt affectus, quæritur numerus, qui ductus in ſui quadratum, & in 20, faciat 51393. Numerus autem 51393, non eſt purus cubus; ſed affectus adiunctione ſolidi, ſub latere, & dato plano 20. Geneſis affecti cubi, hoc tantùm addit geneſi cubi puri, vt ſingulare latus, quod primùm elicitur ducatur in planum coefficiens. Deinde in idem planum etiam ducatur ſecundum latus.

Numeroſa analyſis explicatur.

Ad elicienda verò latera ex affecto huiuſmodi cubo fieri debet per puncta figurarum ſignatio, quemadmodum in analyſi puri Cubi nos adnotauimus; ideſt ſedes vnitatum cubos ſingulares metientium per ternas alternas figuras diſtinguentur punctis ſubtus à dextra ad læuam adnotatis; hoc eſt vna ſignata figura, duæ prætermittantur. His autem peractis, quot ſunt cuborum ſedes, punctaue; tot ſedes ſimplicium laterum (cum planum coefficiens ſublaterale ſit) ſupra ſingulas figuras conſtituentur; punctiſq; poſitis diſtinguentur. Aduertendum autem in vltima ſimplicium ſede, quæ prima eſt à læua ad dextram procedendo, conſiſtere planum coefficiens; quòd ſi pluribus, quàm vna figura conſtaret, reliquæ figuræ in anteriora prorumpent. His autem abſolutis, eliciantur latera, quemadmodum agentes de analyſi puri cubi docuimus; hoc addito, quod ipſum planum coefficiens in numerum diuiſorum adſcribendum eſt. In illud autem ducenda ſunt ſingularia latera, atque ſolidum, quod inde fit, ſub ſede ipſius coefficientis deſinere debet; illudque auſerendum eſt, ex affecto cubo propoſito, Coefficiens autem in loca ſuccedentia ordinatim ſubijciatur, diuiſoreſque ſubtus etiam moueantur; quemadmodum ex adiunctis paradigmatibus colligere licet.

Nota diligenter circa electionem diuiſoris.

Plerumque contingit, vt in huiuſmodi æquationibus, quarum poteſtas plurium, quam duarum eſt dimenſionum, radix pluribus, quam duobus ſingularibus lateribus conſtet; & quamuis ſemper tractentur tanquam duo, vt ex ſupra poſitis theorijs perſpicuum eſt, nihilominus, in eligendo diuiſore, Analyſtarum plerique, ſi exempli gratia ſermo ſit de æquationibus cubicis, triplum ſingulare latus primum, vt collocent, in ſede radici addicta, promouent ſiniſtroi ſum vnius figuræ ſpatio; vnde fit vt cum alioquin numerus ille eſſet centenariorum, euadat millenariorum. Sed hoc incrementum, non multum iuuat pragmatiam, præter quam quod ex Theoria deprehenditur triplũ illud retinendum eſſe eiuſdem pretij in Analyſi, ac eſt in Syntheſi; atque adeo diuiſores omnes ad idem punctum omnino terminari.

Ordina-

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.		2 0	Sublaterale	b pl.
		. .	Tot puncta laterũ ſimpliciũ, quot cubica, ſed eſue cuborum. Puncta cubica. — o o; R 3 7; Q 9. 49; C 27: 343 — Tot numerales circuli, quot pũcta cubica, lateraue ſingularia.	
Cubus affectus reſoluẽdus.	5 1	3 9 3		z ſol.
	.	Q R.		
	C 1	C 1 1		a^3
Solida in primis auferenda.	2 7		Cubus lateris primi. a 30	
		6 0	A latere primo in coefficiens planum.	b pl. a
Summa ſolidorum ablatiorum.	2 7	6 0		a^3 † b pl. a
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	2 3	7 9 3		z ſol. – a^3 – b pl. a.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior: Coefficiens planũ.		2 0		b pl.
		.		
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	2	3 7 9 3	a † e / 30 † 7	z ſol. – a^3 – b pl. a.
Diſorum pars inferior: Triplũ quadratũ lateris primi.		2 7		3 a^2
Triplũ latus primum.		9		3 a
Summa diuiſorum.		2 8 1 0		3 a^2 † 3 a † b pl.
Plana ablatitia.	1	8 9	A latere ſecundo in quadratum triplum lateris primi.	3 a^2 e
		4 4 1	A quadrato lateris ſecundi in triplum lateris primi.	3 a e^2
		3 4 3	Cubus lateris ſecundi.	e^3
		1 4 0	A latere ſecundo in coefficiens planum.	b pl. e
Summa ſolidorum æqualis reliquo reſoluẽdo cubo affecto.	2	3 7 9 3		3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e = z ſol. – a^3 – b pl. a.

Propoſita

Explicatur re[illegible] [illegible] [illegible] ſingularium [illegible] a dextris ad læuam.

Propoſita ſit æquatio 1 C ✠ 34 R ═ 1471455, ſubtus adnotatis punctis, vt vides per ternas alternas figuras, ſedes vnitatum metientium ſingulares cubos diſtinguuntur quot autem ſunt hæc puncta ſubtus adnotata, nempe tria, tot ſupra etiam adnotanda ſunt per ſingulas figuras; ex illis autem primum cadit ſub 5, prima figura ad dextrã, deinde duabus prætermiſſis, aliud ſub 4, quarta figura; deniq; aliud eadẽ lege ſub 4, ſeptima figura. Supra puncta verò, cadunt in 5, 5, 4. continuatim, vt vides. At verò 34, eſt coefficiens planum, quod conſiſtit in vltimo puncto pergendo a dextra ad læuam. Tria illa puncta ſuperiùs poſita, dicuntur puncta ſimplicium laterum; quoniam coefficiens eſt planum ſublaterale. Si planum illud pluribus figuris conſtet, quàm vna; reliquæ figuræ prorumpere debent in anteriora, vt hic vides ad læuam prorumpentem figuram 3, numeri 34; conſtantis duabus figuris 3, & 4; latera verò elicientur, vt in analyſi puri cubi; priùs enim elicitur latus cubicum 2, ex 14, numero ſignato per punctum inferiùs; huius cubus eſt 8, qui notari debet ſub eodem puncto; adeo vt ſi pluribus, quàm vnica figura conſtaret, prorumpat in anteriora; debet enim deſinere ſub ipſo puncto; deinde hoc primũ latus 2, ducatur in coefficiẽs planum 34. vt fiat 68; & ſolidũ hoc factũ notetur ſubtus deſinẽs ſub coefficiente, vt ſubtractione inſtituta ex 8, cum quatuor cifris annexis, vt ex 80000, remaneat 80068. hoc autẽ numero ſubducto ex numero 147144 1. remanet 67076. huic annexis duabus poſtremis figuris 5, 5, fit numerus 6707655. Nunc fit tranſitus ad ſuccedentia puncta, moto coefficiente plano in ſuccedens punctũ. Inſtituitur autem eductio ſecundi lateris, ad quod indagãdum paratur diuiſor, ſumendo triplum quadratum lateris primi 2, nempe 12; vt diximus in generalibus præceptis; noteturq; ſic; vt deſinat ſub ſede quadrati notata per Q: ſumatur triplum eiuſdem lateris ſcribaturq; ſic, vt deſinat ſub ſede lateris notata per R; numerus, autem 34, coefficiens planũ è diuiſoribus eſto; noteturq; ſua ſede, vt vides, adeo vt deſinat ſub puncto ſimplicium laterum, in quo coefficiens planum conſiſtit; & ſit ſumma diuiſorum 126034, atq; diuiſor ipſe; per quem diuiſo numero 6707655, fit quotiens 4. Solida verò notantur ſeruato ordine, vt vides, & ſubtrahuntur, remanetq; 882295. Modo inſtituenda eſt eductio lateris tertij, non ſecus ac factum fuit ad indagandum ſecundum; ſiquidem duo illa latera elicita, vnius vice, munereque funguntur. Paratur diuiſor non diſſimili artificio, moto coefficiente in ſuccedens punctum. Mouentur, & alij diuiſores identidem, atque notantur, ſeruata debita lege; diuiſore parato, atque reperto quotiente, ſolida notantur, & auferantur, vt vides.

Inſtituetur analyſis autem hunc in modum iuxta eam, quæ præſſa eſt *exemplar*.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b pl.	Coefficiens planum.		3	4	Sublaterale.	
				. . .	Tot puncta laterum ſimpliciũ, quot cubica ſedesue cuborum	0 0 0 / R 2 4 / Q 4 1 6 / C 8, 6 4 / a / 200 — Tot numerales circuli, quot puncta cubica, lateraue ſingularia.
z ſol.	Cubus affectus reſoluendus.	1 4	7 1 4	4 5 5		
		.	Q R .	Q R .	Puncta cubica.	
		C 1	C 1 1	C 1 1		
a³	Solida in primis auferenda.	8			Cubus lateris primi.	
b pl. a			6	8	A latere primo in coefficiens planum.	
a³ † b pl. a	Summa ſolidorum ablatiuorum.	8	0 0 6	8		
z ſol. − a³ ═ b pl. a.	Reliquum reſoluendi cubi affecti,	6	7 0 7	6 5 5		

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior. } Coefficiẽs planum.			3 4 . .		b pl.
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	6	7 0 7	6 5 5	a † e 200 † 40	z ſol. − a^3 − b pl. a.
Diuiſorum pars inferior. { Triplũ quadratum lateris primi.	1	2			3 a^2
Diuiſorum pars inferior. { Triplum latus primũ.		6 0			3 a
Summa diuiſorum.	1	2 6 0	2 4	Diuiſores ſuis ſedibus collocentur.	3a^2 † 3a 0, † b pl.
Plana ablatitia.	4	8		A latere ſecundo in quadratum triplum lateris primi.	3 a^2e
		9 6		A Quadratum lateris ſecundi in triplum latus primum.	3 ae^2
		6 4		Cubus lateris ſecundi.	e^3
		1	3 6	A latere ſecundo in coefficiens planum.	b pl. e
Summa planorũ auferenda.	5	8 2 5	2 6		3 a^2e † 3 ae^2 † e^3 † b pl. e.
Reliquũ reſoluendi cubi affecti.		8 8 2	2 9 5		z ſol. − a^3 − b pl. a − 3 a^2e − 3 ae^2 − e^3 − b pl. e

Iam duo elicita latera, vnius vice funguntur.

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur.

III. Eductio lateris ſingularis tertij, vt ſecundi.

b pl.	Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiēs planum.		3 4	o o •
				•	R 2 4 5 Q 5 7 6 25 C 13824: C 125
z ſol. = a' &c.	Reliquum reſoluendi cubi.		8 8 2	2 9 5	
	Diuiſorum pars inferior.	Triplum quadratū lateris primi.	1 7 2	8	a † e 240 † 5
		Triplum quadratus primum.		7 2	
	Summa diuiſorum.		1 7 3	5 5 4	
	Solida ablatitia.		8 6 4	o	A latere ſecundo in quadratum triplum lateris primi.
			8 8	o o	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
				1 2 5	Cubus lateris ſecundi.
				1 7 o	A latere ſecundo in coefficiens planum.
	Summa ſolidorum auferenda æqualis reſiduo reſoluendo cubo affecto.		8 8 2	2 9 5	

Nota circa diuiſores. Hic autem adnotandum occurrit, quod obiter ſuperiùs tetigimus, tamenſi enim, ex Specioſa analyſi, ęgrè deprehendatur ſedes diuiſorum, atq; adeo, non pateat inde debita ſedes triplo lateri primo; cùm radix vniuerſa cubicarum æquationum, ex pluribus, quàm duobus ſingularibus lateribus conſtat, & ſi vt binomia tractetur, Numeroſa tamen deſignat, cui nimirum hic parodicus gradus eſt addictus. Quod vt etiam ex Specioſa innoteſcat, præſtat, in his æquationibus huiuſmodi diuiſori 3 a, ciſram o, adiungere, primo iam elicito latere ſedem habente in primo puncto ad læuam. Aliàs hæ quidem, æquationibus alijs, quarum radix duobus tantùm lateribus ſingularibus conſtat perſimiles ſunt.

S C H O L I O N.

Breuiùs idem perficitur. *NON diſſimili Arte poterit Analyſis inſtitui, cum æquatio proponitur 1 C ✠ 34 R ⚌ 14714455, ac ſuperiùs allata.*

Facta ſignatione per puncta, vt huius Analyſeos natura exiget; ſumatur latus cubicum primi membri, nimirum numeri 14, vſque ad primum punctum à ſiniſtris. Illud autem eſt 2; cuius cubo 8, ſubtracto ex 14, remanet 6; numerus, cui annectantur ſequentes figuræ 7, 1, 4, 4; vt fiat numerus 67144, futuræ ſubtractionis gratia; tot autem neque plures, neq; pauciores quòd ſubtrahendus, vt videbimus, non plures, nec pauciores requirit, ob annexas, quas ſibi vendicat ciſras duas. Ex hoc autem numero auferatur 68, quem ſubintelliguntur comitari 00, ob pretium primi lateris, & coefficientis plani, factaq; ſubtractione remanet 67076, cui annectatur diuiſionis gratia ſequens figura 5.

Secundi lateris inquiſitio. *Ad indagandam ſecundam figuram, paro diuiſorem hac arte; Sumo 12, duplum quadratum primæ figuræ 2; item ſumo 6, triplum eiuſdem primæ figuræ; hos autem numeros ita*

diſpono

```
1C + 34R = 1 4 7 1 4 4 5 5   (2, 4, 5 above; points below)

                      8
                    ---------
                      6 7 1 4 4
                            6 8
                    ---------
                      6 7 0 7 6 5
 1 2                  4 8
     6              ---------
         3 4          1 9 0 7 6 5
 -----------            9 6
 1 2 6 0 3 4        ---------
                        9 4 7 6 5
 1 7 2 8                  6 4
       7 2          ---------
         3 4            8 8 3 6 5
 -----------                1 3 6
 1 7 3 5 5 4        ---------
                        8 8 2 2 9 5
                        8 6 4 0
                    ---------
                          1 8 2 9 5
                          1 8 0 0
                    ---------
                              2 9 5
                              1 2 5
                            -------
                              1 7 0
                              1 7 0
                            -------
                              0 0 0
```

diſpono, ſcribendo 8, *ſub* 12, *ea lege, vt antecedat vnius figuræ ſpatio, fiat* 126; *Id ex Analyſi exigente, tum triplo quadrato primæ figuræ, cum triplo eiuſdem primæ figuræ; huic autem numero annecto coefficiens planum, ſcilicet* 34; *vt præcedat trium figurarum ſpatio dextrorſum, huiuſmodi enim numerus eſt ille* 126, *ad quem intelligimus ſubſequi* 000, *& propterea ſi addatur* 34, *fiet* 126034; *per quem diuidatur numerus* 670765: *vt fiat quotiens* 4; *licet enim* 4, *numerus non metiatur præciſe* 670765, *per* 126034; *nihilominus hæc eſt inſtituto operi conſentanea applicatio, ob ſubtractiones futuras requiſitas. Ex* 670765; *auferatur* 48; *ſolidum à latere ſecundo, in quadratum triplum lateris primi, ſcribiq; debet ad eum modum, vt in paradigmate vides id exigente pretio, & illius reſidui, & iſtius producti, & remanet* 190765, *à quo ablato* 96. *ſolido facto à quadrato lateris ſecundi in triplum lateris primi, & remanebit* 94765; *à quo ſubtracto* 64, *cubo lateris ſecundi, ſcribi tamen debet, vt vides, id poſtulante numero ſubtrahendo, reſpectu illius à quo fieri debet ſubtractio, & remanet* 88365, *à quo detracto* 136, *ſolido à latere ſecundo* 4, *in coefficiens planum, remanet* 88229: *ſcribi tamen debet, numerus vt vides, nempe* 6, *ſub* 5, *&c. id exigente pretio amborum numerorum, Annectatur poſtrema figura* 5, *diuiſionis gratia, vt fiat* 882295.

Ad indagandam tertiam figuram, paro diuiſorem non diſſimili modo. Sumo triplum quadratum lateris primi; primum autem latus modo eſt 24, *cum duo iam elicita vnius numero fungantur; eius quadratum eſt* 576, *cuius triplum eſt* 1728. *Deinde addo* 72. *triplum latus primum, ita tamen, vt antecedat vnius figuræ loco, id requirente pretio huiuſmodi numerorum, & fit* 17352, *cui addito* 34, *coefficiente plano, fit* 173554; *numerus per quem diuiſis* 882295: *fit quotiens* 5, *tertia figura quæſita radicis. Modo ab hoc numero* 882295; *ſubtrahatur* 8640; *ſolidum à latere ſecundo, ſeu tertia figura ſe habente, vt ſecunda, in quadratum triplum lateris primi, & remanebit* 18295. *Scribi autem debet vt vides, id exigente pretio numerorum, & remanebit* 295, *à quo dempto cubo lateris ſecundi, & remanet* 170, *à quo dempto* 170, *ſolido à latere ſecundo, ſeu figura tertia ſe habente, vt ſecunda in coefficiens planum, nihil remanet.* *Indagatio tertiæ figuræ.*

 Ordi-

Quandoque contingit vt numerus abſolutus plura habeat puncta quã figuras eius latus.

Inſuper animaduertendum eſt plerumq; contingere (loquor de methodo ſuperiùs declarata) vt numerus abſolutus æquationis plura habeat puncta, quam figuras eius latus; Itaut ſæpeſepius in numero per tria puncta ſignatio reperiatur, & radix duabus conſtet figuris, quod tunc accidit, quando radicum numerus adeo magnus eſt, vt ſubtrahi nequeat, eo quo opus eſt modo, tunc prætermiſſo primo puncto, fit deuolutio, & proceditur ad punctum vlteriùs.

Proponitur æquatio in qua cubus eſt minor afficiente ſolido.

Sit æquatio 1 C ✢ 98600R ⊐ 3187968. In hac æquatione cubus minor eſt afficiente ſolido; proinde cubus non tàm afficitur, quàm potiùs afficit. Dum igitur contingit coefficientem ſub gradualem magnitudinem in anteriora produci, vltra ipſum affectum cubum, vel eo ſaltem loci, vt ab eo nequeat auferri; quod eſt argumentum, non tàm cubum affici, quàm afficere, cum cubus ſit minor afficiente ſolido: Coefficiens ad ſuccedentes ſedes ordine reuocanda eſt, donec diuiſio inſtitui poſſit; à qua præſtat initium operis ſumere; quot autem figuris retrocedet, tot puncta, vel cuborum loca ſubtus delebuntur, à quibus erat alioquin ſumendum initium.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi inanis ante deuolutionem.

b pl.	Coefficiens planum.	9	8 6 0	0	Sublaterlee.
				. . .	Tot puncta ſimplicium laterum, quot cubica ſedeſue cuborum.
z ſol.	Cubus afficiens reſoluendus.	3	1 8 7	9 6 8	
		.	.	.	Puncta cubica.
			Q R	Q.R	
		C 1	C 1 1	C 1 1 1	

Quoniam 9, maior eſt, quàm 3, fit Deuolutio.

II. Eductio lateris ſingularis primi poſt Deuolutionem.

b pl.	Coefficiens planum principalius diuidens.	9 8 6	0 0				
			. .	Tot puncta laterũ ſimpliciũ, quot cubica, ſedeſue cuborum.	●	o	Tot numerales circuli, quot puncta cubica, lateraue ſingularia.
z ſol.	Cubus affectus reſoluendus.	3 1 8 7	9 6 8		R 3	2	
		.	.	Puncta cubica.	Q 9.	4	
			Q R.		C 27:	64	
		C 1	C 1 1			2 30	
b pl. a	Solida ablatitia. {	2 9 5 8	0 0	A latere primo in coefficiens planum.			
a^3		2 7		Cubus lateris primi.			
b pl. a + a^3	Summa ſolidorum ablatiorum.	2 9 8 5	0 0				
z ſol. − b pl. a − a^3.	Reliquum cubi affecti reſoluendi.	2 0 2	9 6 8				

III. Edu-

III. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior. { Coefficiens planũ.	9 8	6 0 0 .		b pl.
Cubi affecti reſoluendi reliquum.	2 0 2	9 6 8	a † e 30 † 2	2 ſol. − b pl. a − a^3.
Diſorum pars inferior. { Triplũ quadratũ lateris primi.	2	7		3 a^2
Triplũ latus primum.		9		3 a
Summa diuiſorum.	1 0 1	3 9 0		3 a^2 † 3 a † b pl.
Solida ablatitia. {	1 9 7	2 0 0	A latere ſecundo in coefficiens planum.	b pl. e.
	5	4	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.	3 a^2 e
		3 6	A lateris ſecundi quadrato in triplum latus primum.	3 a e^2
		8	Cubus lateris ſecundi.	e^3
Summa ſolidorum æqualis reliquo reſiduo afficienti cubo.	2 0 2	9 6 8		* *b pl. e* † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † *b pl. e ≕ 2 ſol. − b pl. a − a^3.

ſuperiùs dicta explicantur.

Si itaq; propoſita fuiſſet æquatio 1 C ✠ 98600 R ≕ 3187968, ſit 1 R, valor 32; numerus quæſtioni ſatisfaciens; nam ductus in ſui quadratum 1024, & in 98600, facit 3187968, vt præcipitur. Si enim 32, ducatur in 1024, fit 32768, cubus ſcilicet ipſius 32, ſi verò 98600, multiplicetur per 32, fit numerus 3151200, huic autem ſi addatur 32768, fiet numerus 3187968. Cæterum 3187968, eſt cubus adiunctus ſolido ſub latere, & dato plano 98600, eſt autem maius ſolidum cubo, quemadmodum indicat coefficientis ſitus eo loci; nam coefficiens vnus ex diuiſoribus, à diuidendo tolli non poteſt; ob id in proximè ſuccedentem locum deuolurio eſt facta, deleto, quoque puncto cubico ad læuam primùm occurrente ſubtus poſito, & à diuiſione potius ſumendum initium, quàm à radicis extractione, cùm coefficiens principaliùs diuidat, quàm ipſius lateris cubus, vel lateris quadratum.

Ne mireris autem ſi poteſtas dicatur diuiſor, nam radicis extractio pro diuiſionis ſpecie conſueuit Analyſta vſurpare; quamobrem, & lateris, ſiue radicis poteſtas; diuiſor ex hoc capire dicetur; radicem, enim extrahere ex aliquo numero, eſt numerum propoſitum, ex quo radix extrahenda eſt, diuidere; ita vt diuiſor, & quotiens in radicis extractione ſint.

Quo pacto lateris, ſiue radicis poteſtas dicatur diuiſor.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

b pl.	Coefficiens planum.	9	5 6 8	0	Sublaterale.
				. . .	0 0
z ſol.	Cubus affectus reſoluendus.	1	1 4 9	8 8 8	R 1 2 Q 1, 4, C 1, 8
		.	.	.	
			Q R	Q R	
		C 1	C 11	C 111	

II. Eductio lateris ſingularis primi poſt Deuolutionem.

b pl.	Coefficiens planum principalius diuidens.	9 5 6	8 0	
			. .	1 10
z ſol.	Cubus afficiens reſoluendus.	1 1 4 9	8 8 8	
		C 1	Q R C 11	
b pl. a	Solida ablatiua. }	9 5 6	8 0	A latere primo in coefficiens planum.
a'		1		Cubus lateris primi.
b pl. a + a'	Summa ſolidorum ablatiorum.	9 5 7	8 0	
z ſol. – pl. a – a'.	Cubi affecti reſoluendi reliquũ.	1 9 2	0 8 8	

III. Edu-

III. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior. } Coefficiẽs planum.	9 5	6 8 0		b pl.
Cubi affecti reſoluendi reliquum.	1 9 2	0 8 8	a † e 10 † 2	z ſol. – b pl. a – a^3.
Diuiſorum pars inferior. { Triplũ quadrati lateris primi.		3		3 a^2
Triplum latus primũ.		3		3 a
Summa diuiſorum.	9 6	0 1 0		3 a^2 † 3 a.
Solida ablatitia.	1 9 1	3 6 0	A latere ſecundo in coefficiens planum.	b pl. e.
		6	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.	3 a^2e
		1 2	A lateris ſecundi quadrato in triplum latus primum.	3 ae^2
		8	Cubus lateris ſecundi.	e^3
Summa ſolidorum auferenda æqualis reſiduo reſoluendo afficienti cubo.	1 9 2	0 8 8		b pl. e † 3 a^2e † 3 ae^2 † e^3 = z ſol. – b pl. a – a^3,

S C H O L I O N.

Prætermiſſo primo puncto, primaq; cuborum ſede. Subtraho cubum ipſius 1, abs 1149; etenim primam radicis quæſitæ figuram, hoc eſt primum ſingulare latus dico eſſe 1, facta ſubtractione, remanet numerus 1148, iuxta quem, futuræ ſubtractionis gratia ad dextram ſcribo, duas ſuperiores notas, figuraſque 8,8. vt fiat numerus 114888, Ab hoc autem ſubtraho numerum productum ex multiplicatione 1, primæ figuræ, ſeu primi lateris, in ipſum numerum radicum, ſeu coefficientem, nimirum 95680; facta ſubtractione remanet numerus 19208. collocatur autem ſuatrahendus; vt vides, id requirente Analyſi; Illi autem adiungo poſtremam figuram 8, vt fiat 192088.

Ad indagandam ſecundam figuram, ſiue ſecundum ſingulare latus; paro diuiſorem hac Arte. Sumo 3.

1 C ✠ 95680 R = 1 1 4 9 8 8 8 (points over 9: 1, over last 8: 2)

```
            1     2
  1 1 4 9 8 8 8
  .     .     .
        1     2
  -------------
  1 1 4 8 8 8
    9 5 6 8 0
  -------------
    1 9 2 0 8 8
          6
  -------------
    1 9 1 4 8
          1 2
  -------------
    1 9 1 3 6 8
              8
  -------------
    1 6 1 3 6 0
    1 6 1 3 6 0
  -------------
    0         0
```

Nihil refert an prius ſubtrahatur cubus lateris primi, an ſolidũ à latere primo in datum planum coefficiens.

triplum

triplum quadratum primæ figuræ, ſeu primi lateris, deinde ſumo 3, triplum eiuſdem; Ex his numeris vnum alteri addo, ea cautela ſeruata, vt triplum primæ figuræ, antecedat dextrorſum, vnius figuræ ſpatio, id requirente conditione diuiſorum debitas ſibi ſedes poſtulantium iuxta Analyſeos naturam, itaut fiat numerus 33. cui obſeruata eadem anteceſſionis cautela prout αναλυσις contraria συνθεσει requirit, addo 95680. radicum numerum, ſeu coefficientem, vt fiat 96010; & hic numerus erit diuiſor quæſitus, per quem nimirum diuidendus eſt numerus 192088; Facta diuiſione fit quotiens 2, & ſecundum latus, ſiue ſecunda figura quæſita. Modo ſumatur 3. triplum quadrati primæ figuræ 1; & ducatur in 2; ſecundam figuram, fitq; 6. numerus ſcribendus hac lege, vt collocetur ſub antepenultima, nempe ſub 0; vt Analyſis expoſcit, & ſubtrahatur à 1920; vt remaneat 1914, cui annecto, ſequentem notam 8, vt fiat 19148. Subtractionis futuræ gratia; ſumatur autem 3; triplum primæ figuræ, ducatur in 4, quadratum ſecundæ, & fit numerus 12. ſubtrahendus vt vides, id Analyſi poſtulante, quo ſubtracto à 19148, remanet 19136, cui annectatur ſequens figura 8, vt fiat 191368, à quo ſubtrahatur 8, cubus ſecundæ figuræ, & remanet 191360. Nunc autem ducatur radicum numerus 95680, in 2. ſecundam figuram, & fit numerus 191360, quo detracto de 19136, reſiduo iam habito, & remanet 0,

Girardi Methodus. SEquitur æquatio, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano; ad cuius explicationem, hæc Methodus tradi ſolet, vt etiam de Cubica affirmatè affecta loquentes, explicuimus.

Æquatio proponitur. Proponatur æquatio 1 C ⵌ 8 R ✠ 10472. Partes aliquotæ numeri abſoluti diſponantur, vt vides; nempe, vt binæ contrapoſitæ ſi inter ſe ducantur, efficiant 10472.

1 —	10472	14 —	748
2 —	5236	17 —	616
3 —	2618	22 —	476
7 —	1496	34 —	308
8 —	1309	44 —	238

Deinde vtraq; æquationis pars diuidatur per 1 R, & fiet æquatio 1 Q ⵌ 8 ✠ $\frac{10472}{1R}$. Hoc eſt 8, additus vni ex partibus aliquotis ipſius numeri 10472; conſtituit quadratum lateris, ſeu 1 R; ea verò eſt eligenda pars aliquota, cui additus 8, facit quadratum alteriùs partis coefficientis correlatæ, vt in noſtro exemplo reperiemus partem ipſam eſſe 476, & 1 R, pretium erit 22. Hoc pacto contenderunt.

E dato in numeris cubo affecto multa ſolidi ſub latere, & dato coefficiente plano, latus elicere.

Numeroſa Analyſis æquationis, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano.

Oblata autem æquatio ſit 1 C — 16 R ⵌ 46080;

Speciosa reſolutio. Quandoquidem deprehenditur propoſitæ æquationis affectæ latus binomium eſſe atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit z ſolidum. Latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit a † e. Cuius cubus eſt a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3. Solidum autem de Cubo negatum erit b plano a † b plano e, quo ſubtracto ex cubo prędicto, vt ex ſuo Theoremate conſtat, fiet a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 — b plano a — b plano e; quod æquabitur z ſolido; & per antitheſin, vtrinq; addito b plano a; & ſubtracto a^3 fiet 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 — b plano e ⵌ z ſol. † b plano a — a^3.

Compa-

Comparationis igitur homogeneum auctum ſolido ſub latere primo, & coefficiente, minus cubo lateris primi, applicandum eſt ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, minus coefficiente plano, vt oriatur ſingulare latus ſecundum. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Numeroſa reſolutio. Si proponatur cubus negatè affectus, vt exempli gratia 1 C − 16 R = 46080; non diſſimili modo procedendum erit, ac in analyſi cubi affirmatè affecti ſolùm inter ſe differunt æquationes, quòd in iſtarum analyſi dum diuiſio inſtituitur; coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuiſorum differentia attendi debet; Secus autem in illarum æquationum Analyſi, in quibus, dum cubus affirmatè afficitur, ſumma debet attendi. Præterea ſolidum factum, dum ſingularia latera ducuntur in idem coefficiens planum definens ſub ſede ipſius coefficientis, addendum eſt negatè affecto cubo, vel auferri debet (in idem enim recidit) à ſolidis ablatitijs; cum tamen in cubo affirmatè affecto oppoſito modo procedendum eſſet, ſiquidem ſubducebatur cubo affirmatè affecto, vel addebatur ſolidis ablatitijs. Hæc autem omnia in ſequenti paradigmate intueri licebit. *Explicatur ipſa reſolutio.* Vt in eductione primi lateris, idem eſt addere 48, ſolidum à latere primo, in coefficiens planum, addere inquam ad 46080; ita tamen, vt deſinat quemadmodum vides ſub puncto, vbi coefficiens conſiſtit; & ex aggregato ſubducere 27, cubum lateris primi; idem eſt, ac 48, ſubducere ex 27, aſſumente duas cifras: ſic etiam in extractione ſecundi lateris; nam ſi 96, ſolidum à latere ſecundo in coefficiens planum, ſubduxeris ex 19656, remanet 19560, quo ſubtracto ex 19560, nihil remanet; ſi idem numerus 96, addideris cubi affecti reſoluendi reliquo, fiet 19656; à quo ſi ſubtraxeris 19656; ſummam ablatitiorum, nihil pariter remanebit; hoc ex adiuncto paradigmate conſpicitur; quod etiam in alio ſubſequenti, analyſeos cubi acephali licebit obſeruare. Erat autem oppoſitus proceſſus in æquatione, in qua cubus afficiebatur adiunctione ſolidi ſub coefficiente plano, & latere; cum enim proponeretur 1 C + 34 R = 14714455; erat cubus lateris primi 8; & 68, erat ſolidum à latere primo in coefficiens planum; hoc autem, vel addebatur 8, aſſumenti quatuor cifras, & ſumma 80068, auferebatur à 14714455, deſinente tamen numero 80068, ſub puncto, vbi coefficiens conſiſtit; vel ſubtrahebatur, eadem ſeruata lege, à numero 14714455, cubo affecto reſoluendo; vtrouis enim modo opereris, habebis 6707655, pro reliquo reſoluendi cubi affecti: quod autem de primo latere diximus, illud quoq; de ſecundo omnino eſt intelligendum, &c.

Ordinabitur autem Æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.			1 6	Sublaterale.				b pl.
			. .	Tot puncta laterum ſimplicis quot cuborum.		o	o	Tot numerales circuli &c.
		4 6	0 8 0		R	3	6	z ſol.
					Q	9:	36	
		.	.	Puncta cubica.	C	27:	216	
						a		
						30		
Plana proſta-	Ablatitium	2 7		Cubus lateris primi.				a^3
phæretica.	Additium		4 8	Solidum à latere primo in coefficiens planum.				pl. a
Exceſſus ſolidi ablatitij.		2 6	5 2					a^3 − b pl. a
Reliquum cubi affecti reſoluendi.		1 9	5 6 0					z ſol. + b pl. a − a^3.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b pl.	Diuiſorum pars ſuperior. { Coefficiens planum.		1 6 .	
z ſol. † b pl. a − a^3.	Reliquum cubi affecti reſoluendi.	1 9	5 6 0	a † e 30 † 6
3 a^2	Diuiſorum pars inferior { Triplum quadrati lateris primi.	2	7	
3 a	Triplum lateris primi.		9	
3 a^2 † 3 a − b pl.	Differentia diuiſorum.	2	7 7 4	
3 a^2e	Plana ablatitia.	1 6	2	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
3 ae^2		3	2 4	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
e^3.			2 1 6	Cubus lateris ſecundi,
3 a^2e † 3 a e^2 † e^3.	Summa ablatitiorum.	3 9	6 5 6	
b pl. e,	Solidum additium.		9 6	A latere ſecundo in coefficiens planum.
3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 − b pl. e = z ſol. † b pl. a − a^3.	Exceſſus ablatitiorum æqualis reliquo reſoluendi cubi affecti.	1 9	5 6 0	

SCHOLION.

Cōpendioſiori modo idem perficitur. *Compendioſiùs elicitur radix propoſita æquationis non diſſimili modo, ac ſuperiùs fecimus agentes de analyſi æquationis, in qua cubus affirmatè afficitur; ſolùm illud intereſt, quod iam adnotauimus, vt differentia attendatur in diuiſione inſtituenda; differentia inquam coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuiſorum; cum in æquatione cubi affirmatè affecti, ſumma eſſet attendenda; cætera verò ſunt obſeruanda, quæ iam explicuimus agentes de methodo generali.*

Indagatio primæ figuræ. *Dico igitur latus cubicum numeri 46: eſſe 3, huius cubus eſt 27, quo ſubtracto ex 46, remanet 19, huic annectantur duæ ſequentes figuræ 08, vt fiat 1908, huic addatur 48, numerus factus ex 2, prima figura in 16; numerum radicum, & fiet 1956; huic annectatur 0, vt fiat 19560; modo ad indagandam ſecundam figuram, paro diuiſorem hac arte ſumo triplum quadrati primæ figuræ, & eſt 27, deinde ſumo triplum eiuſdem primæ figuræ, ſcilicet 9; annecto hanc figuram illis, vt fiat 279, additionem enim inſtituo adhibi-*

hibi 4

hibita cautela, vt antecedat vnius figura ſpatio; ex 279; ſubducto 16, numero radicum, facta ſubtractione ea lege, vt vides (ſi cubus eſſet affirmatè affectus inſtitueretur additio) fit 2774, diuiſor, per quem ſi diuidatur 19560, fit quotiens 6; & ſecunda figura: modo duco 6, in 16, numerum radicum, & fit 96. numerus; qui additus ad 19560, (ſi cubus eſſet affirmatè affectus, auferretur) & fit 19656; à quo ſubducto 162, ſolido à latere ſecundo, ſine ſecunda figura, in triplum quadratum lateris primi, & remanet 3456; à quo ſubtracto 324 (facta ſubtractione vt vides) numero producto à quadrato lateris ſecundi, in triplũ latus primum, remanet 216; à quo ſubtracto 216, cubo, ex 6, nihil remanet, &c.

	3 6
1C − 16R =	46080
	. .
	27
27	1908
. 9	48
279	19560
16	96
	19656
Diuiſor 2774	162
	3456
	324
	216
	216
	0 0

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.	11	662	0		b pl.
			. . .	0 0 0	
Cubus reſoluendus mutilus.	0	352	947	R 3: 4 Q 9, 16 C 27, 64	z ſol.
	.	QR.	QR.	a 300	
	C I	C II	C III		
Solida proſthaphæretica. Addititium.	34	986	0	A latere primo in coefficiens planum.	b pl. a
Solida proſthaphæretica. Ablatitium.	27			Cubus lateris primi.	a^3
Exceſſus additiuorum.	7	986	0		b pl. a − a^3
Reliquum reſtituti reſoluendi mutili cubi.	8	338	947		z ſol. † b pl. a − a^3.

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b pl.	Diuiſorum pars ſuperior. { Coefficiēs planum.	1	1 6 6	2 6	
z ſol. † b pl. a – a^3.	Reliquum reſoluendi cubi affecti.	8	3 3 8	9 4 7	
$3a^2$.	Diuiſorum pars inferior. { Triplum quadratū lateris primi.	2	7		
$3a$.	Triplum lateris primum.		9		
$3a^2$ † $3a$ – b pl.	Exceſſus diuiſorum inferiorum.	1	6 2 3	8 0	
$3a^2e$	Solida ablatitia.	1 0	8		A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
$3ae^2$		1	4 4		A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
e^3			6 4		Cubus lateris ſecundi.
$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3.	Summa ablatitiorum.	1 2	3 0 4		
b pl. e	Solidum addititium.	4	6 6 4	8 0	A latere ſecundo in coefficiens planum;
$3a^2c$ † $3ac^2$ † e^3 – b pl. c	Exceſſus ablatitiorum.	7	6 3 9	2 0	
z ſol. † b pl. a – a^3 – $3a^2e$ – $3ae^2$ – e^3 † b pl. c.	Reliquum reſoluendi cubi affecti.		6 9 9	7 4 7	

Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur, & fit.

III. Eductio lateris ſingularis tertij, vt ſecundi.

Diuiſorũ pars ſuperior. { Coefficiẽs planum.	116	620	
		.	
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	699	747	
		.	
Diuiſorum pars inferior. { Triplũ quadratum lateris primi.	346	8	
Triplum latus primũ.	1	02	
Exceſſus diuiſorum inferiorum	231	200	
Solida ablatitia.	1640	4	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
	9	18	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
		27	Cubus lateris ſecundi.
Summa ablatiorum.	1649	607	
Solidum addititium.	349	860	A latere ſecundo in coefficiens planum.
Exceſſus ablatitius æqualis reliquo reſoluendo cubo.	699	747	

	o	o	o
R	3	4	3
Q	1156		9
C	39304		27

2 † e
340 † 3

b pl.

2 ſol. † b'pl. &c.

Quoniam igitur aliquando contingit, vt coefficiens planum pluribus abundet binis figuris, quam cubus negatè affectus ſub latere ternis, quod eſt argumentum ſolidum afficiens maius eſſe reſoluendo affecto negatè cubo. Hic cubus acephalus dicendus eſt; quaſi capitis expers; poſtulat autem peculiarem analyſim; quam vt inſtituamus oportet præponere mutilo propoſito cubo, eam numeralium circulorum multitudinem; vt tot puncta cubica poſſint ei præfigi, quot quadratica plano coefficienti. Radix autem educta è plano coefficiente, tanquam quadrato, ſi cætera conſentiant, ſin minùs, proximè maior, conſtitui debet latus ſingulare primum ipſius reſoluendi cubi negatè affecti; non immutata methodo quantum ad reliqua.

Quando coefficiens planũ pluribus abũdat binis figuris, quam cubus negatè affectus ſub latere ternis. &c.

Cubus acephalus.

Ita planè in ſuperiori Paradigmate, in quo 342947, cubus eſt multatus ſolido ſub latere, & plano 116, 620; eſt autem maius ſolidum 116620 R, ſolido reſoluendo 35294; quoniam coefficienti plano 116620, præfigi poſſunt tria puncta quadratica

dratica

dratica, ſolido verò 352947, duo tantùm puncta cubica; ob id ſolido 352947, reſoluendo præpoſitus eſt numeralis circulus, & coefficienti ſua ſedes adijcitur. Initium autem operis deſumitur, ab exractione radicis quadratæ, quæ lateri cubi reſoluendi conſentiat, vt etiam conſtat, in adiuncto Paradigmate.

Declaratur ſuperior doctrina.

Et ita dum proponitur æquatio $1\,C - 154320\,R = 673475$, fit $1\,R$, valor 395, numerus planè quæſtioni ſatisfaciens; ab huius enim cubo 61629875, ſi auferatur 60956400, numerus factus per multiplicationem numeri 154320, in 395, remanebit 673475; ſatisfacit igitur quæſtioni, per quam proponebatur, numerum inuenire, qui ductus in ſui quadratum diminutum 154320, faciat 673475; hoc eſt, numerum inuenire, quo ducto in ſui quadratum, & a producto ablato producto ex eodem in 154320, remaneat 673475. Quod ſi negatè affectus cubus, tot conſtet ternis figuris, quot planum coefficiens binis; interdum eo loci prorumpit, vt niſi Analyſta rationem eius habuerit, non raro in ipſa extractione radicis eludetur. Præſtat eo caſu, vt ab ipſo plano coefficiente tanquam quadrato, eruatur ſub congruente puncto radix; cuius cubus ſubintelligatur adiungi propoſito cubo affecto: atq; adeo ex eo ita adaucto latus eliciatur. Illud enim erit, vel conſentaneum, vel conſentaneo proximè minus. Vt ſi propoſita foret æquatio $1\,C - 6400\,R = 153000$, ordinatis ad opus figuris iuxta Artis Præcepta. Quoniam igitur radix quadrata nnmeri 64, eſt 8, cuius cubus eſt 512; qui additus ad 153, facit 665; at latere cubi 665, proximè maius eſt 9; ſumetur latus 9, pro quæſita radice.

```
      6 4 0 0
          . .
  ———————————
  1 5 3 0 0 0
```

Methodus Girardi.

PRopoſita ſit æquatio $1\,C = 124\,R - 240$. Diſponantur partes aliquotæ, vt ſupra &c. diuidatur vtraq; æquationis pars per $1\,R$, fit $1\,Q = 124 - \frac{240}{1\,R}$ hoc eſt, ſi à 124, numero R, auferatur pars aliqua aliquota numeri abſoluti 240, nempe 24, remanet quadratum numeri 10, videlicet 100, cuius ℞, eſt 10; & altera pars coefficiens, correlata; itaq; 10, erit $1\,R$, pretium, & eſt maius latus; ſi verò à numero 124, ſubtrahamus 120, remanet 4, quadratum alterius partis, nempe 2; & 2, erit latus minus. Hoc autem pacto contenderunt.

E dato in numeris ſolido ſub latere, & data coefficiente plana magnitudine, affecto multa cubi, latus elicire.

Numeroſa Analyſis æquationis in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano afficitur multa Cubi.

Oblata autem æquatio ſit $6468\,R - 1\,C = 186192$.

Specioſa reſolutio.

Quandoquidem deprehenditur propoſitæ æquationis affectæ latus binomium eſſe atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit z ſolidum. Latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit $a + e$. Cuius cubus eſt $a^3 + 3\,a^2 e + 3\,a e^2 + e^3$. Solidum autem de qno negatur cubus; erit b planum $a +$ b plano e, de quo ſi cubus negetur prædictus, vt conſtat ex ſuo Theoremate, remanebit b pl. $a +$ b pl. $e - a^3 - 3\,a^2 e - 3\,a e^2 - e^3$, quod æquabitur z ſolido; & per antitheſin, fiet b pl. $e \sim 3\,a^2 e - 3\,a e^2 - e^3 =$ z ſol. $+ a^3 \sim$ b pl. a. Differentia igitur inter comparationis homogeneum auctum cubo ſingularis lateris primi, & ſolidum à latere primo in coefficiens planum, applicanda eſt ad differentiam inter ſolidum à latere ſecundo, in coefficiens planum, & triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo. Hunc in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Quando

Quando poteſtas negatur de homogeneo ſub gradu, latus eſt anceps; quamobrem æquatio adinuenta de duobus lateribus explicabilis eſt, atq; adeo Problemati duplex latus ſatisfacit; quorum vnius quadratum minus eſt triente datæ coefficientis planæ magnitudinis, alterum maius; ita vt ſi triplum ſolidum, quod eſt homogeneum comparationis, applicetur ad duplum planę coefficientis datæ magnitudinis, oriatur longitudo maior radice minore, & minor radice maiore. *Notandum.*

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν ad inueniendam radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.	64	68	Sublaterale.	b pl.
		..	0 0	
			R 3 6	
			Q 9: 36	
			C 27: 216	
Solidum ſub latere multatum lateris reſoluendo cubo.	186	192	2	z ſol.
	.	Q R.	30	
	C 2	C 11		
Solidum reſtituens.	27		Cubus lateris primi.	a^3
Solidum reſtitutum.	213	192		z ſol. + a^3
	194	04	A latere primo in coefficiens planum.	b pl. a
Exceſſus ſolidi reſtituti, reliquumue reſoluendi cubi auulſi.	19	152		z ſol. + a^3 − b pl. a.

Digitized by Google

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b pl.	Diuiſorũ pars ſuperior. Coeffiiciẽs planũ.	6	4 6 8	
z ſol. † a^3 − b pl. a.	Reliquum reſoluendi cubi auulſi.	1 9	1 5 2	a † e 3 0 † 6
3 a^2.	Diſorum pars inferior. Triplũ quadratũ lateris primi.	2	7	
3 a.	Triplũ latus primum.		9	
b pl. − 3 a^2 − 3 a.	Exceſſus diuiſorum ſuperiorum.	3	6 7 8	
3 a^2e	Solida addititia.	1 6	2	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
3 ae^2		3	2 4	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
e^3			2 1 6	Cubus lateris ſecundi.
3 a^2e † 3 a e^2 † e^3.	Summa ſolidorum addititiorum.	1 9	6 5 6	
b pl. e	Solidum ablatitium.	3 8	8 0 8	A latere ſecundo in coefficiens planum.
b pl. e − 3 a^2e − 3 a e^2 − e^3 ⫮ z ſol. † a^3 − b pl. a.	Exceſſus ſolidi ablatitij, æqualis reſiduo reſoluendo cubo auulſo.	1 9	1 5 2	

Latus igitur vnum è duobus, de quibus æqualitas explicari poteſt, ipſumq; minus; erit 36, ſi fuerit æquatio huiuſmodi 6468 R − 1 C ⫮ 186192. Si velimus autem radicem maiorem, applicemus 186192, ſolidum ad 36, & oriens planum 5172, compoſitum erit ex quadrato maioris, & rectangulo ſub maiore, & minore. Idem etiam planum relinquitur, ſi ab 6468, auferatur 1296, quadratum ex 36.

Dico igitur maiorem radicem eſſe 1 R, eius quadratum eſt 1 Q, ducatur 1 R in 36, & fit 36 R, addantur, & fit ſumma 1 Q ✠ 36 R ⫮ 5172.

```
          18          324
          18
        -----        5496
          144   ℞5496
          18          18
        -------------------
          324   ℞5496 — 18   latus maius.
                ℞5499 — 18
      -------------------------
        — ℞1780704 ✠ 324
  5496 — ℞1780704
  -------------------------
  5820 — ℞7122816
  ℞7122816 — 648        Productum ex numero ra-
  ---------------------   dicum, ſeu coefficiente,
         5172             in Radicis pretium.
```

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.	131 | 04	Sublaterale. 0 0		b pl.
	..	R 1 — 2; Q 1 — 4; C 1 — 8; 2; 10		
Solidum ſublaterale multatum lateris reſoluendo cubo.	155 | 520 . | QR.			z ſol.
Solidum reſtituens.	C 1 | C 1 1 1	Cubus lateris primi.		a³
Solidum reſtitutum.	156 | 520			z ſol † a³.
Solidum minuens.	131 | 04	A latere primo in coefficiens planum.		b pl. a
Exceſſus ſolidi reſtituti reliquumue reſoluendi cubi anulſi.	25 | 480			z ſol. † a³ — b pl. a.

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b pl.	Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens. planum.	1 3	1 0 4	
z ſol. $+a^3 - b$ pl. a	Reliquum reſoluendi cubi auulſi.		2 5	4 8 0	$a + e$ $10 + 2$
$3a^2$.	Diuiſorum pars inferior	Triplum quadratũ lateris primi.		3	
$3a$.		Triplum latus primi.		3	
b pl. $- 3a^2 - 3a$.	Exceſſus diuiſorum ſuperiorũ.		1 2	7 7 4	
$3a^2e$	Plana ablatitia.			6	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
$3ae^2$				1 2	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
e^3				8	Cubus lateris ſecundi.
$3a^2e + 3ae^2 + e^3$.	Summa ſolidorum addititiorum.			7 2 8	
b pl. e	Solidum ablatitium.		2 6	2 0 8	A latere ſecundo in coefficiens planum.
b pl. $e - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = z$ ſol. $+ a^3 - b$ pl. a.	Exceſſus ſolidi ablatitij æqualis reſiduo reſoluendo cubo auulſo.		2 5	4 8 0	

Dum

Dum itaq; proponitur æquatio 13104 R − 1 C ⩵ 155520 ſit radix minor 12. Hunc igitur in modum ordinanda erat æquationis Analyſis iuxta præcepta ſuperius tradita ad indagandam radicem minorem. At verò,

Ordinabitur æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.	1	3 1 0	4	Sublaterale.	b pl.
			· · ·	0	
				R 1 Q 1 C 1 a 100	
Solidum ſub latere multatum lateris cubo acephalum.	0	1 5 5	5 2 0		z ſol.
	·	·	·		
Solidum reſtituens.	1			Cubus lateris primi,	a³
Solidum reſtitutum.	1	1 5 5	5 2 0		z ſol. † a³
Solidum principale minuendũ.	1	3 1 0	4	A latere primo in coefficiens planum.	b pl. a.
Exceſſus ſolidi principalis, reliquumue reſoluendi cubi,		1 5 4	8 8 0		b pl. a − z ſol. − a³.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens planum.	1 3 1	0 4	b pl.
			· ·	
Reliquum reſoluendi cubi auulſi.		1 5 4	8 8 0	b pl. a − z ſol. − a³.
		·	·	
Diuiſorũ pars ſuperior.	Triplũ quadratum lateris primi	3		3 a².
	Triplum latus primũ.	3		3 a.
Exceſſus diuiſorum inferiorum.		1 9 8	9 6 0	3 a² † 3 a − b pl.

III. Eductio lateris ſingularis tertij, vt ſecundi.

b pl.	Diuiſorũ pars ſuperior. { Coefficiens planũ.	2 3	1 0 4	
b pl. a — z ſol. — a³	Reliquũ reſoluendi cubi auulſi.	1 5 4	8 8 0	
3 a²	Diſorum pars inferior. { Triplũ quadratũ lateris primi.	3 0	0	
3 a	Triplũ latus primum.		3 0	
3 a² † 3 a — b pl.	Exceſſus diuiſorum inferiorum.	1 7	1 9 6	
3 a² e	Solida ablatitia.	2 4 0	0	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
3 a e²		1 9	2 0	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
e³			5 1 2	Cubus lateris ſecundi.
3 a² e † 3 a e² † e³	Summa ſolidorum ablatitiorum.	2 5 9	7 1 2	
b pl. e.	Solidum additiium.	1 8 4	8 3 2	A latere ſecundo in coefficiens planum.
3 a² e † 3 a e² † e³ — b pl. e = b pl. a — z ſol. — a³.	Exceſſus ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendo cubi.	1 5 4	8 8 0	

o	o	o
R 1	0	8
Q 100 :		64
C 1000		512

a † e
100 † 8

Expe-

SCHOLION.

Expeditiùs ſic. Sit æquatio huiuſmodi. 13104 *R* — 1 *C* = 155520

```
          *1   2
  13104 R - 1 C = 155520
                  ·  ·   ·
                  1
                 ---------
                 15652
                 13104
                 ---------
                  25480
                    6
                 ---------
                  26080
                     12
                 ---------
                  26200
                      8
                 ---------
                  26208
                  26208
                 ---------
                  0    0
```

Sumo latus cubicum numeri vſque ad primum punctum ſcilicet 155; illudq; dico eſſe 1, cuius cubus eſt 1, quem ſcribo ſub puncto, & latus 1, noto ſuperiùs; ducta linea addo 1, cubum primi lateris ad 155, vt fiat 156; cui annecto 5, 2, ſequentes figuras, vt fiat numerus 15652, à quo ſubtraho 13104, numerum factum ex multiplicatione numeri 13104, in 1, primam figuram, & remanet 2548; huic annecto 0, poſtremam notam propoſiti numeri reſoluendi, & fit 25480.

Ad indagandam autem ſecundam figuram, ſiue ſecundum ſingulare latus, ſcribatur numerus radicum 13104; ſumatur triplum quadrati prima figuræ, & eſt 3, noteturq; ſub ante penultima figura; deinde ſumatur triplum eiuſdem 1, conſtituaturq; ſub penultima: fiat ſubtractio, remanet 12774.

```
  13104
   3
    3
  -----
  12774  Diuiſor.
```

Hæc autem conſtitutio figurarum, non eſt caſu facta, vt Tyronibus videtur, ſed ratione, vt patet, ex ijs, quæ ſuperiùs demonſtrauimus: eſt autem 12774, diuiſor, per quem diuidendus eſt numerus 25480; fit autem quotiens 2; eſtq; ſecunda figura quæſita. Sumatur triplum quadrati 1, prima figuræ, & eſt 3, ducatur in 2, ſecundam figuram, & fit 6, ſcribatur ſub 4, antepenultima figura, & fit 260, huic ſi adiungatur 8, penultima figura, fit 2608, huic autem addatur 12; productum à 3, triplo 1, prima figuræ, in 4, quadratum 2, ſecundæ figuræ, & fit 2620, cui annectatur 0, poſtrema figura, vt fiat 26200; cui addatur 8, cubus ſecundæ figuræ, vt fiat 26208; ab hac autem ſumma oportet ſubtrahere 26208, numerum productum à 13104, numero radicum, in 2, ſecundam figuram, & remanet 0; erit 1 R, valor 12.

Vel ad 6 productum à latere ſecundo in triplum quadratum primi, addatur 12, quadratum lateris ſecundi in triplum latus primum, ita tamen vt antecedat vnius figuræ ſpatio, eademque anteceſſione addatur 8, cubus lateris ſecundi; Summa vero 728, auferatur ex 26208, producto ex latere ſecundo in coefficiens planum, reſiduum 25480, auferatur à ſuperiori reſiduo, & nihil remanet.

Vt autem indagemus radicem maiorem, diuidatur 155520, per 12, latus minus, & proſilit in quotiente 12960; numerus etiam, qui reperitur, ſubducto 144, quadrato ipſius 12, ex 13104, remanet enim 12960; hic autem numerus æqualis eſt quadrato lateris maioris, plus producto maioris in minus: Itaque ſi dicamus maius eſſe 1 R, eius quadratum eſt 1 Q; ſi verò ducamus 1 R, in 12, fit 12 R; erit igitur 1 Q + 12 R = 12960; huius autem æquationis radicem comperiemus eſſe 108. Radicis maioris indagatio.

Si propoſita fuiſſet æquatio 13104 R — 1 C = 155520. Inſtitueretur etiam Analyſis ad radicem indagandam; quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate; eſt autem cubus acephalus prepoſita verò nota 0 ipſi 155520; vt fiat 0155520. factaque ſignatione per puncta inſtituetur Analyſis. Alia proponitur æquatio.

Fiat ſignatio per puncta, vt vides conſtituatur latus ſingulare primum 1, cuius cubo 1,

addito ad numerum reſoluendum ſit ſumma 1155520 ; *cui ſubſcripto* 13104 , *numero facto ex* 13104 , *in* 1 , *primum ſingulare latus* , & *facta ſubtractione illius ab hoc* , *remanet* 154880.

Ad indagandam ſecundam figuram , *ſumatur triplum quadratum primæ* , & *eſt* 3 ; *deinde ſumatur triplum eiuſdem* 1 , & *collocetur* , *vt vides* , *ſit* 33 ; *ſubſcribatur* 13104 , *coefficiens* ; & *ſubtracto* 13104 , *ab* 33 , *adiunctis numeralibus circulis* 000 , *remanet* 19896 ; *per quem diuiſis* 15485 , *fit quotiens* 0 , & 0 , *eſt ſecunda figura* , *noteturque in radice loco ſibi conſentaneo* , *ſupra punctum ſecundum ſibi addictum* .

```
                                  1       0       8
1 3 1 0 4 R — 1 C = 0 1 5 5 5 2 0
                                  1
  3 0 0        3 0
      8        6 4
                              1 1 5 5 5 2 0
2 4 0 0    1 9 2 0            1 3 1 0 4

3                                 1 5 4 8 8 0
  3                               1 0 4 8 3 2            8
                                                         8
1 3 1 0 4                         2 5 9 7 1 2            —
                                  2 4 0 0                64
1 9 8 9 6  primus diuiſor.                                8
                                    1 9 7 1
3 0 0                               1 9 2 0             512
      3 0
                                        5 1 2
1 3 1 0 4                               5 1 2          13104
                                                           8
1 7 1 9 6  ſecundus diuiſor.                0
                                                      104832
```

Modo indagetur tertia figura non diſſimili artificio parando nimirum primò diuiſorem ; *ſcilicet ſumpto quadrato triplo primi lateris* , & *triplo primo latere* , *notatiſque vt fiat* 30300 , *ab hoc ablato* 13104 , *remanet* 17196 , *numerus diuiſor* , *per quem diuiſo* 154880 , *fit quotiens* 8 , &c.

Sit propoſita æquatio 264 R — 1 C = *etſi primâ facie radix duabus conſtare figuris videatur vnica tamen figura conſtat* : *eſt igitur* 8 , *huius cubus eſt* 512 , *quo addito ad* 1600 , *fit* 2112 ; *à quo ſubtracto* 2112 , *numero facto ex* 264 , *in* 8 , *nihil remanet* ; *erit autem* 8 , *latus minus* : *habebitur maius methodo ſuperius explicata* .	8 1 6 0 0 5 1 2 ——— 2 1 1 2 2 1 1 2

Propoſita ſit æquatio præterea huiuſmodi 438 R — 1 C = 3213 *Et non diſſimili modo reperiemus latus minus eſſe* 9 , *maius reperietur vt ſupra* .	9 3 2 1 3 7 2 9 ——— 3 9 4 2 3 9 4 2 ———

Hoc modo docebamus in noſtro opere Algebrico , *quod elapſis annis Typis mandauimus* , *ſi ſit æquatio* 48 R — 1 C = 72 , *latus quæſitum eſſe* 6 , *cuius cubum* 216 ; *addo numero abſoluto* 72 , *vt fiat* 288 , *de quibus detraho* 288 , *productum ex* 6 , *latere inuento in* 48 , *numerum radicum* , & *remanet* 0 , *quoniam autem eſt æquatio Amphibola* , *proinde duplicem habet radicem* .

Alteram

Alteram autem ſic inuenio; à numero radicum, puta 48, aufero 36, quadratum inuenta radicis 6, & remanet 12, aut numerum 72, diuido per 6, radicem inuentam, & fit, quotiens 12, vt ſupra, quo facto ſic procedo: quæſita ℞ ſit 1 R, cuius quadrato nempè 1 Q, addo 6 R, numerum productum ex 1 R, in 6, priùs inuentam radicem, & fit ſumma 1 Q + 6 R. Quoniam autem numerus priùs inuentus, & ſeruatus nempe 12, componitur ex quadrato ſecundæ radicis quæſitæ, & numero producto ex eadem radice, in primam radicem inuentam multiplicato; ob id erit 1 Q + 6 R = 12: cuius æquationis explicatæ reperitur radix ℞ 21 − 3, & ſecunda radix quæſita.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48\,R - 1\,C = 72 \\ 216 \\ \hline 288 \\ 288 \\ \hline 0\quad 0 \end{array}$$

S C H O L I O N.

IN hac æquatione contingit non rarò opus eſſe deuolutione, de qua ſupra egimus; & ſæpè intelligendam eſſe præpoſitam numero notam o: ſed de Aequatione Amphibola, plura in Algebra ſpecioſa. Cæterum per modum alterum, &c. Numerus abſolutus obiecto ſigno − aſſumat +, vt tranſmutetur æquatio in hanc C − R = N. Secundo à quadrato lateris per tranſmutatam æquationem inuenti ſubtrahatur numerus Radicum, & reſiduum ſeruetur. Tertiò à quadrato dimidij lateris inuenti per æquationem tranſmutatam ſubducatur reſiduum ſeruatum, vel ablatum, à dimidio lateris inuenti per æquationem tranſmutatam ſumma, vel reſiduum dabit radicis valorem.

Numeroſa Analyſis æquationis in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Oblata autem æquatio ſit 1 C + 12 Q = 311296.

Cum deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam; atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit z ſol. latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit a + e. Huius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, cubus verò $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, ducto quadrato in b, coefficientem longitudinem, fiet $ba^2 + 2bae + be^2$, ſolidum afficiens, quo addito ad cubum, vt ex ſuo Theoremate conſtat, fiet $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + ba^2 + 2bae + be^2$, quod æquabitur z ſol. Et per antitheſin $3a^2e + 3ae^2 + e^3 + 2bae + be^2 =$ z ſol. $- a^3 - ba^2$. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quę ad propoſitę ęquationis explicationē requiruntur. *Specioſa reſolutio.*

Inter geneſim cubi puri, & huius affecti cubi, hoc intereſt, quod in hac quadratum lateris ſingularis primi ducendum eſt in coefficientem longitudinem: deinde verò latus ſecundum in duplum rectangulum ſub latere primo, & coefficiente longitudine: atque demum eiuſdem ſecundi lateris quadratum per ipſam quoque coefficientem longitudinem multiplicandum eſt. Hæc enim huius affecti cubi geneſis ordinata, addit geneſi cubi puri, ſuperiùs explicatæ. *Huius methodi explicatio. Quid interſit inter geneſim cubi puri, & affecti per adiunctionem ſolidi ſub lateris quadrato, &c.*

Vt autem ex huiuſmodi cubo affecto eruantur latera; non ſecus, ac in præcedentibus adnotauimus ſedes vnitatum ſingulares cubos metientium conſtituendæ ſunt; atque deſignandæ ſunt punctis ſubtus collocatis, & quot fuerint ſedes cuborum, punctaue; tot etiam quadratorum ſedes, per binas nimirum alternas figuras (ſiquidem coefficiens eſt ſubquadratica) debent deſuper collocari. In vltima verò ſede quadratorum, prima tamen à læua ad dextram procedendo ipſa coefficiens conſiſtet, ac proinde ſi pluribus figuris, quàm vna conſtet, reliquæ in anteriora prorumpent, quemadmodum in ſequenti paradigmate videbimus. Vt autem in Analyſi *Quo pacto procedendum in hac analyſi.*

puri

puri cubi; ita in hoc elicientur latera: hoc animaduerſo tantùm, quod ipſa coefficiens eſt è numero diuiſorum, ſeu inter diuiſores recenſetur; præterea poſt eductionem lateris ſingularis primi, planum ſub coefficiente, & duplo ſingularis lateris primi, eam eſt ſedem occupaturum, quæ in anteriora proxima eſt à puncto, in quo coefficiens ipſa conſiſtit, Hoc autem planum expletionis nuncupatur.

Explicatur Analyſis. Quadrata verò laterum elicitorum in coefficientem ipſam, & latera in expletionis planum ducuntur; deſinere verò debent ſolida facta ſub congrua ſede, qualem videlicet multiplicationis ratio poſtulat, & hæc debent auferri cum reliquis ſolidis ex affecto cubo.

Cæterum coefficiens in ſuccedentia loca quadratorum, præeunte ſemper ſuo expletionis plano ſubijcitur ordinatim, & diuiſores etiam ſubtus reliqui moueri debent, non diſſimili modo: ſed hæc omnia faciliùs deprehenduntur ex infra poſito paradigmate, in quo cernes obſeruata præcepta iam tradita; fit enim figurarum ſignatio, quæmadmodum in analyſi puri cubi dictum eſt; adnotantur etiam deſuper quadratorum ſedes per puncta illa, quæ quadratica dicuntur; extrahitur latus cubicum, vſque ad primum punctum ad læuam, & ad cubum extracti lateris, puta ad 216, additur 432, ſolidum à quadrato lateris primi, in coefficientem; ſit autem additio vt Analyſis requirit; ſumma verò ſubducitur numero reſoluendo 311296; vt remaneat 52096: fit autem expletionis planum 144, à coefficiente 12, in 12, duplum lateris primi; & cætera fiunt, quæ facilè ex paradigmate diſcerni poſſunt.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b	Coefficiens longitudo.	1 2		Subquadratica.		
		.	.	Tot ſedes punctatæ quadratorum, quot cuborum	o o R 6 4	Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
z ſol.	Cubus affectus reſoluendus.	3 1 1	2 9 6		Q 3 6 1 6 C 2 1 6 6 4 a 200	
		.	QR.	Puncta cubica.		
		C 1	C 1 1			
a^3	Solida ablatitia.	2 1 6		Cubus lateris primi.		
ba^2		4 3	2	Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.		
$a^3 + ba^2$.	Summa ſolidorum ablatitiorum.	2 5 9	2			
z ſol. $- a^3 - ba^2$.	Reliquum reſoluendi cubi affecti.	5 2	0 9 6			

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Planum expletionis à coefficiẽte in duplũ lateris primi.	1	4 4		$2ba$
	Coefficiẽs lõgitudo.		1 2		b
Cubi affecti reſoluendi reliquum.		5 2	0 9 6		z ſol. $- a^3 - b a^2$.
Diuiſorum pars inferior.	Triplũ quadratum lateris primi.	1 0	8		$3a^2$
	Triplum latus primũ.		1 8		$3a$
Summa diuiſorum.		1 2	4 3 2		$2ba + b + 3a^2 + 3a$
Solida ablatitia facta à diuiſoribus	Inferioribus & præcipuis.	4 3	2	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.	$3a^2e$
		2	8 8	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.	$3ae^2$
			6 4	Cubus lateris ſecundi.	e^3
	Superioribus.	5	7 6	A latere ſecundo in planum expletionis.	$2bae$
			1 9 2	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.	be^2
Summa ſolidorum auferenda, æqualis reliquo reſoluendi Cubi.		5 2	0 9 6		$3a^2e + 3ae^2 + e^3 + 2bae + be^2 =$ z ſol. $- a^3 - ba^2$

SCHO-

S C H O L I O N.

		6 4
Sit æquatio 1 C + 12 Q =		311296
		216
		952
		432
		52096
	108	432
	18	
	144	889
	12	288
Diuiſor	12432	6016
		64
		5952
		567
		192
		192
		0 0

Compendioſiùs hoc modo. Dico latus cubicum numeri 311, eſſe 6, cuius cubus eſt 216, ſubtractus à 311, relinquit 95; cui annexa ſequente figura diuiſionis gratia 2, fit 952 &c.

Secunda figuræ indagatio.

Ad indagandam ſecundam figuram paro diuiſorem hac arte. Scribo 108, triplum quadrati ex primo latere 6, & ei addo 18, triplum eiuſdem lateris ea lege, vt antecedat vnius figuræ ſpatio, id exigente (vt ſæpeſæpiùs dictum à nobis fuit) Analyſi, & fit numerus hic, nimirum 1098; huic addo 144, planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi, & fiet 1242; huic addo coefficientem longitudinem, antecedentem vnius figuræ ſpatio, id poſtulante Analyſeos natura, & fit 12432; per quem ſi diuidatur 52096. fit quotiens 4; modo ſubduco à 520, ſolidum à latere ſecundo 4, in triplum quadratum lateris primi 6, nempe 432, & remanet 88; huic annectatur 9, ſequens figura, vt fiat 889, à quo ſubtrahatur 288, ſolidum à quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum, & remanet 601; huic annectatur ſequens figura 6, & fit 6016; à quo ſubducto 64, numero cubo ſecundæ figuræ, & remanet 5952; à quo ſubtrahatur 576, ſolidum à latere ſecundo in planum expletionis, & remanet 192; à quo ſubtrahatur 192, ſolidum à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, & nihil remanet. Dicemus itaque radicem quæſitam eſſe 64.

In ſequenti autem paradigmate cernere licet æquationem etiam inter Q, C, & N. Verùm in hac æquatione ſolidum maius eſt cubo; quamobrem cubus potius afficit, quàm afficiatur; quam ob cauſam ſuperiùs nos dicebamus quadratum potius afficere quàm affici. Deuolutione tamen opus eſt ad hanc æquationem explicandam, propterea quod à numero ſolidorum ſubtractio fieri non poteſt.

Quãdo cubus potius afficit, quàm afficiatur.

Sæpè ſæpiùs contingit, vt coefficiens ſub gradu magnitudo in anteriora producatur vltra nimirum ipſum cubum affectum, vel eo loci ſaltem, vt cum ipſa ſit è diuiſoribus, ab affecto cubo auferri non poſſit. Hoc autem arguit cubum non tàm affici, quàm afficere; quoniam eſt minor afficiente ſolido. Coefficiens proinde ad ſuccedentia quadratorum loca, ſeu puncta quadratica, deſuper adnotata ordine reuocari debet, donec ſit diuiſioni locus; ab hoc autem præſtat operis initium deſumere obſeruata homogeneorum lege, vt inferiùs dicam. Quot autem ſubgradualibus punctis coefficiens retrocedet, tot puncta cubica ſubtus delebuntur, à quibus alioquin operis initium deſumendum fuiſſet, niſi videlicet fuiſſet opus deuolutionem facere. Ita ſi ſit æquatio 12320 Q + 1 C = 7110144. Numerus 7110144. eſt cubus adiunctus ſolido ſub lateris quadrato, dataque longitudine 12320; eſt autem ſolidum cubo maius, vt ſitus coefficientis indicat, quæ in anteriora prorumpit; quamobrem deuolui debet in proximum punctum quadraticum ſequens, deleto puncto cubico ad læuam primùm occurrente, operis initio deſumpto potius à diuiſione

uiſione, quam à radicis extractione: itaut ſolidum per longitudinem cum diuidatur quotiens, ſeu quod ex diuiſione prouenit, non intelligatur radix, ſed quadratum, quod eſt homogeneorum legem obſeruare, quod ex adiuncto paradigmate quiſque conijciet; in quo numerus affectus reſoluendus eſt 7110144; At verò ſuprapoſitus numerus eſt coefficiens longitudo, eſtque 12320; conſtitutis autem deſuper ſedibus quadraticis, vides coefficientem iam dictam ſubquadraticam produci vltra ipſum numerum cubum; quamobrem deleto puncto cubico primùm ad læuam occurrente, fit retroceſſio coefficientis ad ſequens punctum quadraticum; his autem ita diſpoſitis, & reperto latere primo, quadratum eius ducitur in coefficientem magnitudinem; productum autem 49280, notatur, vt deſinat ſub puncto; vbi coefficiens per retroceſſionem deuenit, atque conſiſtit illique ſubijcitur 8, cubus eiuſdem lateris: ſub puncto tamen quod cubi eſt ſedes, facta additione, ſumma 49360, ſubtrahatur à numero reſoluendo, vt remaneat numerus 2174144; deinde proceditur ad indagandam ſecundam figuram ad eum modum, quo ex adiuncto cernitur paradigmate, cum nimirum ſolidum affectionis ſub quadrato, maius eſt cubo.

Solidum cum diuidit per longitudinem coefficietis hic intelligitur oriri quadratum non radix.

Hoc autem eſt legem homogeneorum obſeruare prout ad preſes attinet.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo.	1 2 3	2 0		Subquadratica.	b
		.	. .	Puncta quadratica.	
Cubus reſoluendus.	7	1 1 0	1 4 4		z ſol.
	.	Q R.	Q R.	Puncta cubica.	
	C I	C II	C III		

Quoniam autem coefficiens ſub quadratica longitudo extra figuras afficientis cubi producitur; ideo fit deuolutio in ſequens punctum quadraticum, deleto quoq; puncto cubico primum ad læuam occurrente.

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis primi poſt deuolutionem.

b	Coefficiens longitudo.	1 2 3 2	0	
z ſol.	Cubus afficiens reſolvendus.	7 1 1 0	1 4 4	
		.	QR.	
		C 1	C 1 1	
$b a^2$	Solida ablatitia.	4 9 2 8	0	A quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
a^3		8		Cubus lateris primi.
$b a^2 + a^3$.	Summa ſolidorum ablatitiorum.	4 9 3 6	0	
z ſol. $- b a^2 - a^3$.	Reliquum reſoluendi afficientis cubi.	2 1 7 4	1 4 4	

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8	64

III. Edu-

III. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior eaq; præcipua.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi		4 9 2	8 0		$2ba.$
	Coefficiens longitudo.		1 2	3 2 0	$a + e$ $20 + 4$	$b.$
Cubi afficientis reſoluendi reliquum.		2	1 7 4	1 4 4		z ſol. $- ba^2 - a^3.$
Diuiſorum pars inferior	Triplum quadrati lateris primi.		1	2		$3a^2$
	Triplum latus primi.			6		$3a$
Summa diuiſorum.			5 0 6	3 8 0		$3a^2 + 3a + 2ba + b.$
Solida ablatitia facta à diuiſoribus	Superioribus.	1	9 7 1	2 0	A latere ſecundo in planum expletionis.	$2bae$
			1 9 7	1 2 0	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem.	be^2
			4	8	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.	$3a^2e$
				9 6	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.	$3ae^2$
	Inferioribus.			6 4	Cubus lateris ſecundi.	e^3
Summa ſolidorum auferenda æqualis reliquo reſoluendi afficientis cubi.		2	1 7 4	1 4 4		$2bae + be^2.$ $3a^2e + 3ae^2 + e^3 + 2bae + be^2 = z$ ſol. $- ba^2 - a^3.$

Sit propoſita ſuperior æquatio $1\,2\,3\,2\,0\,Q + 1\,C = 7\,1\,1\,\overset{2}{0}\,1\,4\,\overset{4}{4}.$ Vide in adiuncto paradigmate, quo pacto radix extrahatur; congruit enim hæc extractionis ratio ſuperiori; ſolùm ab ea differt, quòd compendioſiùs, & clariùs rem ipſam abſoluit.

SCHOLION.

HIC de more ſubijciam, Analyſin propoſita æquationis compendioſiùs, ac breuiùs, vt ſuperiùs etiam præſtitimus. Non enim animus erat methodum diuerſam tradere; nam vt inferiùs quoq; notabimus, omnis reſolutiua methodus, quæ contraria compoſitionis via perficitur, ab ea quam ſuperiùs in theorematibus explicuimus originem ducit. Solum igitur aliquid intereſſe poterit quantum ad ordinationis formam; itaque hoc in loco eamdem analyſin compendioſiùs tractabimus.

Si igitur fuerit æquatio propoſita 12320 Q ✱ 1 C ⊐ 7110134. *Facta ſignatione per puncta, prout reſolutio cubica expoſcit, & elicito ſingulari latere primo, vſque ad primum punctum à ſiniſtris, eius cubus ſubtractus ſit à numero reſoluendo, & ex reſiduo ſubtractum ſit ſolidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem; mox autem paratur diuiſor ad indagandum ſingulare latus ſecundum.*

Itaque ſub primo puncto ad leuam notetur Cubus primi ſingularis lateris 2, *ſubtrahatur verò ex numero reſoluendo, vt remaneat* 7102, *cui intelligatur addita ſequens figura* 1, *numeri reſoluẽdi, vt fiat* 71021, *à quo ſubtrahere oportet* 49280, *ſolidum factum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem vt remaneat* 21741, *cui annexa ſint figuræ* 4, 4, *numeri reſoluẽdi vt fiat* 2174144

Futuræ ſubtractionis gratia.

Futuræ diuiſionis gratia. Numeri intelligantur ſcribi ſuis ſedibus prout analyſeos leges requirent.

Paratur autem diuiſor ad indagandum ſecundum ſingulare latus. Sumatur triplum quadratum lateris primi, cui addatur triplum latus primum plus plano expletionis vnà cum coefficiente longitudine data, vt fiat 506380 (*ſumma autem diuiſorum fieri debet prout Analyſis requirit*) *per hoc autem aggregatum diuiſo nomero* 2174144, *fit quotiens, & ſingulare latus ſecundum* 4. *Ex reſiduo autem iam habito ſubtrahenda ſunt ſingularia ſolida ſuis ſedibus conſtituta, & quidem* 197120. *à latere ſecundo in planum expletionis, &* 197120, *à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, & præterea* 48, *à latere ſecundo in triplum quadratum primi, &* 96, *à quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum. Denique* 64, *cubus lateris ſecundi. His autem omnibus à reſiduo iam dicto ſublatis nihil remanet.*

```
                                  2   4
12320 Q ✱ 1 C ⊐ 7 1 1 0 1 4 4
                          8
                  -----------
                  7 1 0 2 1
                  4 9 2 8 0
                  -------------
                  2 1 7 4 1 4 4
                  1 9 7 1 2 0
                  -------------
                    2 0 2 9 4 4
                    1 9 7 1 2 0
                    -----------
                        5 8 2 4
                        4 8
                        -------
                        1 0 2 4
                          9 6
                        -------
                            6 4
                            6 4
                        -------
                            0 0

      1 2
          6
4 9 2 8 0
  1 2 3 2 0
-----------
5 0 6 3 8 0 Diuiſor
```

Numeroſa Analyſis æquationis in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Oblata autem æquatio ſit 1 C — 14 Q ⊐ 5760.

Speciosa reſolutio.

Cum deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam; atque adeo e duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit

ſit z ſol. Latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit $+ e$. Huius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, cubus verò $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$. Ducto autem quadrato in b, coefficientem longitudinem fiet ſolidum $ba^2 + 2bae$ be^2, cuius multa cubus afficitur. Hoc autem ſi de cubo negetur, vt ex ſuo Theoremate conſtat, fiet $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 - ba^2 - 2bae - be^2$, quod æquabitur z ſol. & per antitheſin, $3a^2e + 3ae^2 + e^3 - 2bae - be^2 = z$ ſol. $+ ba^2 - a^3$. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Eſt eadem procedendi ratio ad indagandam radicem cubi negatè affecti ſub quadrato, ac eſt in eruenda radice ex cubo affecto affirmatè. Solùm id quidem diſcriminis intercedit, quòd hìc in diuiſionibus attenditur ipſius coefficientis longitudinis, ac regularium in cubo puro diuiſorum differentia; at in cubo affecto affirmatè, debebat eorundem ſumma attendi; vt igitur in cubo per affirmationem affecto ad ſummam diuiſorum debebat applicatio fieri; hic ad corundem differentiam fieri debet; Hoc inſuper intercedit diſcriminis, quòd cum elicita ſingularia latera, in coefficientem quantitatem ducuntur, ipſa verò latera in expletionis planum (eſt autem planum expletionis, quod fit à coefficiente in duplum lateris primi, quemadmodum ſupra dictum eſt) ſolida inde facta, ſub congrua ſede deſinentia, qualem nimirum expoſcit multiplicationis ratio, addi debent propoſito negatè affecto cubo, cum alioquin in affirmarè affecto ſubducerentur, vel (quod idem eſt) auferuntur ablatitijs ſolidis, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate, in quo numerus 5760, eſt cubus affectus reſoluendus, coefficiens eſt 14, vides autem ſolida proſtaphæretica; & quidem ſolidum à lateris primo quadrato in coefficientem, puta 56, ſubtrahendum eſt ex cubo lateris primi, & differentia 24, ſubtrahenda ex 5760; deinde in eductione ſecundi lateris, diuiſorum ſuperiorum, & inferiorum differentia 686, numerus eſt, ad quem intelligendus eſt applicatus 3360, vt habeatur ſecundum ſingulare latus 4; ob id cum fuerit $1C - 14Q = 5760$, fit 1 R valor 24. *Numeroſa reſolutio explicatur.*

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem. *θεωρίαν.*

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	4	Subquadratica.	b
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica. — R 2 : 4; Q 4 16; C 8 64 (o o) — Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue ſingularia.	
Cubus affectus reſoluendus.	5	7 6 •		z ſol.
	•	Q R.	Puncta cubica.	
	C I	C II	a 20	
Solida proſtaphæretica. Ablatitium.	8		Cubus lateris primi.	a^3
Solida proſtaphæretica. Addititium.	5	6	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.	ba^2
Exceſſus ſolidorum ablatitiorum.	2	4		$a^3 - ba^2$.
Reliquum reſoluendi affecti cubi.	3	3 6 0		z ſol. $+ ba^2 - a^3$.

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

a † e
20 † 4

2 b a	Diuiſorū pars ſuperior.	Planum expletionis à coefficiēte in duplum lateris primi.		5 6	
				.	
b		Coefficiens longitudo.		1 4	
				.	
z ſol. † b a^2 − a^3.	Reliquum reſoluendi affectū cubi.		3	3 6 0	
3 a^2	Diuiſorum pars inferior.	Triplū quadratum lateris primi.	1	2	
3 a		Triplum latus primū.		6	
3 a^2 † 3 a − 2 b a − b.	Exceſſus diuiſorum inferiorum.			6 8 6	
3 a^2 e	Solida ablatitia.		4	8	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
3 a e^2				9 6	A lateris ſecundi quadrato in triplum latus primum.
e^3				6 4	Cubus lateris ſecundi.
3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3.	Summa ablatiorum.		5	8 2 4	
2 b a e.	Solida addititia.		2	2 4	A latere ſecundo in planum expletionis.
b e^2.				2 2 4	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.
2 b a e † b e^2.	Summa additiriorum.		2	4 6 4	
3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 − 2 b a e − b e^2 = z ſol. † b a^2 − a^3.	Exceſſus ablatitiorum æqualis reliquo reſoluendo affecto cubo.		3	3 6 0	

Quando coefficiens pluribus abundat ſimplicibus figuris quàm cubus ternis.

Plerumque contingit, vt coefficiens longitudo pluribus abundet ſimplicibus figuris, quàm cubus negatè affectus ſub quadrato ternis. Id autem arguit ſolidum afficiens maius eſſe reſoluendo cubo negatè affecto. Cubus autem acephalus hic appellatur. Vt autem analyſis inſtitui poſſit mutilo cubo præponetur ea numeralium circulorum multitudo; vt tot puncta cubica poſſint ei præfigi; quot ſimplices figuræ longitudini coefficienti. Prima verò longitudinis figura pergendo à læua ad dextram conſtituetur latus ſingulare primum, ſi cætera tamen conſentiant; ſin minùs figura proximè maior conſtitui poteſt, ſeruata eadem methodo quantum

ad

ad reliqua. Vt ſi proponeretur 1 C — 10 Q = 784; eſt quidem 784, cubus multatus ſolido ſub quadrato, & coefficiente longitudine 10; eſt verò ſolidum 10 Q, maius ſolido 784; quoniam coefficiens longitudo conſtat ſimplicibus figuris duabus; ſolidum verò 784, vnico puncto cubico ſignatur; quamobrem ſolido 784, reſoluendo præponetur numeralis circulus, & tunc demum ſua ſedes adijcietur coefficienti, cuius prima figura aſſumetur pro latere primo mutili cubi, &c.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	0	Subquadratica.	b
		. .	Puncta tot quadratica, quot cubica. (0 0 / R 1 4 / Q 1 16 / C 1 64 / a 10)	
Cubus reſoluendus acephalus.	0	7 8 4		z ſol.
	.	QR .	Puncta cubica.	
	C 1	C 1 1		
Solida pro ſtaphęretica. Ablatitium.	1		Cubus lateris primi.	a^3
Solida pro ſtaphęretica. Additium.	1	0	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.	ba^2
Excesſus	0	0		$a^3 - ba^2$.
Reliquum reſtituti mutili cubi.		7 8 4		z ſol. $+ b\, ba^2 - a^3$.

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

a † e
10 † 4

$2\,b\,a$	Diuiſorum pars ſuperior. { Planũ expletionis à coefficiente in duplũ lateris primi.		2 0	
b	Coefficiẽs lõgitudo.		1 0	
z ſol. $+\,b\,a^2 - a^3$.	Reliquum reſtituti mutili cubi.		7 8 4	
$3\,a^2$	Diuiſorum pars inferior. { Triplum quadratũ lateris primi.		3	
$3\,a$	Triplum lateris primum.		3	
$3\,a^2 + 3\,a - 2\,b\,a - b$.	Exceſſus diuiſorum inferiorum.		1 2 0	
$3\,a^2 c$	Solida ablatitia.	1	2	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
$3\,a\,c^2$			4 8	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
c^3			6 4	Cubus lateris ſecundi.
$3\,a^2 c + 3\,a\,c^2 + c^3$,	Summa ſolidorum ablatitiorum.	1	7 4 4	
$2\,b\,a\,c$,	Solida additilia.		8 0	A latere ſecundo in planum expletionis.
$b\,c^2$,			1 6 0	A lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem.
$2\,b\,a\,c + b\,c^2$,	Summa ſolidorum additiorum.		9 6 0	
$3\,a^2 c + 3\,a\,c^2 + c^3 - 2\,b\,a\,c - b\,c^2 = z$ ſol. $+\,b\,a^2 - a^3$,	Exceſſus ablatitiorũ æqualis propoſito reſoluendo cubo affecto.		7 8 4	

Quòd

Quòd ſi affectus negatè cubus, de cuius reſolutione agitur, tot conſtet ternis figuris, quot longitudo coefficiens ſingulis; accidit tamen aliquando eo prorumpere coefficientem, vt niſi quis cautè eius rationem habeat, & aduertat, non rarò deludatur in ipſamet exquirenda radice. Præſtat tunc ipſius coefficientis longitudinis cubo, vt intelligatur affectus propoſitus cubus augeri; & ex ita adaucto latus eruatur: propterea quod aut illud conſentaneum erit, aut conſentaneo proximè minus. Si verò latus ſic ſumptum duabus figuris conſtet; argumento eſt cubi acephali: fitq; deuolutio in antecedentia ad læuam.

Aduerte cum eſt cubus negate affectus &c.

Propoſita ſit æquatio $1C - 9Q = 980$. Quoniam igitur ſolidum 980, adiunctum cubo ex 9, facit ſolidum 1709; cuius latus, vt cubi, maius eſt, quàm 9, conſtans nimirum pluribus figuris, quàm vna; proinde fit deuolutio in antecedentia; & eſt cubus acephalus; eius autem analyſis inſtituitur, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate. Perſpicuum enim eſt radicem huius æquationis eſſe 14.

Alia æquatio proponitur, in cubus eſt acephalus.

Si igitur propoſita foret æquatio $1C - 9Q = 980$, fieret $1R$, valor 14, numerus quæſtioni ſatisfaciens. Si verò eſſet $1C - 7Q = 720$, fieret $1R$, valor 12. Hoc eodem artificio vti licet in explicandis æquationibus affirmatè affectis; vt ſi eſſet $1C + 6Q = 432$; quoniam cubus ex 6, eſt 216, qui ſubtractus de 432, relinquit 216, proinde dicemus 6, eſſe radicem quæſitam.

Aliæ æquationes ad idem.

Numeroſa Analyſis ęquationis in qua ſolidum ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa Cubi.

Oblata autem æquatio ſit $54Q - 1C = 13600$.

Cum deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam; atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens longitudo ſit b, comparationis homogeneum ſit z ſol. latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e. Huius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, cubus verò $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, ducto autem quadrato in b, coefficientem longitudinem, fit $ba^2 + 2bae + be^2$, ſolidum de quo negatur cubus, qui ſi de ipſo negetur, vt ex ſuo Theoremate conſtat, fiet $ba^2 + 2bae + be^2 - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = z$ ſol. Et per antitheſin fiet $2bae + be^2 - 3a^2e^2 - e^3 = z$ ſol. $+ a^3 - ba^2$, & propter amphiboliam $2bae + be^2 \sim 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = z$ ſol. $+ a^3 \sim ba^2$. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quę ad propoſitę ęquationis explicationem requiruntur.

Specioſa reſolutio.

In hac æquatione ſolidum ſub quadrato afficitur multa Cubi. Quando verò poteſtas negatur de homogenea ſub gradu, latus eſt anceps; atque adeo æquatio huiuſmodi de duobus lateribus explicabilis eſt; quorum vnum minus eſt; duabus tertijs partibus ipſius coefficientis, alterum verò eſt maius; quemadmodum dum erat æquatio $R - Q = N$, duplex erat latus ſatisfaciens, vnum quidem maius dimidio coefficientis, alterum verò minus. Exemplis autem omnia dilucida reddemus potiùs, quàm verbis.

Numeroſa reſolutio explicatur.

Propoſita igitur ſit æquatio $54Q - 1C = 13600$: numerus 13600, eſt ſolidum ſub quadrato affectum multa cubi. Cum autem negetur poteſtas de homogenea ſub gradu, latus eſt anceps; & hæc ipſa æquatio erit de duobus lateribus explicabilis, quorum vtrumq; Problemati ſatisfacit: vnum eorum minus eſt duabus tertijs partibus numeri 54, alterum autem maius.

Proponitur æquatio anceps.

Ordinabitur æquationis Analyſis, hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίας ad indagandam radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	4	Subquadratica.
		. .	
Cubus auulſus reſoluendus.	1 3	6 0 0	
	.	Q R.	
	C 2	C 1 1	
Solidum reſtituens.	8		Cubus lateris primi.
Solidum reſtitutum.	2 1	6 0 0	
Solidum principale minuens.	2 1	6	A lateris primi quadrato in coefficiens longitudinem
Exceſſus reſtituti.	0		

Lateris minoris inquiſitio. Eſt igitur huius æquationis latus 20, illudq; minus è duobus, de quibus æqualitas poteſt explicari; huius autem quadratum eſt 400; ad quod dum applicatur ſolidum 13600, oritur latitudo 34; quantum etiam remanet, ſubtractis 20, ex 54. Modo tres proportionales longitudines intelliguntur: quarum tertia eſt 34; compoſita verò ex ſecunda, & prima erit 20; latus autem alterum, de quo propoſita anceps æquatio explicabilis eſt, componetur ex ſecunda, & tertia. Itaque ſit latus alterum quæſitum 1 R; ergo 1 Q — 34 R ⩵ 680: & eruetur latus queſitum maius; nequit autem numeris rationalibus explicari.

1 Q — 34 R ⩵ 6 8 0
2 8 9
9 6 9
Latus malus ℞ 9 6 9 ✠ 1 7

Aggregatum enim ex ſecunda, & tertia eſt 1 R, proinde ſi tertia eſt 34, media erit 1 R — 34, rectangulum autem ſub 1 R — 34, & aggregato ex media, ac tertia erit 1 Q — 34 R, quod æquabitur 680, plano ex 20, compoſito ex prima, & ſecunda, in 34, tertiam. Quod ex trium proportionalium natura perſpicuum eſt.

I. Edu-

Analyſis Cubi auulſi à ſolido ſub quadrato, ad inueniendam radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.		
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.	∘ ∘ ——— R 3 ∘ Q 9 ∘ C 27 ∘	Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
Cubus auulſus reſoluendus.	2 4	3 0 0			
	.	Q R .	Puncta cubica.		
	C 1	C 1 1			
Solidum reſtituens.	2 7		Cubus lateris primi.		
Solidum reſtitutum.	5 1	3 0 0			
Solidum principale minuens.	5 1	3	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.		
Exceſſus reſtituti.	0				

Ad indagandam radicem maiorem.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.			b
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.	∘ ∘ ——— R 4 5 Q 16, 25 C 64, 125	Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue ſingularia.	
Solidum ſub quadrato multatum lateris cubo.	2 4	3 0 0				z ſol.
	.	Q R .	Puncta cubica.	2 40		
	C 1	C 1 1				
Solidum reſtituens.	6 4		Cubus lateris primi.			a^3
Solidum reſtitutum.	8 8	3 0 0				z ſol. + a^3.
Solidum principale minuendum.	9 1	2	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.			b a^2
Reliquum reſoluendi cubi.	2	9 0 0				b a^2 − z ſol. − a^3.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

$a + e$
$40 + 5$

$2ba$	Diuiſorum pars ſuperior.	Planum expletionis à duplo lateris primi in coefficientem.	4	56	
b		Coefficiens.		57	
$ba^2 - z$ ſol. $- a^3$.	Reliquum reſoluendi cubi.		2	900	
$3a^2$	Diuiſorum pars inferior.	Triplũ quadratum lateris primi.	4	8	
$3a$		Triplum latus primũ.		12	
$3a^2 + 3a - 2ba - b$.	Differentia diuiſorum.			303	
$3a^2e$	Solida ablatitia.		24	0	A latere ſecundo in triplum quadratum primi.
$3ae^2$			8	00	A quadrato ſecundi in triplum latus primum.
e^3				125	Cubus lateris ſecundi.
$3a^2e + 3ae^2 + e^3$.	Summa ſolidorum ablatitiorum.		27	125	
$2bae$.	Solida additiia.		22	80	A latere ſecundo in planum expletionis.
be^2.			1	425	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.
$2bae + be^2$.	Summa ſolidorum additiiorum.		24	225	
$3a^2e + 3ae^2 + e^3 - 2bae - be^2 = ba^2 - z$ ſol. $- a^3$.	Exceſſus ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendo cubo.		2	900	

Ad habendũ latus maius, habito minori.

Habito latere minori, maius etiam haberi potuiſſet hoc modo. Latus minus erat 30, eius quadratum eſt 900, ad quod applicetur ſolidum 24300, fit quotiens 27, numerus, qui etiam habetur ſubtracto numero 30, ex numero 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum tertia ſit 27, compoſita verò è ſecunda, & prima 30; latus igitur alterum, de quo æqualitas explicari poteſt, componitur

ponitur ex ſecunda, & tertia. Latus igitur maius, vt indagetur ſupponendum eſt; ſi fuerint tres quantitates proportionales, quadratum aggregati ex ſecunda, & tertia, minus rectangulo comprehenſo ſub eodem aggregato, & tertia, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub aggregato primæ, & ſecundæ, & ſub tertio. Vt ſint 6, 18, 54: aggregatum ex 18, & 54, eſt 72, cuius quadratum eſt 5184, à quo ſi

```
1 Q — 27 R = 810
      13 1/2         4
      13 1/2      ------
    ---------      3240
     182 1/4        729
                  ------
     729           3969
    -----          .  ..
      4            6  3
                  ------
                     2          31 1/2
                                13 1/2
                               -------
                                 45
```

dematur 3888, rectangulum comprehenſum ſub 72, & 54, remanet 1296; quantum fit ex 54, in 24, aggregatum ex prima, & ſecunda. Summa igitur, ex ſecunda, & tertia eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q; ſubtrahamus autem 27 R, productum à 27, tertiò termino in 1 R, aggregatum ex ſecundo, & tertio; fiet reſiduum 1 Q — 27 R; & æquabitur 810, producto ex 30, compoſito à primo, & ſecundo in 27, tertium terminum. Si verò huius æquationis radix eruatur, comperietur eſſe 45, vt ex hoc ſupraſcripto paradigmate colligitur. Eam autem eſſe trium quantitatum proportionalium naturam facillimè quidem oſtenditur.

Poſſumus eandem radicem maiorem hunc in modum conſequi. Dicebamus radicem eſſe ſummam ex ſecunda, & tertia magnitudine ex tribus proportionalibus. Reperiamus tres ipſas proportionales; minor enim inuenta 30, eſt ſumma ex prima, & ſecunda. Dico primum terminum eſſe 1 R, ſecundus erit 30 — 1 R, tertius eſt 27; productum ex primo in tertium; ſcilicet 27 R, æquatur quadrato medij, nempe 900 — 60 R ✢ 1 Q; per antitheſin autem fit æquatio, vt vides; & ita re- *Radix maior vt indagetur alia via.*

```
  87 R — 1 Q = 900
     43 1/2                        900
     43 1/2      7.569               4
  -----------   -------         --------
  1892 1/4         4              3600         7569
                                --------       3600
                                     4        ------
                  3969                         3969
                 ------            63
                    4             ----       43 1/2
                                    2.       31 1/2
                                            --------
                                  1 R valor 12
```

periemus 1 R, valorem eſſe 12. Si verò 12, ſubtrahatur ex 30, remanebit 18, pro ſecundo; erunt ergo 12, 18, 27, termini quæſiti; ac proinde ſumma ex ſecundo, & tertio nota erit 45.

Potuiſſet

Digitized by Google

Secundus terminus indagatur.

Potuiſſet etiam inueniri ſecundus: ille ſiquidem eſto 1 R; primus erit 30 — 1 R; tertius eſt 27: productum autem primi in tertium, puta 30 — 1 R, in 27, fit 810 — 27 R = 1 Q; eſt enim rectangulum ſub primo, & tertio, æquale quadrato ſecundi, ſeu medij: eſt igitur æquatio 1 Q + 27 R = 810, & huius radix eſt 18; itaq; medius terminus erit numerus 18.

Cùm primò habetur latus maius, quo Arte minus indagetur.

Si verò priùs habeatur latus maius, puta 45, habebitur minus hac arte. Quadratum enim ex 45, puta 2025, ſi conſtituatur diuiſor, ad quem nimirum applicetur 24300, orietur 12, latus, quod etiam habetur ſubductis 45, ex 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum prima ſit 12, compoſita ex ſecunda, & tertia 45; latus autem alterum, de quo propoſita æqualitas eſt explicabilis, componitur ex prima, & ſecunda: erit igitur æquatio 1 Q — 12 R = 540, & fit 1 R, numerus 30, & eſt latus minus ſuperiùs poſitæ æquationis. Aggregatum enim ex primo, & ſecundo, ponitur 1 R, vnde ſecundus erit 1 R — 12, rectangulum ſub 1 R, aggregato iam dicto, & 1 R — 12, nempe ſecundo æquale eſt 540, facto ex primo in aggregatum ex ſecundo, & tertio, quod ex trium proportionalium terminorum natura conſtat.

1 Q + 27 R = 810

$$\begin{array}{r} 13\tfrac{1}{2} \\ 13\tfrac{1}{2} \\ \hline 182\tfrac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{729}{4} \qquad \frac{3240}{4}$$

$$\begin{array}{r} 3240 \\ 729 \\ \hline 3969 \\ \dot{6}\ \dot{3} \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31\tfrac{1}{2} \\ 13\tfrac{1}{2} \\ \hline 18 \end{array}$$

Ordinabitur æquationis Analyſis hunc in modum.

b	Coefficiens longitudo.	12	0	Subquadratica. 0 0
z ſol.	Solidum ſub quadrato multarum lateris cubo.	55	296	R 2 4; Q 4 16; C 8 64
a^3	Solidum reſtituens.	8		Cubus lateris primi.
				2 20
z ſol. † a^3	Solidum reſtitutum.	63	296	
b a^2	Solidũ principale minuens.	48	0	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.
z ſol. † a^3 — b a^2.	Reliquum reſoluendi cubi.	15	296	

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Planũ expletionis à duplo lateris primi in coef. long.	4	8 0		$2ba$
	Coefficiẽs.		1 2 0	Subquadratica. $a + e$ / $20 + 4$.	b
	Reliquum reſoluendi cubi.	2 5	2 9 6		Z ſol. $+ a^3 - ba^2$.
Diuiſorum pars inferior.	Triplum quadratũ lateris primi.	1	2		$3a^2$
	Triplum latus primum.		6		$3a$
Differentia diuiſorum.		3	6 6 0		$2ba + b - 3a^2 - 3a$.
Solida addititia.		4	8	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.	$3a^2e$
			9 6	A quadrato ſecundi in triplum latus primum.	$3ae^2$
			6 4	Cubus lateris ſecundi.	e^3
Summa ſolidorum addititiorum.		5	8 2 4		$3a^2e + 3ae^2 + e^3$.
Solida ablatitia.		1 9	2 0	A latere ſecundo in planum expletionis.	$2bae$.
		1	9 2 0	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.	be^2.
Summa ſolidorum ablatitiorum.		2 1	1 2 0		$2bae + be^2$.
Exceſſus ablatitiorũ equalis reſiduo reſoluendo cubo.		1 5	2 9 6		$2bae + be^2 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = Z$ ſol. $+ a^3 - ba^2$.

SCHO-

SCHOLION.

Compendioſius. *SIT propoſita æquatio 120 Q − 1 C ⩵ 55296: facta deſignatione punctorum, & ordinatis ijs, quæ in generalibus præceptis tradita ſunt. Primum latus eſto 2, latus nimirum cubicum numeri 55; cubus ipſius eſt 8, quo addito ad 55, fit 63; huic autem annexis reliquis figuris fit 63296; modo ſumatur 4, quadratum primi lateris, ducatur in 120, coefficientem, & fit 480; ſubtrahatur à 632, vt remaneat 152, cui annexis figuris 96, fit 15296; ducatur autem 4, duplum primæ figuræ in 120, coefficientem, & fit 480, planum expletionis; Mox verò, & hoc expletionis planum, & coefficiens longitudo ſcribatur à latere atq; eorum aggregatum ſeruetur. Igitur ad indagandam ſecundam figuram, ſumo 12, triplum quadratum primæ; ſumo 6, triplum eiuſdem primæ figuræ; noto hos numeros, vt Analyſis requirit, ſubtraho diuiſores iſtos inferiores 126, à ſuperioribus, nimirum plano expletionis, & coefficiente ſimul ſumptis; ſeruata antecesſionis iam dicta cautela: ſubtraho igitur 126, à 4920; remanet 3660, pro diuiſore; ad quem facta applicatione numeri 15296, proueniat 4; ſeruata cautela, vt ſumatur pro quotiente numerus, in quem ſolida facta per congruas multiplicationes Analyſi ſatisfaciant &c. Scribo itaq; 48, ſolidum factum à latere ſecundo in triplum quadratum primi; item ſcribo 96, ſolidum factum à quadrato ſecundi in triplum latus primum; demum ſcribo 64, cubum lateris ſecundi: horum ſolidorum ſumma eſt 5824. Modo duco 4, latus ſecundum in 480, planum expletionis; fit 1920: deinde duco 16, quadratum ſecundi lateris in coefficientem; fit quoque 1920. Scribo hos numeros, vt vides, iuxta leges analyſeos ſyntheſi contrarias; & fit ſumma 21120; ab hoc autem numero ſubtraho 5824; & remanet 15296, numerus æqualis reliquo numero reſoluendo, &c. Non diſſimili modo ſi proponeretur æquatio 240 Q − 1 C ⩵ 947264; poterit explicari. Item ſi ſit æquatio 140 Q − 1 C ⩵ 397375; Præterea 100 Q − 1 C ⩵ 108375, non diſſimili artificio poterunt explicari.*

SECTIO II.

Numeroſa Analyſis æquationis, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Oblata autem æquatio ſit 1 QQ + 40 R ⩵ 332736.

Cum deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam, atque adeo è duobus ſingulariſius lateribus conſtare. Coefficiens ſolidum ſit b ſol. comparationis homogeneum

Speciosa reſolutio. ſit z pl. pl. Latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, itaut vniuerſum ſit a + e. Huius quadrato-quadratum eſt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, cui addito b ſol. a + b ſol. e nempe plano-plano à binomia radice, & coefficiente ſolido, fit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ + b ſol. a + b ſol. e, quod æqnabitur z pl. pl. & per antitheſin, vtrinque ſcilicet ſubtracto a^4 vna cum b ſol. a remanebit $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ + b ſol. e ⩵ z pla. pla. − a^4 − b ſol. a. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Si proponeretur 1 QQ + 40 R ⩵ 332736, & quæratur radix huius æquationis, cuius eſt ſenſus; *vt repertatur numerus, qui ductus in ſui cubum, & in 40, faciat 332736*; numerus hic 332736, eſt quadrato-quadratum affectum, non autem purum, eſt autem affectum adiunctione plano-plani ſub latere quadrato-quadrati, & dato ſolido 40.

Numeroſa reſolutio. Huius autem quadrato-quadrati affecti geneſis hoc ſolùm addit geneſi quadrato-quadrati puri, vt latus ſingulare quod primùm elicitur ducatur in ſolidum coefficiens; deinde latus ſecundum in idem ducatur. At verò ex affecto huiuſmodi quadrato quadrato elicientur latera. Sedes igitur vnitatum quadrato-quadrata metientium, per

quaternas

quaternas figuras diſtinguuntur, punctis à dextra ad læuam ſubtus adnotatis, quemadmodum diximus tractantes de Analyſi puri quadrato-quadrati. Quot autem ſedes quadrato-quadratorum, vel puncta numerantur; tot ſedes laterum ſimplicium conſtitui debent; cum coefficiens ſolidum ſit ſublaterale: conſtitui autem debent per ſingulas figuras deſuper, punctorum beneficio, vt in paradigmate videre licet; in vltima verò eorum ſede, quæ prima ſit à læua ad dextram, coefficiens ipſum ſolidum conſiſtat. Quamobrem dum coefficiens pluribus, quàm vna figura conſtet, in anteriora reliqua prorumpent ad læuam.

Præterea latera quidem eliciuntur, vt fit in analyſi quadrato-quadrati puri. Hic ſolùm addendum, vt coefficiens ſolidum, in diuiſorum numerum adſcribatur. Elicita ſingularia latera in ipſum ducuntur; & plano-planum, quod inde fit, debet deſinere ſub ſede coefficientis ſolidi, & auferendum eſt, ex affecto propoſito quadrato-quadrato. Deuique coefficiens in ſuccedentia loca ordine ſubijcitur, & ipſi diuiſores quoque reliqui ſubtus mouentur; hæc enim huius æquationis analyſis expoſcit. *Explicatur ſuperior doctrina.*

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens ſolidum.		4 0	Sublaterale.			b ſol.
Quadrato quadratum affectum reſoluendum.		. .	Tot puncta ſimplicium laterũ, quot	0 0	Tot numerales circuli, quot puncta quadrato-quadratica.	
	3 3	2 7 3 6	ſedes pũctaue quadrato quadratorũ	R 2 4		z pl. pl.
	.			Q 4 16		
	.	CQR.	Pũcta quadrato-quadratica.	C 8 64		
				QQ 16 256		
	QQ1	QQ:1				
Plano-plana ablatitia.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.			a^4
		8 0	A latere primo in coefficiens ſolidum.			b ſol. a
Summa plano-planorum ablatitiorũ.	1 6	8 0				a^4 + b ſol. a
Reliquum reſoluendi quadrato-quadrati.	1 7	1 9 3 6				z pl. pl. − a^4 − b ſol. a

 Ordinabi-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

b ſol.	Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens ſolidum.		4 0	Sublaterale.
z pl. pl. – a^4–b ſol. a	Quadrato-quadrati affecti reſoluendi reliquum.		1 7	1 9 3 6	a † c 20 † 4
$4a^3$.	Diuiſorum pars inferior	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
$6a^2$.		Sextuplũ quadratũ eiuſdẽ.		2 4	
4 a		Quadruplũ latus primum.		8	
$4a^3 † 6a^2 † 4a †$ b ſol.	Summa diuiſorum.		3	4 5 2 0	
[illegible]			1 2	8	A latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi.
$4a^3e$			3	8 4	A lateris ſecundi quadrato in ſextuplum quadratum primi.
$6a^2e^2$	Plano-plana ablatitia.			5 1 2	A cubo lateris ſecundi in quadruplum latus primum.
$4ae^3$				2 5 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.
e^4 b ſol. e.				1 6 0	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.
$4a^3e † 6a^2e^2 † 4ae^3 † e^4 †$ b ſol. e = z pl. pl. – a^4 – b ſol. a.	Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo reſoluendi affecti quadrato-quadrati.		1 7	1 9 3 6	

Si itaque propoſitā foret æquatio 1 Q Q ✱ 4 0 R = 3 3 2 7 3 6, & ſit 1 R valor 24.

S C H O L I O N.

Breuius. B*Reuiùs hoc modo. Primò ex* 33, *ſubtrahatur* 16, *quadrato-quadratum primi lateris ſingularis; mox à reſiduo* 172736, *ſubtrahatur* 80 (*ſcribi tamen debet vt vides*) *ſolidum à latere primo in coefficient ſolidum, & remanet* 171936. *Ad indagandum latus ſecundum paro diuiſorem hoc modo. Sumo* 32, *quadruplum cubum lateris primi, deinde* 2 4, *ſextuplum quadratum eiuſdem, mox autem* 8, *quadruplum eiuſdem, denique*

Digitized by Google

40; coefficiens ſolidum: omnes hi numeri diſpoſiti, vt in paradigmate vides, colligantur in vnam ſummam, fitque 34520, diuiſor; per quem diuiſis 171936, fit quotiens 4. Modo ſubtrahatur 128, nempe numerus factus à latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi; remanet 43: cui annexis 936, ſequentibus figuris, fit 43936; ex quo ſubducatur 384, numerus factus à lateris ſecundi quadrato in ſextuplum quadratum primi, & remanet 5536; ab hoc ſubtrahatur 512, numerus à cubo lateris ſecundi, in quadruplum latus primum; à reſiduo 416, ſubtrahatur 256, quadrato-quadratum lateris ſecundi; denique à reſiduo 160, ſubtrahatur 160, numerus productus à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, & nihil remanet.

		2 . . . 4
	1QQ ✱ 40R =	332736
		16
	32	172736
	24	80
	8	171936
	40	128
Diuiſor.	34520	43936
		384
		5536
		512
		416
		256
		160
		160
		0 0

Collocentur numeri ad eũ modum quem Analyſis requirit.

Plerumque contingit ſubgradualem coefficientem magnitudinem in anteriora produci vltra quadrato-quadratum affectum: vel eo ſaltem loci, vt ab ipſo coefficiens auferri nequeat. Hoc autem arguit quadrato-quadratum, non tàm affici, quàm afficere, quoniam minus eſt afficiente plano-plano. Eſt propterea coefficiens ad ſuccedentes ſedes ordine reuocanda, donec diuiſioni ſit locus, ſeu diuiſio poſſit inſtitui. Præſtat in huiuſmodi caſu initium ducere à diuiſione: animaduertendum verò quot punctis coefficiens retrocedet; tot etiam loca, ſiue puncta quadrato-quadratorum ſubtus adnotata, delenda eſſe, ea nimirum à quibus alioquin operis initium deſumendum fuiſſet.

Aduertẽ quædam circa ſuperiorem reſolutionem.

Quod ſi vltra poteſtatem affectam coefficiens non producatur, coefficiens inquam ſubgradualis longitudo; quod tamen oritur ex applicatione ad coefficientem ipſam, minus eſt poteſtate lateris, quod primùm eruitur: homogeneum affectionis eſt poteſtate maius, præcipuuſque diuiſor eſt ipſa ſubgradualis coefficiens. Quamobrem ſi fuerit æquatio, in qua coefficiens magnitudo ſubgradualis in anteriora prorumpat; procedendum vti diximus: ſi verò non producatur vltra poteſtatem affectam, quod verò oritur ex applicatione minus fuerit poteſtate lateris illius, quod primum elicitur; tunc homogeneum affectionis erit poteſtate maius, & ipſa ſubgradualis coefficiens magnitudo, tanquam præcipuus diuiſor aſſumitur. Hæc autem conſpicere licet ex infra ſcripti exemplis, vt quiſque poterit aduertere: quod enim oritur ex diuiſione numeri 3345264, minus eſt poteſtatis latere: quod primùm eruitur ex numero 334; hoc enim eſt 4, cuius quadrato-quadratum eſt 256, at quotiens ex diuiſione, per ſolidum coefficiens eſt 2.

Nota.

Eſt enim quadrato-quadratum, minus plano-plano, cum ſolidum eo ſitum ſit loci, vt ipſo diuidente oriatur 2, cum tamen quadrato-quadrati vltimi limes conſiſtat in 334, ex quo latus foret eliciendum 4. Vnde præſtat à diuiſione exordium ducere; principaliùs enim diuidit coefficiens &c.

Cæterum in huiuſmodi æquationibus, quemadmodum in cubicis quoque ſuperiùs monuimus; illud eſt magnopere obſeruandum; vt diuiſores congruis, atque

Animaduerſio.

 conſen-

conſentaneis ſedibus collocentur. Quando enim æquationis radix pluribus, quàm duobus ſingularibus lateribus conſtat, vt primùm ſi conſtet tribus; iam ſuperiùs aduertimus in æquationibus cubis, triplum lateris primi in diuiſorum numero, elicito ſingulari latere primo, ſuſcipere incrementum à ſede, quare operæ pretium duximus addere huiuſmodi diuiſori in ſpecioſa Analyſi numeralem circulum, prout analyſis ipſa requirit. Quod in alijs æquationibus, ſi quadraticas excipias, obſeruandum eſt. In poſtremo autem latere nulla eſt cura, cum diuiſores omnes communi extremo terminentur. Cæterum & ſedem congruam etiam ſingula effecta homogenea ſibi vendicant, quod non ſemel adnotatum fuit.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem. *θεωρίαν.*

Cum plano-planum maius eſt quadrato-quadrato.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b ſol.	Coefficiens ſolidum.	1 2 5	5 6 2	Sublaterale.
z pl. pl.	Quadrato-quadratum afficiens reſoluendum.	3 3 4	5 2 6 4	
		.	C Q R.	
		QQ 1	QQ 1 1	
b ſol. a	Plano-plana ablatitia.	2 5 1	1 2 4	A latere primo in coefficiens ſolidum.
a^4		1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.
b ſol. a + a^4	Summa plano-planorum ablatitiorum.	2 6 7	1 2 4	
z pl. pl. − b ſol. a − a^4	Reliquum reſoluendi afficientis quadrato-quadrati.	6 7	4 0 2 4	

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8,	64
QQ	16	256
	a	
	20	

II. Eductio

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens ſolidum.	1 2	5 5 6 2		b ſol.
				$a + e$ 20 + 4	
Reliquum reſoluendi quadrato-quadrati.		6 7	4 0 2 4		z pl. pl. − b ſol. a − a^4
Diuiſorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2		$4a^3$.
	Sextuplum quadrati eiuſdẽ.		2 4		$6a^2$.
	Quadruplum latus primum.		8		4 a
Summa diuiſorum.		1 6	0 0 4 2		$4a^3 + 6a^2 + 4a +$ b ſol.
Plano-plana ablatitia.		5 0	2 2 4 8	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.	b ſol. e
		1 2	8	A latere ſecundo in quadruplum cubum primi.	$4a^3e$
		3	8 4	A quadrato ſecundi in ſextuplum quadratum primi.	$6a^2e^2$
			5 1 2	A cubo lateris ſecundi in lateris primi quadruplum.	$4ae^3$
			2 5 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	e^4
Summa plano-planorum auferenda, æqualis reliquo reſoluendi afficientis quadrato quadrati.		6 7	4 0 2 4		b ſol. e $+ 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 =$ z pl. pl. − b ſol. a − a^4.

Numeroſa Analyſis æquationis in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Oblata autem æquatio ſit 1 QQ − 200 R ⊒ 404976.

Cum deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam; atque adeo è duobus ſingularibus lateribus conſtare. Coefficiens ſolidum ſit b ſol. comparationis homogeneum ſit z plano-planum. Latus ſingulare primum eſto a, ſecundum verò e, ita vt vniuerſum ſit $a + e$. Huius quadrato-quadratum eſt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ à quo ſi dempſeris plano-planum ſub latere, datoq; coefficiente ſolido, nempe b ſol. a + b ſol. e, remanebit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ − b ſol. a − b ſol. e, quod æquabitur z plano-plano. Et per antitheſin vtrinque addito b ſol. a, & ſubtracto a^4 remanebit $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$ − b ſol. e ⊒ z pl. pl. + b ſol. a − a^4. Hunc igitur in modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur. *Specioſa reſolutio.*

Si

Si quis benè perceperit hactenus præcepta tradita de æquatione quadrato quadrati affecti adiunctione plano-plani ſub latere, datoq; ſolido coefficiente, ſeruatis præceptis, vt ſcilicet loco ſubtractionis adhibeatur additio: haud difficile hanc etiam æquationum explicabit. Quapropter, ſi proponeretur æquatio huiuſmodi 1 QQ − 2000 R ⊐ 404976, inſtituetur Analyſis, vt in ſequenti paradigmate licet intueri.

Ordinabitur autem æquationis Analyſis hunc in modum iuxta ſuperiorem θεωρίαν.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b ſol.	Coefficiens ſolidum.	2	0 0 0	Sublaterale.		0	0
			. .	Tot puncta ſimplicia. &c.	R	2	6
z pl.pl.	Quadrato-quadratum affectum reſoluendum.	4 0	4 9 7 6		Q	4,	36
					C	8,	216
		.	CQR .	Puncta quadrato-quadratica.	QQ	16,	1296
		Q 1	QQ 1 1			a 20	
a^4	Plano-plana proſtaphæretica.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.			
b ſol. a		4	0 0 0	A latere primo in coefficiens ſolidum.			
a^4 − b ſol. a	Exceſſus plano-planorum, &c.	1 2	0 0 0				
z pl.pl. + b ſol. a − a^4.	Reliquum reſoluendi quadrato-quadrati.	2 8	4 9 7 6				

II. Edu-

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Coefficiens ſolidum.		2 0 0 0	Sublaterale.	$b\ ſol.$
Reliquum reſoluendi quadrato-quadrati.		2 8	4 9 7 6	$a + e$ $20 + 6$	$z\ pl.\ pl. + b ſol. a - a^{4}$
Diuiſorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2		$4a^{3}.$
	Sextuplum quadratum eiuſdem.		2 4		$6a^{2}.$
	Quadruplũ latus primum.		8		$4a.$
Exceſſus, ſiue differentia diuiſorum.		3	2 4 8 0		$4a^{3} + 6a^{2} + 4a - b\ ſol.$
Plano-plana ablatitia.		1 9	2	A latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi.	$4a^{3}e$
		8	6 4	A quadrato lateris ſecundi in ſextuplum quadratum primi.	$6a^{2}e^{2}.$
		1	7 2 8	A cubo lateris ſecundi in quadruplum latus primum.	$4ae^{3}.$
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	$e^{4}.$
Summa plano-planorum.		2 9	6 9 7 6		$4a^{3}e + 6a^{2}e^{2} + 4ae^{3} + e^{4}$
Plano-planum auferendum.		1	2 0 0 0	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.	$b\ ſol.\ e.$
Exceſſus æqualis reliquo reſoluendi affecti quadrato-quadrati.		2 8	4 9 7 6		$4a^{3}e + 6a^{2}e^{2} + 4ae^{3} + e^{4} - b ſol. e = z\ pl.\ pl. + b ſol. a - a^{4}.$

Numero-

nis $\frac{2}{3}$; fiet $2\,Q + 13\,R = 464\frac{10}{18}$. Ductis omnibus in 18, fiet $36\,Q + 234\,R = 8362$. Quare etiam erit $1\,Q + \frac{234\,R}{36} = \frac{8362}{36}$.

Quandoquidem radix à quadrato diſtat tantùm per radicem, propterea in expurgata æquatione idem radicum numerus redibit.

Quoniàm verò numerus abſolutus diſtat à quadrato per quadratum: propterea denominator 36, quadraticè multiplicetur, vt proueniat 1296, quo ducto in 8362, fit 10837152, quo diuiſo per 36, fit quotiens 301032; Itaq; expurgata æquatio erit $1\,Q + 234\,R = 301032$.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 434, qua diuiſa per communem multiplicantem 36; fit quotiens $12\frac{1}{18}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum IV. Propoſita ſit æquatio $1\frac{1}{4}\,Q + 4\frac{1}{3}\,R = 44\frac{13}{16}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi; Ductis omnibus in 4; fiet $5\,Q + \frac{52\,R}{3} = 179\frac{1}{4}$, iterum ductis omnibus in 3; fiet $15\,Q + 52\,R = 537\frac{3}{4}$; omnibus deinde ductis in 4, fiet $60\,Q + 208\,R = 2151$. Quare etiam $1\,Q + \frac{208}{60}\,R = \frac{2151}{60}$.

Quando-quidem radix à quadrato tantùm diſtat per radicem; propterea, in expurgata æquatione, idem radicum numerus redibit.

Quoniam verò numerus abſolutus, à quadrato diſtat per quadratum; multiplicetur 60, denominator, quadraticè in ſe, vt fiat 3600, quo ducto in 2151, fit 7743600, quo ducto in 60, prouſilit 129060; Itaque expurgata æquatio erit $1\,Q + 208\,R = 129060$.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 270; qua diuiſa per 60; numerum multiplicantem, fit quotiens $4\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Imo etiam ſi nulla occurreret fractio, poſſumus vti hac methodo ad indagandam radicem.

Exemplum V. Propoſita ſit æquatio $1\,Q + 10\,R = 96$. Et ſit exhibenda radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi; Ductis omnibus in quemuis numerum, verbigratia 3, fiet $3\,Q + 30\,R = 288$. Diuiſis omnibus per 3, vt fiant aliorum terminorum fractiones, & erit $1\,Q + \frac{30\,R}{3} = \frac{288}{3}$. Quare, ob rationem ſæpe allatam, in æquatione expurgata, redibit numerus radicum; Sed 3, quadraticè ductus facit 9, in quem ductus 288, facit 2592, quo diuiſo per 3, fiet 864; Itaque æquatio expurgata erit $1\,Q + 30\,R = 864$.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaque eſt 18; numerus, quo diuiſo per 3, multiplicantem fit quotiens 6, & radix initio æquationis propoſitæ.

Nota. Itaq; ſi contingeret aliquando, vt in æquatione nullus terminus eſſet fractio, vel fractionem haberet adiunctam, radix tamen vel eſſet fractio, vel haberet adiunctam fractionem, hunc in modum explicaretur.

Exemplum VI. Propoſita ſit æquatio $1\,Q + 16\frac{1}{3}\,R = 8\frac{5}{12}$, & ſit exhibenda radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, ergo etiam $1\,Q + \frac{49}{3}\,R = \frac{101}{12}$. Atq; adeo etiam $3\,Q + 49\,R = \frac{303}{12}$. Deniq; etiam $36\,Q + 588\,R = 303$. Omnibus autem diuiſis per 36, fiet $1\,Q + \frac{588\,R}{36} = \frac{303}{36}$. Quare in æquatione expurgata redibit idem radicum numerus, cum radix a quadrato diſtet per radicem. Deinde.

Quoniam numerus abſolutus diſtat à Q per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 36, vt fiat 1296, quo ducto in 303; fiet 392688, quo diuiſo per 36, fiet quotiens 10908, & comparationis homogeneum; Itaq; expurgata æquatio erit $1\,Q + 588\,R = 10908$.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 18, qua diuiſa per 36, cummunem multiplicantem, fiet quotiens $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum VII. Propoſita ſit æquatio $1\,Q - \frac{3\,R}{4} = 135$. Et exhibenda ſit radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam æquatio $1\,Q - \frac{3\,R}{4} = \frac{540}{4}$.

Quandoquidem radix diſtat à quadrato tantùm per radicem; propterea in æquatione

tione expurgata ; redibit idem radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus à quadrato diſtat per Quadratum; propterea 4, denominator fractionis, quadraticè multiplicetur, vt fiat 16, quo ducto in 540, fit 8640, quo diuiſo per 4, emergit 2160. Itaq; expurgata æquatio erit 1 Q — 3 R = 2160.

Huius autem æquationis radix, analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 48, qua diuiſa per 4, numerum multiplicantem, proueniet 12, radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 1 Q — 6 R = 81 $\frac{1}{4}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam 1 Q — $\frac{24 R}{4}$ = $\frac{325}{4}$. *Exemplum VIII.*

Quandoquidem radix à Quadrato diſtat per radicem tantùm ; propterea in expurgata æquatione redibit idem radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus diſtat per quadratum; ducatur 4, in ſe quadraticè, vt fiat 16, quo ducto in 325, fit 5200; quo diuiſo per 4, prouenit 1300; Itaque expurgata æquatio erit 1 Q — 24 R = 1300.

Huius autem æquationis radix, analyticè comparari poterit, eaq; erit 50, qua diuiſa per 4, communem multiplicantem, fit quotiens 12 $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 1 $\frac{1}{4}$ Q — 6 R = 120 $\frac{5}{16}$. Et exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, omnibus ductis in 4, erit $\frac{20 Q}{4}$ — 24 R = $\frac{7700}{16}$ omnibus ductis in 16, fiet 80 Q — 384 R = 7700 ergo erit 1 Q — $\frac{384 R}{80}$ = $\frac{7700}{80}$. *Exemplum IX.*

Quandoquidem radix à quadrato diſtat per radicem ; proinde in æquatione expurgata, redibit idem radicum numerus; Quoniam verò numerus abſolutus à quadrato diſtat per quadratum. Ducatur 80, in ſe quadraticè, vt fiat 6400, quo ducto in 7700; fiet 49280000; quo diuiſo per 80; proueniet quotiens 616000; Itaq; expurgata æquatio erit 1 Q — 384 R = 616000.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt; eaq; eſt 1000; qua diuiſa per 80, communem multiplicantem, fiet quotiens 12 $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 20 $\frac{1}{2}$ R — 1 Q = 102. Et exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $\frac{41}{2}$ R — 1 Q = 102, atque adeo etiam $\frac{41 R}{2}$ — 1 Q = $\frac{204}{2}$. *Exemplum X.*

Quandoquidem radix à quadrato diſtat per radicem, idem redibit radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus, à quadrato diſtat per quadratum. Ducatur 2, in ſe, vt fiat 4, quo ducto in 204, fit 816, quo diuiſo per 2, fit 408. Itaq; expurgata æquatio erit 41 R — 1 Q = 408.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 24; numerus, quo diuiſo per 2, communem multiplicantem fit quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 1 C ✠ 10 $\frac{1}{2}$ R = 1854. Et exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam 1 C ✠ $\frac{21}{2}$ R = 1854; Atq; adeo etiam erit 1 C ✠ $\frac{21}{2}$ R = $\frac{3708}{2}$. *Exemplum XI.*

Quandoquidem radix à Cubo diſtat per quadratum; proinde denominator 2, quadraticè multiplicetur, vt fiat 4, quo ducto in 21, fit 84, quo diuiſo per 2; denominatorem iam dictum fit 42; & erit numerus radicum in noua æquatione. Quoniam verò numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum, propterea denominator 2, cubicè multiplicetur, vt fiat 8, quo ducto in 3708, numerum abſolutum fit 29664, quo ducto per 2, denominatorem prædictum fit quotiens 14832, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Itaq; expurgata æquatio erit 1 C ✠ 42 R = 14832.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 24, qua diuiſa per 2, communem multiplicantem, fiet quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 1 $\frac{1}{3}$ C ✠ 10 $\frac{1}{2}$ R = 2430; Et exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiusmodi, erit etiam $\frac{4}{3}$ C ✠ $\frac{21}{2}$ R = 2430. Omnibus ductis in 3, fiet 4 C ✠ $\frac{63}{2}$ R = 7290. Omnibus ductis in 2, fiet 8 C ✠ 63 R = 14580. Omnibus applicatis ad 8, fiet 1 C ✠ $\frac{63 R}{8}$ = $\frac{14580}{8}$. *Exemplum XII.*

Quan-

Quandoquidem radix diſtat à Cubo per quadratum, quadraticè multiplicetur 8, denominator, vt fiat 64, quo ducto in 63, fit 4032, quo diuiſo per 8, prouenit 504, pro numero radicum nouæ æquationis. Deindè quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum, cubicè multiplicetur 8, itidem denominator, vt fiat 512, quo ducto in 14584, proueniet 7464960, quo diuiſo per eundem numerum 8, fit 9330120, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis; Itaq; æquatio expurgata erit $1\,C + 504\,R = 9330120$.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt numerus 96, qua diuiſa per 8, communem multiplicantem, fit quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XIII. Propoſita ſit æquatio $1\,C + 6\tfrac{1}{4}\,R = 119\tfrac{1}{4}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $1\,C + \frac{25\,R}{4} = \frac{477}{4}$.

Quandoquidem radix diſtat à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 4, denominator, vt proueniat 16, quo ducto in 25, numeratorem fractionis radicum, fit 400, quo diuiſo per 4, denominatorem iam dictum, fit quotiens 100, & numerus radicum nouæ æquationis. Deinde quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum; proinde cubicè multiplicetur 4, denominator, vt fiat 64, quo ducto in 477, fit 30528. Hoc autem diuiſo per 4, denominatorem eundem, fit 7632, comparationis homogeneum expurgatæ æquationis. Itaq; æquatio expurgata erit $1\,C + 100\,R = 7632$.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 18, qua diuiſa per communem multiplicantem 4; fit quotiens $4\tfrac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XIV. Propoſita ſit æquatio $100\,R - 1\,C = 235\tfrac{7}{8}$, & ſit exhibenda radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, proinde etiam erit $100\,R - 1\,C = \frac{1887}{8}$, atq; adeo etiam $800\,R - 8\,C = 1887$. Omnibus nimirum ductis in 8. Quamobrem etiam erit $\frac{800\,R}{8} - 1\,C = \frac{1887}{8}$.

Quandoquidem radix diſtat à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 8, vt fiat 64, quo ducto in 800, fit 51200; quo diuiſo per 8, fiet 6400, pro numero radicum nouæ æquationis. Deinde quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum; proinde, cubicè multiplicetur 8, vt fiat 512, quo ducto in 1887, fiet 966144, quo diuiſo per 8, fiet 120768, numerus pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Itaque æquatio expurgata erit $6400\,R - 1\,C = 120768$.

Huius autem æquationis radix, Analyticè comparari poteſt, eaque eſt 68; quo diuiſo per 8, communem multiplicantem, fit $8\tfrac{1}{2}$, radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XV. Propoſita ſit æquatio $1\,QQ + 6\tfrac{1}{2}\,R = 282$; & exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $1\,QQ + \frac{13\,R}{2} = 282$; atque adeo $1\,QQ + \frac{13\,R}{2} = \frac{564}{2}$.

Quandoquidem radix diſtat à QQ, per cubum; propterea cubicè multiplicetur 2, vt fiat 8, quo ducto in 13, fit 104, quo diuiſo per 2, denominatorem, fit quotiens 52, & coefficiens nouæ æquationis. Deinde quoniam numerus abſolutus, diſtat à QQ, per QQ; propterea quadrato-quadraticè multiplicetur 2, denominator vt proueniat 16, quo ducto in 564, proueniet 9024, hoc autem diuiſo per 2, denominatorem fit 4512, comparationis homogeneum nouæ æquationis. Itaque æquatio expurgata erit $1\,QQ + 52\,R = 4512$.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaque eſt 8; quo diuiſo per 2, communem multiplicantem, fit quotiens 2, radix initio æquationis propoſitæ &c.

De

Huius æquationis explicatio difficilis.

Laborioſum eſt, maximeque difficile, huiuſmodi æquationes explicatas reddere; cum latus ſit anceps, quod aliàs, facilioris eſſet indagationis. Non præteribo tamen haud rarò contingere, vt reperto latere vno, citra difficultatem, omnis deinde labor, in alterius inquiſitione ſit. Sunt in his tamen limites, ac fines, quos vltra, citraque conſiſtere non poſſunt. Intra fines igitur certos latera ipſa continentur; quemadmodum, & in alijs æquationibus de quibus paulo infra nonnulla ſubijciam.

Reſoluuntur ſuperius poſitæ duæ æquationes.

Et quidem, ad eas quod attinet; in quarum conſideratione modo verſamur. Illud exploratum eſto; vtriq; radici, maiori ſcilicet, & minori, cedere quantitatem ortiuam ex applicatione comparationis homogenei ad coefficiens ſolidum, & vtramque etiam ſuperari à cubica radice eiuſdem ſolidi coefficientis; quod erat operæ pretium aduertere; idque in ſupra poſito paradigmate licebit intueri; in quo ortiua quantitas ex applicatione iam dicta, cedit 8, radici minori, atque adeo multo magis 27^1, radici maiori. Sed radix cubica ſolidi coefficientis 27755, ſuperat, ſiue excedit 27, radicem maiorem, atq; adeo multo magis 8, radicem minorem. Quod ſi propoſita foret æquatio 26624 R — 1 QQ = 307200. Radix è duabus, de quibus æquatio poteſt explicari, eſt 24; & quidem maior; hæc autem, & minor etiam, cedit radici cubicæ prædicti ſolidi coefficientis 26624, & vtraq; ſuperat quantitatem ortiuam, ex applicatione comparationis homogenei ad ſolidum coefficiens.

Reſolutio æquationis prioris ſuperius poſita.

Præterea ſi fuerit æquatio 26624 R — 1 QQ = 130816 radix è duabus, de quibus poteſt explicari eſt 28, & quidem maior, hæc autem, & minor etiam ſuperat ortiuam quantitatem ex applicatione comparationis homogenei ad ſolidum coefficiens; & vtraq; cedit cubicæ radici coefficientis ſolidi. Sed hac de re ſuo loco.

Itaq; cubus radicis minoris cedit quadranti coefficientis ſolidi, & cubus maioris excedit eundem, quod etiam Vietæ perſpectum fuit; Radix igitur vtraq; tam maior quàm minor, excedit quantitatem ortiuam prædictam; Vtraq; itidem cedit radici cubicæ eiuſdem ſolidi coefficientis. Imo è duabus minor, vt enunciauimus, cedit lateri cubico quadrantis ſolidi coefficientis.

Superiorum autem æquationum reſolutio ſic ſe habet. Ad primam illam quod attinet, nempe 26624 R — 1 QQ = 307200; Hunc in modum eſt procedendum. Facta ſignatione per puncta. Eruatur latus quadrato-quadratum à 30; nempe vſque ad primum punctum à ſiniſtris, illudq; ſit 2, cuius quadrato-quadratum eſt 16, quod conſtitutum in debita ſede additum ad 307200, facit 467200; Ducatur autem idem 2, latus ſingulare primum in 26624, coefficiens ſolidum, vt ſiat 532480, à quo conſtituto in ſua ſede ſi ſubduxeris 467200, remanet 65280. Modo parandus eſt diuiſor ad indagandum ſingulare latus ſecundum. Sumatur igitur 32, quadruplus cubus lateris primi, item 24, ſextuplum quadratum eiuſdem, præterea 8, quadraplum eiuſdem, quibus in vnam ſummam collectis fit 34480, à qua ſi dempſeris 26624, coefficiens ſolidum; remanebit 7856, pro diuiſore per quem diuiſo 65280, reſiduo iam habito, fit quotiens 4. Nunc autem ſume plano-planum à latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi, item 384, factum à quadrato ſecundi in ſextuplum quadratum primi; inſuper 512, factum à cubo ſecundi in quadruplum latus primum, præterea 256, quadrato-quadratum lateris ſecundi, quibus in vnam ſummam collectis, fit 171776, à quo ſi dempſeris 106496, factum à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, remanet numerus 65280, reſiduo ſuperiori, æqualis Radix autem minor, qua arte indagetur inferius explicabo.

Secũda æquationis explicatio.

Non diſſimiliter procedendum erit in explicanda æquatione 26624 R — 1 QQ = 130816, cuius radix maior eſt 28; minor infra dicetur. Facta enim ſignatione per puncta; erue latus quadrato-quadratum ex numero, vſque ad primum punctum à ſiniſtris nempe ex 13; Singulare autem latus primum callidè dicemus 2, cuius quadrato-quadratum 16, in ſuo ſede conſtitutum, & additum ad 130816, facit 290816, quo dempto ex 532480, remanet 241664. Nunc inquirendum eſt ſecundum ſingulare latus, in cuius gratiam paro diuiſorem non diſſimili modo ac ſupra, atq; demum reperto ſingulare latere ſecundo 8; procedo, veluti ſuperius; vt denique ſit reſolutio omnis ad finem perducta.

SECTIO III.

Ex ſuprapoſitis præceptis omnes æquationes in infinitum abuentes explicari poſſe; omnemque aliam methodum ab ea, quæ ſupra poſita eſt, deduci.

Epilogus ſupradictorum.

POteſtates in duplici eſſe diſcrimine non ſemel aduertimus. Alia ſiquidem Poteſtas eſt pura, ſiuè ſimplex, alia compoſita, ſiue affecta. Cum autem aggrederemur numeroſam Poteſtatum reſolutionem, exorſi ſumus, vt par erat, a Poteſtatibus ſimplicibus, atq; prius, earum Analyſin beneficio Speciosæ Logiſtices tractantes, vt fontem aperiremus, vnde Numeroſa reſolutio deriuatur. Hinc gradum fecimus ad Analyſin Poteſtatum affectarum. Et quoniam clariùs, earum reſolutio tractatur, concepta æquationis forma; proinde huiuſmodi Poteſtates affectas collatas cum comparationis homogeneo conſiderandas aſſumpſimus, ſic autem illas opitulante eadem ſpecioſa Logiſtica tractauimus, vt inde Numeroſa Poteſtatis affectæ ſeu, quod idem eſt, æquationis compoſitæ reſolutio deprompta cuique conſtaret.

Quæ dicta ſūt de poteſtatibus puris.

De Poteſtatibus autem puris loquentes, ad Cubo-cubum tantummodo peruenimus, ibique ſiſtimus; Cum præceptis ibi traditis vnuſquiſque inſtructus, facillimè ſit modum obſeruandum, in reſolutione cæterarum poteſtatum aſſecuturus.

De affectis.

Ad Poteſtates affectas, atque adeo ad compoſitas æquationes, quod attinet, Quadrato-quadraticas non tranſcendimus, cum in ijs Quadrato quadratum afficitur ſub latere, cæteras, quæ quidem in infinitum abeunt, prætermittentes, cum ex præceptis traditis, omnes quocunque modo ſint affectæ, poſſint feliciter explicari.

Proponuntur ea de quibus eſt differendum.

Non pigebit tamen, hic ſubijcere exemplum æquationis multipliciter affectę, primo tamen allatis in medium æquationum affectarum exemplis iuxta quandam, compendioſiorem rationem, quam in æquatione multiplicis affectionis breuitati ſtudentes obſeruauimus, non immutata cęteroquin reſolutiua methodo, quam ſuperiùs docuimus.

Illud autem non præteribo; videlicet hac reſolutionis compendioſiori forma, tum allatas, cùm cæteras omnes æquationes, & puras, & affectas explicari commodiſſimè poſſe. Prætulimus tamen formam Vietæam, ranquam clariorem atq; adeo longe opportuniorem, ad rem de qua agitur, explicandam. Cùm autem quis in reſoluendo aſſueuerit poterit vti tantùm ſpeciebus, & artificio ſpecioſæ Logiſtices, cuius præſidio numeros poteſtatis oblatæ ſumma facilitate tractabit.

Si igitur, vt hinc exordium ducamus propoſitum fuerit Analyſin inſtituere puri Quadrati, hunc qui ſequitur in modum breuiter illam licebit abſoluere.

ANALY-

Analysis quadrati puri.

Si fuerit propoſitum Quadratum purum reſoluendum 4096. Illud quidem dicatur z^2. Deprehenſum autem ſit latus eius binomium eſſe; propterea latus ſingulare primum eſto a, ſecundum vero e, vt vniuerſum ſit a † e. Ordinabitur autem analyſis ad eum, qui ſequitur modum, vt in adiuncto paradigmate cuique cernere licebit.

Proponitur æquatio pura quadrati.

Eductio lateris ſingularis primi.

1 Q ⊏⊐ 4 0 9 6	a	z^2
. .	60	
3 6		a^2
4 9 6		$z^2 - a^2$.

Eductio lateris ſingularis ſecundi.

	4 9 6	a † e 60 † 4	$z^2 - a^2$.
Diuiſor	1 2		2 a.
	4 8		2 a e.
	1 6		e^2.
	4 9 6		$2ae \dagger e^2$ ⊏⊐ $z^2 - a^2$.

Declarantur ſuperius dicta

Si enim latus ſingulare primum eſt a; ſecundum verò e, vt vniuerſum ſit a † e, vniuerſi lateris quadratum erit $a^2 \dagger 2ae \dagger e^2$, hoc autem æquabitur z^2, & per anthiteſin fiet $2ae \dagger e^2$ ⊏⊐ $z^2 - a^2$. Sed hæc iam cumulatè ſuperius explicata fuerunt.

Analysis cubi puri.

Sit propoſitus Cubus purus reſoluendus 592704.

Proponitur æquatio pura cubi.

Si propoſitus ſit cubus purus reſoluendus 592704. Ille quidem dicatur z^3; cumque deprehenſum fuerit latus eius eſſe binomium. Singulare latus primum eſto a, ſecundum vero e, vt vniuerſum ſit a † e, Ordinabitur autem analyſis ad eum qui ſequitur modnm, vt in adiuncto paradigmate cuique cernere licebit.

Eductio lateris ſingularis primi.

1 C ⊏⊐ 5 9 2 7 0 4	a	z^3
. .	80	
5 1 2		a^3
8 0 7 0 4		$z^3 - a^3$

Eductio lateris ſingularis ſecundi.

	8 0 7 0 4	a † e 80 † 4	$z^3 - a^3$.
	1 9 2		3 a^2.
	2 4		3 a.
Diuiſor	1 9 4 4		$3a^2 \dagger 3a$.
	7 6 8		$3a^2e$.
	3 8 4		$3ae^2$.
	6 4		e^3.
	8 0 7 0 4		$3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$ ⊏⊐ $z^3 - a^3$.

Declarantur ſuperius dicta

Si enim ſingulare latus primum eſt a, ſecundum vero e, vt vniuerſum ſit a † e, huius cubus erit $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$. Hic autem ęquabitur z^3: & per antitheſin $3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$ ⊏⊐ $z^3 - a^3$. Sed hæc iam cumulatè ſuperiùs explicata fuerunt.

Quòd

Quòd ſi poteſtates affectæ fuerint, non diſſimiliter earum inſtituetur Analyſis. Sed de his quoque aliqua exempla in medium afferre non grauabor.

Illud ſolum adijciam, nimirum, habendas eſſe præoculis, tum diuiſorum, cùm ſingularium homogeneorum effectorum ſcdes, quarum ratio niſi haberetur, prout Ars ipſa docet, profectò labor omnis irritus foret; neque vnquam latus æquationis propoſitæ Artificioſè conſequi liceret. Hoc igitur magnoperè attendi debet ad Analyſin rationabiliter inſtituendam; ſiue nempe æquatio fuerit pura, ac ſimplex; ſiuè affecta, atque compoſita. Nunc igitur ad reſolutionem quadrati affecti per affirmationem accedamus.

ANALYSIS QVADRATI AFFECTI AFFIRMATE SVB LATERE.

Analyſis quadrati affecti ſub latere qua arte breuiter inſtituari poſſit.

Sit propoſitâ æquatio affecta 1 Q ✠ 16 R ⩵ 960; in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, & exhibenda ſit radix. Coefficiens longitudo ſit b. comparationis homogeneum ſit z pl. Deprehenſum verò cũ fuerit latus eius binomium eſſe. Singulare latus primum eſto, a, ſecundum verò e, vt vniuerſum ſit a † e. Et ordinabitur æquationis analyſis, ſeu quod idem eſt affectæ poteſtatis reſolutio ad eum, qui ſequitur modum, vt in adiuncto paradigmate cuique cernere licebit.

Eductio lateris ſingularis primi.

	1 6	a	b
	. .	20	
1 Q ✠ 1 6 R ⩵	9 6 0		z pl.
	. .		
	4		a^2
	3 2		b a
	2 4 0		z pl. − a^2 − b a

Eductio lateris ſingularis ſecundi.

	1 6		b
	.	a † e	
	2 4 0	20 † 4	z pl. − a^2 − b a
	.		
	4 0		2 a
	1 6		b
Diuiſor	5 6		2 a † b.
	1 6		2 a e
	6 4		b e
	1 6		e^2
	2 4 0		2 a e † e^2 † b e ⩵ z pl. − a^2 − b a.

Declaratio inſtitutæ reſolutionis.

Si enim latus ſingulare primum eſt a, ſecundum verò e, vt vniuerſum ſit a † e, huius quadratum erit a^2 † 2 a e † e^2. Planum autem afficiens ſub latere, dataque coefficiente longitudine, erit b a † b e, quo adiuncto ad quadratum, fit a^2 † 2 a e † e^2 † b a † b e, quod æquabitur z pl. & per antitheſin fiet 2 a e † e^2 † b e ⩵ z pl. − a^2 − b a. Sed hæc iam ſuperiùs fuerunt a nobis cumulatè explicata.

ANALY-

ANALYSIS CVBI AFFECTI AFFIRMATE SVB LATERE.

Sit propoſita ęquatio affecta 1 C ✠ 12 R = 14112, in qua cubus afficitur adiūctione ſolidi ſub latere; datoq; coefficiente plano, & exhibenda ſit radix. Coefficiens planum ſit b pl. comparationis homogeneum ſit z ſol. Deprehenſum vero cum fuerit æquationis latus eſſe binomium. Singulare latus primum eſto a, ſecundum vero e, ita vn vniuerſum ſit a † e. Ordinabitur autem æquationis Analyſis ad eum qui ſequitur modum, quod cuique ex adiuncto paradigmate cernere licebit.

Propenitur æquatio.

Eductio lateris ſingularis primi.

	1 2		b pl.
	· ·	a	
1 C ✠ 1 2 R =	1 4 1 1 2	20	z ſol.
	· ·		
	8		a^3
	2 4 0		b pl. a
	8 2 4 0		a^3 † b pl. a.
			z ſol. - a^3 - b pl. a
	5 8 7 2		[illegible]

Eductio lateris ſingularis ſecundi.

	1 2		b pl.
	·	a † e	
	5 8 7 2	20 † 4	z ſol. - a^3 - b pl. a.
	1 2		3 a^2
	6		3 a
			3 a^2 † 3 a † b pl.
Diuiſor	1 2 7 1		[illegible]
	4 8 0 0		3 a^2 e
	9 6		3 a e^2
	6 4		e^3
	4 8		b pl. e
	5 8 7 2		3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e = z ſol. - a^3 - b pl. a.

Declarantur ſuperius dicta

Si enim latus ſingulare primum eſt a, ſecundum vero e, itaut vniuerſum ſit a † e, cuius cubus eſt a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3. Solidum autem afficiens ſub latere, datoque coefficiente, plano erit b pl. a † b pl. e, quo adiuncto ad cubum iam dictum, fiet a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. a † b pl. e, quod æquabitur z ſol. & per antitheſin 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e = z ſol. — a^3 — b pl. a; Sed hæc ſuperiùs fuerunt abundè iam explicata.

Imitatione autem earum quas attulimus reſolutionum, innumeræ perfici poſſunt. Sed ad exęmplum æquationis multipliciter affectæ faciamus gradum.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 68 Q † 4352 R = 186394079.

Quamuis latus æquationis propoſitæ tribus ſingularibus lateribus conſtet, nihilominus quoniam duo priora elicita vnius munere funguntur; proinde Analyſis inſtituta de duobus lateribus inſeruiet ſolum illud ſupererit obſeruandum, cum æquatio tranſcendat quadraticam, vt elicito ſingulari latere primo obſeruentur ſedes debitæ diuiſoribus, inter quos cum recenſeatur triplum latus primum; adibenda erit diligentia ſuperius inſinuata, vt etiam pro longitudine coefficiente ſubquadratica.

Æquatio affecta tam ſub latere, quam ſub quadrato.

Aduerte quædam.

Coeffi-

Coefficiens ſubquadratica ſit d, at ſub lateralis ſit b pl. Comparationis homogeneum ſit z ſol.

Singulare-latus primum eſto a, ſecundum verò e, vt vniuerſum ſit a † e, cuius quadratum eſt a^2 † 2 a e † e^2, at cubus eſt a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3, ſolidum autem ſub latere d, & quadrato binomi lateris erit d a^2 † 2 d a e † d e^2, ſolidum ſub plano dato b pl, & latere a † e, erit b pl. a † b pl. e; Aggregatum ex his erit a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † d a^2 † 2 d a e † d e^2 † b pl. a † b pl. e, quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † 2 d a e † d e^2 † b pl. e = z ſol — a^3 — d a^2 — b pl. a. Hunc igitur modum ſum aſſecutus, quæ ad propoſitæ æquationis explicationem requiruntur.

Specioſa reſolutio.

Numeroſa reſolutio.

His præmiſſis inſtituetur Analyſis, vt ſequitur. Facta ſignatione punctorum ſub comparationis homogeneo, prout cubica exigit natura; atq; etiam ſuperiùs primùm ſignatis punctis continuatim adextris, ad læuam pergendo; & quidem tot, quot ſunt puncta cubica ſubtus annotata; ſignatio autem modò dicta continuatim fit, quoniam coefficiens ſublateralis eſt, quæ immediatè ſupra comparationis homogeneum ſcribitur. Deinde ſit altera deſuper itidem ſignatio totidem punctorum per alternas figuras iuxtam quadraticam naturam, cùm fiat in gratiam coefficientis ſubquadraticæ; ſiſtit autem vtraq; coefficiens in primo è punctis ſuis ad læuam; At in reliquis procedatur vt ſequitur.

ANALYSIS ÆQVATIONIS CVBICÆ DVPLICITER AFFECTÆ.

Eductio lateris ſingularis primi.

		68		0 0 0	d
		·	· ·	5 4 7	
		435	2	a 500	b pl.
			· · ·		
1C ✠ 68Q ✠ 4352R =	186	394	079		z ſol.
	·	·	·		
	125				a^3
	17	00			d a^2
	2	176	0		b pl. a
	144	176	0		a^3 † d a^2 † b pl. a.
	42	218	079		z ſol. – a^3 – d a^2 – b pl. a.

Eductio

Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Itaq; tametſi æquationes fuerint infinitis modis affectæ, ordinata Analyſi poterunt explicari. Solùm in eo cautè procedendum, vt facta ſignatione per puncta, obſeruentur leges Analyſeos, itaut ſedibus ſuis omnia collocentur, quod ſæpe adnotauimus. Illud autem libenter adijciā, nimirum, nihil intereſſe num vna, vel alia in reſoluendo forma obſeruetur; quod animaduertiſſe operę pretium duxi, ne quis arbitretur pleroſq; alia reſolutionis veſtigia calcaſſe, quamuis, non nihil ordinationis formam ſpecie tenus immutauerint; nam, vt inferiùs dicam, ab eodem fonte, vnde allatæ reſolutiones cæteræ quoque dimanant. Solùm igitur immutare aliqua puta coefficientem non ſupra, ſed infra ſcribere interpunctionem, non ſupra, ſed infra facere, & id genus alia, methodo, vt enim hęc nullam variationem inurunt; Ita eadem omnino retenta hæc omnia variatim perfici poſſunt; quod non aduertiſſe, in cauſa fuit, vt pleriq; crediti ſint rerum nouarum inuentores cum tamen aliorum veſtigijs inſtiterint.

	680		a + e 500 + 40	2 d a
	6	8		d
	43	52		b pl.
42	218	079		z ſol. $-$ a^3 $-$ $d a^2$ $-$ b pl. a
7	5			$3 a^2$
	15			3 a.
8	380	32	Diuiſor	$3 a^2 + 3$ a. o $+ 2 d a + d$ o $+$ b pl.
30	0			$3 a^2 e$.
2	40			$3 a e^2$.
	64			e^3
2	720			2 d a e.
	108	8		$d e^2$.
	174	08		b pl. e.
35	466	88		$3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3 + 2 d a e + d e^2 +$ b pl. e.
6	751	199		z ſol. $- a^3 - d a^2 -$ b pl. a $- 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3 - 2 d a e - d e^2 -$ b pl. e. & per ęquipollentiam y ſol.

Artificioſa autem illa ad Analyſin requiſita ſignatio punctorum, quibus ſedes indicantur &c. non dum a nobis fuit explicata. De ipſa tamen paulo infra diſſeremus; in re enim de qua agitur res maximi momenti eſt.

De interpunctionis Analyſi ita ratione paulo infra diſſerendum.

Digitized by Google

De æquationibus explicandis, quæ fractionum vitio laborant.

CAPVT XVII.

Superioribus præceptis inſtructus Artifex, quid poſſit. Plus aſfert moleſtiæ aſymmetria, quàm fractio numerorum.

EX huc vſque traditis, non eſt cur multùm glorietur Analyſta, ex ijs enim ratio conſtat explicandi æquationes omnes, dummodo inſtitutæ pragmatiæ, vel numerorum fractio, vel eorundem aſymmetria non officiat. Tametſi verò aggredienti earum explicationem curæ plurimum ingerat fractionis vitium, tamen vnius Iſomœriæ præſidio munitus Artifex, tutò generali quidem Methodo ſuſcipit æquationes tractandas, in quibus fractionum eſt implicatio. Verùm enim verò longe magis eſt operoſius numeroſam aſymmetriam tractare in æquationis explicatione.

Quando in æquationibus fractiones, & aſymmetria contingant.

Sed vt in arenam deſcendamus præſtabit aduertere in æquationibus vel fractiones occurrere, quatenus affectiones Algebricæ fractionibus expreſſæ ſunt, vel ita vt æquationis affectæ radix habeat fractiones adiunctas, ſiue ipſa ſit fractio quædam, Si priori modo ſe ſe æquationes habeant, parum negotij Analyſtę faceſſunt, cum Iſomœriæ opus ei præſidio ſit, vt ſuperiùs innuimus. At verò cum in æquationibus aſymmetria numerorum interceſſerit, ei onus incumbit, maiorem adhibendi diligentiam, atque induſtriam. Sed vt à fractionum vitio exordiamur.

Exemplum I.

Propoſita ſit æquatio 1 Q ✣ 8 $\frac{1}{2}$ R = 246. Sit autem exhibenda radix. Quandoquidem æquatio eſt huiuſmodi. Ergo etiam erit 1 Q ✣ $\frac{17\,R}{2}$ = $\frac{492}{2}$.

Quoniam igitur radix à quadrato diſtat tantùm per radicem; propterea in expurgata æquatione redibit idem radicum numerus. Si enim 17, ducatur in 2; nempe numerus radicum fractionis numerator in denominatorem, productus verò numerus 34, diuidatur per eundem numerum 2, redibit 17.

Quoniam verò numerus abſolutus diſtat à quadrato per quadratum; propterea denominator idem 2, quadraticè multiplicetur, vt proueniat 4, in quem ducatur 492, numerator fractionis $\frac{492}{2}$ vt fiat 1968, quo diuiſo per 2, fit 984. Itaq; expurgata æquatio erit 1 Q ✣ 17 R = 984.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaque eſt 24. Quia verò communis multiplicans fuit numerus 2; proinde diuiſo 24. per 2, fit quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum II.

Propoſita ſit æquatio 1 Q ✣ 4 R = 38 $\frac{1}{4}$, & ſit exhibenda radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam 1 Q ✣ $\frac{16\,R}{4}$ = $\frac{153}{4}$.

Quandoquidem radix à quadrato diſtat tantùm per radicem, propterea in expurgata æquatione idem radicum numerus redibit.

Quoniam verò numerus abſolutus diſtat à quadrato per quadratum, propterea idem denominator 4, quadratice multiplicetur, vt proueniat 16, quo ducto in 153, fit 2448; hoc autem diuiſo per 4, denominatorem prædictum, fit 612; itaq; expurgata æquatio erit 1 Q ✣ 16 R = 612.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaque eſt 18, quia verò communis multiplicans fuit numerus 4; proinde diuiſo 18, per 4, fit quotiens 4 $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ &c.

Exemplum III.

Propoſita ſit æquatio 1 Q ✣ 6 $\frac{1}{2}$ R = 232 $\frac{9}{16}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, Ductis omnibus in 2, denominatorem fractio-

nis $\frac{1}{2}$; fiet 2 Q + 13 R = 464 $\frac{10}{18}$. Ductis omnibus in 18, fiet 36 Q + 234 R = 8362. Quare etiam erit 1 Q + $\frac{234 R}{36}$ = $\frac{8362}{36}$.

Quandoquidem radix à quadrato diſtat tantùm per radicem, propterea in expurgata æquatione idem radicum numerus redibit.

Quoniàm verò numerus abſolutus diſtat à quadrato per quadratum: proprerea denominator 36, quadraticè multiplicetur, vt proueniat 1296, quo ducto in 8362, fit 10837152, quo diuiſo per 36, fit quotiens 301032; Itaq; expurgata æquatio erit 1 Q + 234 R = 301032.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 434, qua diuiſa per communem multiplicantem 36; fit quotiens 12 $\frac{1}{18}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum IV. Propoſita ſit æquatio 1 $\frac{1}{4}$ Q + 4 $\frac{1}{3}$ R = 44 $\frac{13}{16}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi; Ductis omnibus in 4; fiet 5 Q + $\frac{52 R}{3}$ = 179 $\frac{1}{4}$, iterum ductis omnibus in 3; fiet 15 Q + 52 R = 537 $\frac{3}{4}$; omnibus deinde ductis in 4, fiet 60 Q + 208 R = 2151. Quare etiam 1 Q + $\frac{208}{60}$ R = $\frac{2151}{60}$.

Quando-quidem radix à quadrato tantùm diſtat per radicem; propterea, in expurgata æquatione, idem radicum numerus redibit.

Quoniam verò numerus abſolutus, à quadrato diſtat per quadratum; multiplicetur 60, denominator, quadraticè in ſe, vt fiat 3600, quo ducto in 2151, fit 7743600, quo ducto in 60, proſilit 129060; Itaque expurgata æquatio erit 1 Q + 208 R = 129060.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 270; qua diuiſa per 60; numerum multiplicantem, fit quotiens 4 $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Imo etiam ſi nulla occurreret fractio, poſſumus vti hac methodo ad indagandam radicem.

Exemplum V. Propoſita ſit æquatio 1 Q + 10 R = 96. Et ſit exhibenda radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi; Ductis omnibus in quemuis numerum, verbigratia 3, fiet 3 Q + 30 R = 288. Diuiſis omnibus per 3, vt fiant aliorum terminorum fractiones, & erit 1 Q + $\frac{30 R}{3}$ = $\frac{288}{3}$. Quare, ob rationem ſæpe allatam, in æquatione expurgata, redibit numerus radicum; Sed 3, quadraticè ductus facit 9, in quem ductus 288, facit 2592, quo diuiſo per 3, fiet 864; Itaque æquatio expurgata erit 1 Q + 30 R = 864.

Huius æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaque eſt 18; numerus, quo diuiſo per 3, multiplicantem fit quotiens 6, & radix initio æquationis propoſitæ.

Nota. Itaq; ſi contingeret aliquando, vt in æquatione nullus terminus eſſet fractio, vel fractionem haberet adiunctam, radix tamen vel eſſet fractio, vel haberet adiunctam fractionem, hunc in modum explicaretur.

Exemplum VI. Propoſita ſit æquatio 1 Q + 16 $\frac{1}{3}$ R = 8 $\frac{5}{12}$, & ſit exhibenda radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, ergo etiam 1 Q + $\frac{49}{3}$ R = $\frac{101}{12}$. Atq; adeo etiam 3 Q + 49 R = $\frac{101}{4}$. Deniq; etiam 36 Q + 588 R = 303. Omnibus autem diuiſis per 36, fiet 1 Q + $\frac{588 R}{36}$ = $\frac{303}{36}$. Quare in æquatione expurgata redibit idem radicum numerus, cum radix a quadrato diſtet per radicem. Deinde.

Quoniam numerus abſolutus diſtat à Q per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 36, vt fiat 1296, quo ducto in 303; fiet 392688, quo diuiſo per 36, fiet quotiens 10908, & comparationis homogeneum; Itaq; expurgata æquatio erit 1 Q + 588 R = 10908.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 18, qua diuiſa per 36, cummunem multiplicantem, fiet quotiens $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum VII. Propoſita ſit æquatio 1 Q — $\frac{3 R}{4}$ = 135. Et exhibenda ſit radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam æquatio 1 Q — $\frac{3 R}{4}$ = $\frac{540}{4}$.

Quandoquidem radix diſtat à quadrato tantùm per radicem; propterca in æquatione

tione expurgata ; redibit idem radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus à quadrato diſtat per Quadratum; propterea 4, denominator fractionis, quadraticè multiplicetur, vt fiat 16, quo ducto in 540, fit 8640, quo diuiſo per 4, emergit 2160. Itaq; expurgata æquatio erit $1\,Q - 3\,R = 2160$.

Huius autem æquationis radix, analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 48, qua diuiſa per 4, numerum multiplicantem, proueniet 12, radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio $1\,Q - 6\,R = 81\frac{1}{4}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $1\,Q - \frac{24\,R}{4} = \frac{325}{4}$. *Exemplum VIII.*

Quandoquidem radix à Quadrato diſtat per radicem tantùm; propterea in expurgata æquatione redibit idem radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus diſtat per quadratum; ducatur 4, in ſe quadraticè, vt fiat 16, quo ducto in 325, fit 5200; quo diuiſo per 4, prouenit 1300; Itaque expurgata æquatio erit $1\,Q - 24\,R = 1300$.

Huius autem æquationis radix, analyticè comparari poterit, eaq; erit 50, qua diuiſa per 4, communem multiplicantem, fit quotiens $12\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio $1\frac{1}{4}\,Q - 6\,R = 120\frac{5}{16}$. Et exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, omnibus ductis in 4, erit $\frac{20\,Q}{4} - 24\,R = \frac{7700}{16}$ omnibus ductis in 16, fiet $80\,Q - 384\,R = 7700$ ergo erit $1\,Q - \frac{384\,R}{80} = \frac{7700}{80}$. *Exemplum IX.*

Quandoquidem radix à quadrato diſtat per radicem; proinde in æquatione expurgata, redibit idem radicum numerus; Quoniam verò numerus abſolutus à quadrato diſtat per quadratum. Ducatur 80, in ſe quadraticè, vt fiat 6400, quo ducto in 7700; fiet 49280000; quo diuiſo per 80; proueniet quotiens 616000; Itaq; expurgata æquatio erit $1\,Q - 384\,R = 616000$.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt; eaq; eſt 1000; qua diuiſa per 80, communem multiplicantem, fiet quotiens $12\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio $20\frac{1}{2}\,R - 1\,Q = 102$. Et exhibenda ſit radix. Quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $\frac{41}{2}\,R - 1\,Q = 102$, atque adeo etiam $\frac{41\,R}{2} - 1\,Q = \frac{204}{2}$. *Exemplum X.*

Quandoquidem radix à quadrato diſtat per radicem, idem redibit radicum numerus. Quoniam verò numerus abſolutus, à quadrato diſtat per quadratum. Ducatur 2, in ſe, vt fiat 4, quo ducto in 204, fit 816, quo diuiſo per 2, fit 408. Itaq; expurgata æquatio erit $41\,R - 1\,Q = 408$.

Huius autem æquationis radix analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 24; numerus, quo diuiſo per 2, communem multiplicantem fit quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio $1\,C + 10\frac{1}{2}\,R = 1854$. Et exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam $1\,C + \frac{21}{2}\,R = 1854$; Atq; adeo etiam erit $1\,C + \frac{21}{2}\,R = \frac{3708}{2}$. *Exemplum XI.*

Quandoquidem radix à Cubo diſtat per quadratum; proinde denominator 2, quadraticè multiplicetur, vt fiat 4, quo ducto in 21, fit 84, quo diuiſo per 2; denominatorem iam dictum fit 42; & erit numerus radicum in noua æquatione. Quoniam verò numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum, propterea denominator 2, cubicè multiplicetur, vt fiat 8, quo ducto in 3708, numerum abſolutum fit 29664, quo ducto per 2, denominatorem prædictum fit quotiens 14832, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Itaq; expurgata æquatio erit $1\,C + 42\,R = 14832$.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 24, qua diuiſa per 2, communem multiplicantem, fiet quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio $1\frac{1}{3}\,C + 10\frac{1}{2}\,R = 2430$; Et exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiusmodi, erit etiam $\frac{4}{3}\,C + \frac{21}{2}\,R = 2430$. Omnibus ductis in 3, fiet $4\,C + \frac{63}{2}\,R = 7290$. Omnibus ductis in 2, fiet $8\,C + 63\,R = 14580$. Omnibus applicatis ad 8, fiet $1\,C + \frac{63\,R}{8} = \frac{14580}{8}$. *Exemplum XII.*

Quan-

Quandoquidem radix diſtat à Cubo per quadratum, quadraticè multiplicetur 8, denominator, vt fiat 64, quo ducto in 63, fit 4032, quo diuiſo per 8, prouenit 504, pro numero radicum nouæ æquationis. Deindè quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum, cubicè multiplicetur 8, itidem denominator, vt fiat 512, quo ducto in 14584, prouenict 7464960, quo diuiſo per eundem numerum 8, fit 9330120, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis; Itaq; æquatio expurgata erit 1 C + 504 R = 9330120.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt numerus 96, qua diuiſa per 8, communem multiplicantem, fit quotiens 12, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XIII. Propoſita ſit æquatio 1 C + 6 $\frac{1}{4}$ R = 119 $\frac{1}{4}$, & exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam 1 C + $\frac{25 R}{4}$ = $\frac{477}{4}$.

Quandoquidem radix diſtat à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 4, denominator, vt proueniat 16, quo ducto in 25, numeratorem fractionis radicum, fit 400, quo diuiſo per 4, denominatorem iam dictum, fit quotiens 100, & numerus radicum nouæ æquationis. Deinde quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum; proinde cubicè multiplicetur 4, denominator, vt fiat 64, quo ducto in 477, fit 30528. Hoc autem diuiſo per 4, denominatorem eundem, fit 7632, comparationis homogeneum expurgatæ æquationis. Itaq; æquatio expurgata erit 1 C + 100 R = 7632.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaq; eſt 18, qua diuiſa per communem multiplicantem 4; fit quotiens 4 $\frac{1}{2}$, & radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XIV. Propoſita ſit æquatio 100 R − 1 C = 235 $\frac{7}{8}$, & ſit exhibenda radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, proinde etiam erit 100 R − 1 C = $\frac{1887}{8}$, atq; adeo etiam 800 R − 8 C = 1887. Omnibus nimirum ductis in 8. Quamobrem etiam erit $\frac{800 R}{8}$ − 1 C = $\frac{1887}{8}$.

Quandoquidem radix diſtat à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 8, vt fiat 64, quo ducto in 800, fit 51200; quo diuiſo per 8, fiet 6400, pro numero radicum nouæ æquationis. Deinde quia numerus abſolutus diſtat à cubo per cubum; proinde, cubicè multiplicetur 8, vt fiat 512, quo ducto in 1887, fiet 966144, quo diuiſo per 8, fiet 120768, numerus pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Itaque æquatio expurgata erit 6400 R − 1 C = 120768.

Huius autem æquationis radix, Analyticè comparari poteſt, eaque eſt 68; quo diuiſo per 8, communem multiplicantem, ſit 8 $\frac{1}{2}$, radix initio æquationis propoſitæ.

Exemplum XV. Propoſita ſit æquatio 1 QQ + 6 $\frac{1}{2}$ R = 282; & exhibenda ſit radix. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam 1 QQ + $\frac{13 R}{2}$ = 282; atque adeo 1 QQ + $\frac{13 R}{2}$ = $\frac{564}{2}$.

Quandoquidem radix diſtat à QQ, per cubum; propterea cubicè multiplicetur 2, vt fiat 8, quo ducto in 13, fit 104, quo diuiſo per 2, denominatorem, fit quotiens 52, & coefficiens nouæ æquationis. Deinde quoniam numerus abſolutus, diſtat à QQ, per QQ; propterea quadrato-quadraticè multiplicetur 2, denominator vt proueniat 16, quo ducto in 564, proueniet 9024, hoc autem diuiſo per 2, denominatorem fit 4512, comparationis homogeneum nouæ æquationis. Itaque æquatio expurgata erit 1 QQ + 52 R = 4512.

Huius autem æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaque eſt 8; quo diuiſo per 2, communem multiplicantem, fit quotiens 2, radix initio ęquationis propoſitæ &c.

De

De Explicandis æquationibus, quæ numeris irrationalibus ſunt Implicatæ.

CAPVT XVIII.

SI quid eſt, quod officiat explicationi Æquationum, maximè profectò numerorum eſt Aſymmetria; hæc enim impedimento eſt Analyſtæ, quo minus explicet æquationes cubicas, & alias alterius ordinis, cum alioquin illæ, in quibus poteſtas eſt Quadratum Antiquorum veſtigijs inſiſtens, nullo ferè labore expediat. *Numerorum aſymmetria plurimum difficultatis affert Analyſtæ.*

At verò irrationales numeri multifariam in æquationibus contingunt. Vel enim comparationis homogeneum numerus irrationalis eſt, vel rationalis; ſi vero fuerit irrationalis, vel erit ſimplex, vel compoſitus, & ſi compoſitus, nempe binomium, vel erit propriè Binomium, vel Apotome. Itemque poteſt eſſe trinomium, quatrinomium &c. & rurſus radix vniuerſalis &c. *Multifariam numeri irrationales æquationibus admiſcentur.*

Deinde in æquatione poſſunt irrationales numeri eſſe ex altera parte; vel quia coefficiens, ſiue ſit longitudo, ſiue ſit planum, ſiuè ſolidum &c; numerus eſt irrationalis; & ſi ita eſt, vel eſt ſimplex vel compoſitus &c. quemadmodum de comparationis homogeneo dictum fuit, vel quia ipſa poteſtas affecta parentheſi clauditur, radicali ſigno præfixo.

Præterea, vel huiuſmodi numeri irrationales, ex vtraque parte æquationis contingunt, vel ex vna tantum.

Vel denique poteſt accidere, vt quamuis æquationis termini ab aſymmetriæ nota ſint liberi; nihilominus propoſitæ æquationis radix numerus ſit irrationalis, ſiue ſimplex, ſiue compoſitus &c.

Propoſita ſit æquatio $1\,Q + 6\,R = ℞\,46656$. Tractabimus autem numerum, quamuis rationalem, tanquam irrationalem maioris claritatis gratia. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, ergo etiam partium quadrata inter ſe æqualia erunt; quamobrem fiet $1\,QQ + 12\,C + 36\,Q = 46656$, ſeu $1\,QQ + 12\,C + 36\,Q - 46656 = 0$. *Proponitur æquatio, cui numeri contingunt irrationales.*

Huius porro æquationis radix Analyticè comparari poteſt, eaque eſt 12; vt ex præceptis ſuperiùs traditis perſpicuum eſt, propterea initio propoſitæ æquationis radix erit 12.

Et quoniam generalia, generaliter tractánda ſunt; proìnde præcepta tradimus, quibus Artifex inſtructus, poteſt huiuſmodi æquationum genus, & ſi nimia affectione laborantium, explicare, cùm alioquin alia via incedens, quam itidem inſinuauimus, idem aſſequetur; tollendo ſcilicet ſecundum æquationis terminum, & redigendo æquationem ipſam ad genus earum, in quibus terminorum exponentes Arithmeticam ſeruant proportionem, cuiuſmodi ſunt; QQ, Q: & numerus abſolutus. *Methodus ad huiuſmodi æquationes explicandus.*

Aucta enim radice numero, qui prouenit ex diuiſione numeri cuborum, per exponentem poteſtatis, licet id elegantiſſimè perficere, ad eum qui ſequitur modum.

Effingo igitur latus æquationis propoſitæ, auctum eſſe numero 3. Itaut latus ipſius ſit $e - 3$; ac proinde radicem æquationis propoſitæ auctum tribus vnitatibus eſſe e. Nunc ordinanda eſt æquatio ſecundum huiuſmodi æſtimationem, Itaq; quadratum eſt $e - 3$ eſt $e^2 - 6\,e + 9$. Cubus eſt $e^3 - 9\,e^2 + 27\,e - 27$. Quadrato *Methodus explicatur.*

$$
\begin{array}{r}
e - 3 \\
e - 3 \\
\hline
-3e \dagger 9 \\
e^2 - 3e \quad\;\; \\
\hline
e^2 - 6e \dagger 9 \\
e - 3 \\
\hline
-3e^2 \dagger 18e - 27 \\
e^3 - 6e^2 \dagger 9e \quad\;\; \\
\hline
e^3 - 9e^2 \dagger 27e - 27 \\
e - 3 \\
\hline
-3e^3 \dagger 27e^2 - 81e \dagger 81 \\
e^4 - 9e^3 \dagger 27e^2 - 27e \quad\;\; \\
\hline
e^4 - 12e^3 \dagger 54e^2 - 108e \dagger 81 \\
\dagger 12e^3 - 108e^2 \dagger 324e - 324 \\
\dagger 36e^2 - 216e \dagger 324 \\
- 46656 \\
\hline
e^4 - 18e^2 - 46575 = 0. \\
e^4 - 18e^2 = 46575
\end{array}
$$

to-quadratum erit $a^4 - 12e^3 \dagger 34e^2 - 108e \dagger 81$. At verò quoniam in ęquatione ſunt † 12 C; proinde cubus ex $e - 3$ ducendus eſt in † 12, vt fiat $\dagger 12e^3 - 108e^2 \dagger 324e - 324$. Et quoniam in ęquatione ſunt † 36 Q; proinde ducatur quadratum ex $e - 3$ in † 36, vt fiat $\dagger 36e^2 - 216e \dagger 324$; erat autem numerus abſolutus affectus ſigno deffectus. Omnia in vnam ſummam colligantur, & proueniet $e^4 - 18e^2 - 46575 = 0$. Quare etiam $e^4 - 18e^2 = 46575$. Hæc autem æquatio habet terminos ſecundum proportionem Arithmeticam o. 2. 4. Quare, & methodo Antiquorum, & Analiticà explicabilis erit, eius autem radix eſt 15; ergo ſi 15, multetur tribus vnitatibus, remanebit 12, pro radice initio æquationis propoſitæ.

Illud autem non præteribo, nimirum; Sublato ſecundo æquationis termino ęque benè explicari poſſe æquationem ipſam, methodo ſiue antiqua, ſiue noua ſuperiùs declarata.

Propoſita ſit æquatio 1 Q ✠ ℞ 36 R = 520, & ex quadrato hunc in modum affecto oporteat extrahere radicem; quoniam autem æquatio eſt huiuſmodi, erit etiam per antitheſin 520 — 1 Q = ℞ 36 R; quare, & harum partium quadrata æqualia erunt; proinde. Fiet æquatio 270400 — 1040 Q ✠ 1 QQ = 36 Q; ac ob id 270400 ✠ 1 QQ = 1076 Q. Atque adeo per antitheſin rurſus 1076 Q — 1 QQ = 270400. Huius autem æquationis radix Analyticè elici poteſt, eaque eſt 6. Quare 6, erit initio propoſitæ æquationis radix.

Propoſita ſit æquatio ℞ (1 Q ✠ 2 $\frac{1}{12}$ R) = 13, & ſit exhibenda radix. Quoniam igitur æquatio eſt huiuſmodi, etiam, & quadrata partium æqualia erunt, vnde fiet 1 Q ✠ 2 $\frac{1}{12}$ R = 169. Hæc autem expurgabitur ex ijs quæ ſuperiùs tradidimus; & fiet æquatio 1 Q ✠ 25 R = 24336: Ex hac vero poteſtate affecta extrahetur methodo ſuperiùs tradita; Analyticè enim comparari poteſt radix, eaq; eſt 144, qua diuiſa per communem multiplicantem 12, proſilit initio propoſitæ æquationis radix 12.

Digitized by Google

Propoſita iterum ſit æquatio ℞ (1 Q + 2 R) = ℞ 168 ; & exhibenda ſit radix. Quoniam ęquatio huiuſmodi eſt ; propterea æquationis partibus quadraticè ductis, net etiam æquatio huiuſmodi 1 Q + 2 R = 168. Huius porro æquationis radix elici poteſt, eaque eſt 12. Itaque initio propoſitæ æquationis radix erit 12.

Propoſita ſit æquatio 1 Q + ℞ 4 R + 2 R = 24 + ℞ 64; ergo per antitheſin fiet 1 Q + 2 R — 24 = 264 — ℞ 4 R; Quamobrem, & quadrata partium ęquationis erunt inter ſe æqualia ; at verò ex ℞ 64 — ℞ 4 R quadratum eſt 64 — ℞ 4024 R + 4 Q. Sed quadratum ex alia parte nempe 1 Q + 2 R — 24 eſt 1 QQ + 4 C — 44 Q — 96 R + 576, quod ęquabitur 64 — ℞ 1024 R + 4 Q. Curandum eſt autem vt numerus irrationalis ſolitarius exiſtat ex vna ęquationis parte, quod fiet per antitheſin, vnde proueniet 48 Q + 96 R — 512 — 1 QQ — 4 C = ℞ 1024 R, quę quidem æquatio vt expurgetur ab aſymmetria; reuocanda eſt ad ęquationem inter quadrata partium. Quadratum ex ℞ 1024 R eſt 1024 Q; at verò quadratum ex 48 Q + 96 R — 512 — 1 QQ — 4 C eſt 1 QCC + 8 QQC + 13312 C + 2560 QQ — 39936 Q — 80 CC —. 576, QC — 98304 R + 262144. Quod ex infrapoſito exemplo cernere licet.

48 Q † 96 R — 512 — 1 QQ — 4 C
48 Q † 96 R — 512 — 1 QQ — 4 C

— 192 QC — 384 QQ † 2048 C † 4 QQC † 16 CC
— 48 CC — 96 QC † 512 QQ † 1 QCC † 4 QQC
— 2576 Q — 49152 R † 262144 † 512 QQ † 2048 C
† 4608 C † 9216 R — 49152 R — 96 QC — 384 QQ
2304 QQ † 4608 C — 24576 Q — 48 CC — 192 QC

1 QCC † 8 QQC † 13312 C † 2560 QQ — 39936 Q — 80 CC — 576 QC — 98304 R † 262144 = 1024 Q
Vel 40960 Q † 80 CC † 576 QC † 98304 R — 8 QQC — 13312 C — 2560 QQ — 1 QCC = 262144

Hęc autem quadrata erunt inter ſe ęqualia ; proinde expurgata erit ęquatio ab omni aſymmetria. At verò huius ęquationis radix Analyticè poteſt exhiberi, eaq; eſt 4. Proinde initio propoſitę ęquationis radix erit 4.

Atque adeo hunc in modum licebit expurgare æquationem a numeris irrationalibus vnde patet aditus Analyſi. Fateor tamen opus laborioſiſſimum eſſe, quandoquidem, vt plurimum fit aſcenſus ad altiſſimos gradus, pręterquam quod Pragmatia inſtitui non poteſt ſine ſummo erroris periculo. Sed de hac æquationis expurgatione iterum in Speciosa redibit ſermo vbi cumulatiùs ſumus hac de re verba facturi. Interim proximum eſt, vt cubicas ęquationes in quibus ſecundus terminus deeſt, peculiari methodo nos explicemus. Eſt autem operę pretium quandoquidem æquationes cęteræ, vt ſuo loco planum fiet, ad has reuocari poſſunt magna cum vtilitate; pręſertim in rebus Geometricis; hoc .n. pacto abſtruſioribus Problematibus licet occurrere, cum alioquin hac Arte deſtitutis nihil ſperandum ſupereſſet. Vnde maximam laudem hinc Analyſta eſt aſſecutus, cum Geometrica tractare ſumma facilitate poſſit, ad eo vt, quę alioquin in huiuſmodi diſciplina magna credebantur myſteria ; nunc ſatis obuia cuique futura ſint, quod Analyticæ acceptum, referendum eſſe neminem inficias iterum exiſtimo. *Expurgatio æquationis à numeris irrationalibus.*

Eſt autem iſtarum ęquationum explicandarum ratio non vna, nam prętermiſſa methodo veterum Analyſtarum, vtpotè illa, quę minus firma habita eſt ; vna quidem ea eſt quam è recentioribus nonnulli tradiderunt. *Non vna eſt methodus ad æquationes explicandas.*

Alia verò quam nos meditati ſumus. Quia tamen vtraq; indiget extractione cubicę radicis ex propoſito bimonio ; propterea nobis onus incumbit explicandi rationem qua ex binomio propoſito cubica radix erui poſſit.

Crediderunt quidem Veteres arduum hoc opus, & ex ijs multi prouinciam aggreſſi nihil perficere potuerunt. Pręſtabit nihilominus in medium affere quid memorię litteriſque commiſerint. Quoniam vero decepti ſunt in explicanda binomij cubici natura, conantes pręcepta tradere, quibus cognoſcere poſſimus, nam binomium ſit cubicum an non ; proinde hinc primum exordium tractationis ſumendum erit.

Deteguntur Errata Veterum, ſimulque oſtenditur ipſorum quidem nemini benè perſpectam fuiſſe Binomij cubici naturam.

CAPVT XIX.

SI quid eſt, in quo ſuperioris ætatis Analyſtæ plurimum laboris inpenderint; eſt quidem propoſiti binomij radicis cubicę inquiſitio; & quamuis omnes conatus adhibuerint; quod erat in optatis, conſequi minimè potuerunt. Quinimo in errorem lapſos eſſe, paulo poſt, oſtendemus.

Hęc autem nos equidem aduertimus, cum à nemine obſeruata vnquam viderimus; & mirum, quidem eſt tot annorum ſeculis, in hac ignorationis caligine plures eſſe verſatos; nec deprehendiſſe, quod cuique alioquin obuium eſſe poteſt.

Antiquorum error circa Binomij cubici naturam.

Perperam crediderunt enim deprehendi num Binomium propoſitum cubicam habeat, vel non habeat radicem; ex eo quod differentia quadratorum vtriuſque nominis, ſit numerus cubus; quod alienum à veritate niſi aliud quidpiam acceſſerit, facile nos demonſtrabimus.

Primò exemplis, deinde demonſtrationibus oſtenditur eorum error.

Vt igitur oſtendamus haud ſufficere quadratorum vtriuſque nominis differentiam Cubum eſſe ad deprehendendum num propoſitum Binomium Radicem cubicam habeat; conſideremus primò exemplum vnum, vel alterum; deinceps ad contexendas demonſtrationes acceſſuri. Supponendum eſt verò præcepta eadem de numeris ſurdis tradita, numeris rationalibus applicari poſſe, dummodo tractentur tanquam irrationales; Vt regula præſcribens modum, addendi ℞ 5 ad ℞ 20, poterit etiam aptari additioni, qua exempli gratia additur ℞ 36, ad ℞ 64. Ita quoque ſi proponatur extrahendam eſſe radicem quadratam ex hoc Binomio 6 † ℞ 32, cuius radix eſt 2 † ℞ 2, eadem etiam regula extrahi poterit Radix quadrata ex hoc Binomio 10 † ℞ 36, vt enim in extractione illius ita procedimus. Differentia quadratorum nominum eſt 4, cuius latus quadratum eſt 2; quo addito ad 6, fit 8, ab eodem ſubtracto remanet 2, quorum dimidia ſunt 4, & 2, horum autem latera ſunt 2, & ℞ 2, quo fit vt radix quadrata propoſiti Binomi; ſit 2 † ℞ 2. Ita etiam in extractione radicis ex hoc Binomio 10 † ℞ 36, procedi poteſt. Differentia quadratorum nominum eſt 64, cuius radix quadrata eſt 8, qua addita ad 10 fit 18, ab eodem ſubtracta remanet 2, horum dimidia ſunt 9, & 1, quorum latera quadrata ſunt ℞ 9 † 1, ſeu 3 † 1; hoc eſt 4, & ita eſt, quandoquidem Radix quadrata huius Binomi; 10 † ℞ 36, eadem eſt, ac radix quadrata numeri 16, nempe 4, propterea quod 10 ℞ 36, idem eſt quod 16, vt liquet. Non diſſimili modo diſcurrendum eſt de extractione radicis Cubicæ. Quamobrem ſi proponeretur 20 † ℞ 392 Binomium cubicum, qnà regulà extraheretur Cubica radix ex Binomio iſto, eadem etiam extrhai poſſet ex hoc, nimirum 63 † ℞ 3844, eſt autem numerus 3844, rationalis cuius radix quadrata eſt 62, licet veluti irrationalis tractetur.

Supponamus itaq; Binomium eſſe 15 † ℞ 9, differentia quadratorum vtriuſque nominis eſt 216, numerus cubus, vt patet, & nihilominus Binomium hoc radicem cubicam non habet; idem eſt enim 15 † ℞ 9, ac eſt 18; conſtat autem 18, non eſſe numerum cubum. Inſuper 15 † ℞ 100, eſt huiuſmodi, vt quadrata vtriuſque nominis inuicem collata differant per 125, numerum Cubum; & tamen Binomium illud cubicam non habet radicem; ſiquidem idem eſt 15 † ℞ 100, ac eſt 25, conſtat autem 25, non eſſe numerum cubum. Secus verò ſe habet 63 † ℞ 3844, hoc

enim

enim cubicam habet radicem, quandoquidem idem eſt ac 125, cuius latus cubicum eſt 5.

Primus modus extrahendi cubicam radicẽ ex Binomio.

Cæterum radicem eruemus duplici methodo. Ad primam quod attinet. Numerus cubus contentus in primo nomine, & ex illo ſubtrahendus, ſit 27, quo ſubducto ex 63, remanet 36, numerus autem 3, radix cubica numeri 27; erit primum nomen quæſitæ radicis. Secundum verò nomen eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, huius triplum eſt 3 Q, quo ducto in 3, primum nomen inuentum fit 9 Q, quod æquabitur 36; Primum nomen inuentum fuit 3, vt habeatur nomen ſecundum diuidatur 36, per 9, & fiet quotiens 4; quare ℞ 4, erit ſecundum nomen. Ob id radix cubica quæſita erit 3 ✠ ℞ 4; hoc eſt 3 ✠ 2, hoc eſt 5. Alia autem methodo ſic aliqui procedunt.

Secundus ad idem, & eſt vniuerſalis quando pars rationalis maior fuerit alia Binomij parte

Si pars rationalis dati Binomij reliqua parte maior fuerit; Oportet, Binomij radici rationali addere radicem differentiæ quadratorum partium diuiſam per eandem radicem rationalem; eritque ſemiſſis maximi integri numeri in aggregato contenti pars rationalis radicis quæſitæ. A cuius partis quadrato, ſi auferatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum, dummodo radix erui poſſit. Hoc, & ſequens præceptum in vno peccat, vt infra conſtabit.

Quando pars rationalis fuerit minor.

Quod ſi dati Binomij pars rationalis reliqua parte minor fuerit; Oportet à radice rationali ex toto Binomio quidem extracta, ſubducere radicem differentiæ quadratorum partium diuiſam per eandem radicem rationalem, eritque media pars maximi integri numeri in reliqua contenti pars rationalis radicis quæſitæ. Ad cuius partis quadratum ſi addatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis. Dummodo radix erui poſſit.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina.

Sit 63 ✠ ℞ 3844. Binomium cubicum. Radix cubica differentiæ quadratorum vtriuſque nominis eſt 5. Modo radix quadrata numeri 3844 eſt 62; quæ addita ad 63, numerum abſolutum facit 125, cuius radix cubica eſt 5; Per hanc verò diuidatur 5; radix cubica differentiæ quadratorum vtriuſque nominis, vt fiat quotiens 1; quæ addi debet ad 5, radicem cubicam extractam ex numero 125, confecto per additionem numeri 62. ad 63; & fit 6; cuius dimidium eſt 3; nunc verò à 9, quadrato iſtius nominis, ſubtrahatur 5; radix differentiæ quadratorum vtriuſque nominis, & remanet 4; cuius radix quadrata eſt ℞ 4, & ita fiet 3 ✠ ℞ 4 radix cubica propoſiti Binomij 63 ✠ ℞ 3844.

Notanda quædam circa binomium.

Neque dicas non illicò manifeſtum eſſe, radicem cubicam nullam dari iſtius Binomij 15 ✠ ℞ 9, eo quod numeri 18, nulla eſt radix cubica niſi ℞ C 18; etenim poſſet aliquis dicere, iſtius Binomij 15 ✠ ℞ 9, radicem cubicam eſſe aliquod Binomium conſtans, ex numero abſoluto, & irrationali, vel ex duobus numeris irrationalibus adeo vt binomium iſtud, in ſe cubicè ductum, producat 15 ✠ ℞ 9, ſeu 18. Neque inquam id dicas; propterea quod, ſi daretur iſtud binomium, illud quidem veluti radix cubica iſtius binomij, 15 ✠ ℞ 9, deberet æquari ℞ C 18; vt conſtat ſi quidem idem eſt 15 ✠ ℞ 9, ac eſt 18, quare idem eſt ℞ C (15 ✠ ℞ 9) ac eſt ℞ C 18; Si itaque alquod eſt Binomium, quod ſui cubica multiplicatione producat 15 ✠ ℞ 9, ſeu 18, illud vtique debet æquari ℞ C 18, at verò, impoſſibile eſt aliquod Binomium adinuenire, conſtans, vel ex numero abſoluto, & numero irrationali, vel ex duobus numeris irrationalibus; quod quidem æquetur ℞ C 18; Binomium enim quod ſit æquale ℞ C 18, nequit conſtare niſi ex duabus radicibus cubicis, quæ nimirum inuicem additæ, conficiaut ℞ C 18, quemadmodum eſſet ℞ C 2 $\frac{1}{4}$ ✠ ℞ C 2 $\frac{1}{4}$ vel ℞ C 5 $\frac{1}{3}$ ✠ ℞ C $\frac{2}{3}$. Si enim ad ℞ C 2 $\frac{1}{4}$ addideris ℞ 2 $\frac{1}{4}$ facies ℞ C 18, & ſi ad ℞ C 5 $\frac{1}{3}$ addideris ℞ C $\frac{2}{3}$ facies ℞ C 18; At verò binomium conſtans ex duabus radicibus cubicis nequit per ſui cubicam multiplicationem producere 15 ✠ ℞ 9. Propterea quod, binomium conſtaus ex radicibus cubicis nequit per ſui multiplicationem producere binomium conſtans ex radicibus quadratis, vel ex numero abſoluto, & radice quadrata.

Quædam dicuntur de Binomio cubico.

Omnino neque ſequitur ſi Binomium habet radicem cubicam, neceſſariò differentiam quadratorum vtriuſq; nominis cubum eſſe, niſi differantia nominum cubus exiſtat. Id autem liquido conſtat de 320 ✠ ℞ 36864, cuius radix cubica eſt ℞ 36 ✠

2 conſtat autem, quadratorum vtriuſque nominis differentiam eſſe 65536, numerus non cubus; Differentia verò nominum puta 320 — ℞ 36864, non eſt cubus. Item ℞ 937024 ✠ 363 Binomium eſt, habens radicem cubicam; & tamen differentia quadratorum vtriuſque nominis non eſt cubus; eſt enim huiuſmodi differentia numerus 805255; differentia verò nominum non eſt tunc numerus cubus; vt patet. Itaque concludendum erit ſi differentia quadratorum nominis vtriuſque fuerit
Concluditur dicendum in re de qua agitur. cubus exiſtente cubo differentia nominum, binomium habebit radicem cubicam; non exiſtente cubo differentia nominum, binomium cubicam radicem non habebit.

Secundò deinde exiſtente cubo differentia nominum, binomium non habebit radicem cubicam, niſi differentia quadratarum nominis radicem cubicam habeat, quod contra intelligendum eſt.

Si binomium habet radicem cubicam, differentia quadratorum vtriuſque nominis exiſtente cubo, etiam differentia nominum cubus erit. Et binomium quidem cubicam habere poteſt radicem non exiſtente cubo differentia quadratorum nominum dummodo non ſit cubus differentia nominum. Hæc autem omnia iuuabit pluribus Theorematibus demonſtrare.

THEOREMA I.

NVmerus cubus diuiſibilis eſt in duas partes, quarum differentia non ſit cubus.

Sit numerus Cubus A D; Dico illum diuiſibilem eſſe in duas partes, quarum differentia non ſit Cubus. Cum ab eo ſubtrahi poſſit quicunque numerus non cubus, dummodo ſit minor. Subtrahatur itaque C D. Reliqua verò pars A C, diuidatur bifariam in B. Partes proinde erunt A B, B D, quarum differentia erit C D. Sed C D, numerus eſt non cubus. Ergo numerus A D, Cubus diuiſus eſt in duas partes, quarum differentia non eſt cubus. Quod oportebat oſtendere.

A B C D
....

THEOREMA II.

DIfferentia quadratorum vtriuſque nominis propoſiti Binomij non eſt cubus, non exiſtente Cubo differentia nominum ſi Binomium ſit cubus.

Sit Binomium numerus A B, compoſitus ex duobus nominibus A C, C B, ſitq; C D, æqualis C B adeo vt A D, differentia ſit nominum A C, C B; Dico differentiam quadratorum vtriuſque nominis A C, C B, Cubum non eſſe, Cubo non exiſtente A D, differentia nominum. Quoniam enim A D, differentia nominum, ex hypotheſi non eſt cubus, ſi ducatur in A B, aggregatum nominum, & quidem numerum cubum, non
a. Schol. ad prop. 5. lib. 9. efficiet cubum quandoquidem non cubus, ſi ducatur in cubum, facit [a], non cubum
b. Ex Elementis. at verò quod fit ex differentia nominum in eorundem aggregatum eſt [b], differentia

A D C B
....

quadrato-

Digitized by Google

quadratorum ipſorum nominum, ergo hæc differentia quadratorum vtriuſque nominis A C, C B, non erit cubus, dum A D, differentia eorundem nominum, non eſt cubus. Quamobrem differentia nominum, non exiſtente cubo, neque cubus erit quadratorum differentia. Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA III.

Differentia nominum propoſiti Binomij non exiſtente cubo, neque differentiæ quadratorum, cubus erit. Si Binomium ſit cubus.

Sit Binomium A B, conſtans ex duobus nominibus A C, C B; quorum differentia ſit A D. Dico differentiam quadratorum vtriuſque nominis cubum non eſſe, non exiſtente cubo A D, differentia nominum.

A . D C B
....

Quoniam enim A D, differentia nominum non eſt cubus, ſi ducatur in aggregatum nominum, dummodo aggregatum ſit cubus, ſecus, ſi non cubus, faciet [a], non cubum; at verò idquod fit ex differentia nominum in eorundem aggregatum, eſt [b] differentia quadratorum, ergo differentia quadratorum vtriuſque nominis A C, C B, non erit cubus, cubo non exiſtente A D, differentia nominum. Quamobrem differentia nominum propoſiti Binomij non exiſtente cubo, neque differentia quadratorum cubus erit. Quod erat operæ pretium oſtendere.

a. *Scholion Prop. 5. lib 9.*
b. *Ex Elementis.*

THEOREMA IV.

IN Binomio Cubo, ſi quadrata nominum, differunt interuallo cubo, etiam differentia nominum cubus erit.

Numerus A B, cubus, ſit binomium, conſtans ex duobus nominibus, A C, C B, quorum differentia ſit A D. Dico A D, cubum eſſe, quandocunque quadratorum ex A C, C B, differentia, cubus erit. Si enim A D, cubus non eſt, exiſtente cubo differentia quadratorum ex nominibus A C, C B, quoniã nominum aggregatum ductum in eorundem differentiã, facit [a] differentiam quadratorum ipſorum nominum nominum autem aggregatum eſt cubus; ex hypotheſi verò differentia non cubus, ergo numerus non cubus, ductus in cubum produceret cubum, quod eſt abſurdum, Quamobrem in Binomio cubo, ſi quadrata nominum differunt interuallo cubo, etiam differentia nominum cubus erit. Quod oportebat oſtendere.

A D C B
....

a. *Ex Elementis.*

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA V.

IN *Binomio cubo, exiſtente cubo differentia nominum, etiam differentia quadratorum, cubus erit.*

Iiſdem poſitis. Dico ſi differentia nominum cubus fuerit, etiam differentiam quadratorum cubum eſſe. Sit enim differentia quadratorum non cubus. Quoniam igitur differentia nominum eſt cubus, quemadmodum Binomium eſt cubus, ſi verò cubus ducatur in cubum producit ᵃ, cubum; at ſi differentia iam dicta ducatur in Binomium producit quadratorum differentiam, ergo differentia quadratorum cubus erit; at verò ſupponebatur non cubus, quod eſt abſurdum. Si igitur nominum A C, C B, quadrata differunt interuallo cubo, etiam A D, differentia eorundem nominum, cubus erit, in Binomio proinde cubo, exiſtente cubo differentia nominum; etiam differentia quadratorum, cubus erit.



a. prop. 4. lib. 9.

THEOREMA VI.

EXiſtente *cubo differentia quadratorum nominum, non neceſſariò ſequitur Binomium illud eſſe cubum.*

Binomium A B, conſtans ex duobus nominibus A C, C B, tale ſit, vt quadrata nominum ſupradictorum differant interuallo cubo. Dico non neceſſario ſequi prædictum Binomium cubum eſſe, niſi alia acceſſerit conditio. Cum enim ad hoc, vt Binomium ipſum ſit cubus, nil aliud deſideretur, ſequitur differentiam nominum poſſe eſſe cubum, vel non cubum ᵃ. Sit itaque non cubus. Quoniam igitur differentia quadratorum, æqualis eſt ei, quod fit, ex differentia nominum in aggregatum eorundem, eſt autem ex hipotheſi, differentia quadratorum cubus, ergo id quod fit ex differentia nominum in eorundem aggregatum cubus erit, quia verò ſupponitur Binomium A B, cubum eſſe, exiſtente cubo differentia quadratorum ex A C, C B, ſi ad ipſum applicetur id quod fit ex A D, differentia nominum, in A B, nominum aggregatum, orietur A D, quoque cubus; ſi enim cubus ad cubum applicetur, oritur cubus, at verò A D, ſupponebatur non cubus, eſſet itaque cubus, & non cubus, quod eſt abſurdum. Quamobrem exiſtente cubo differentia quadratorum nominum, non neceſſario ſequitur Binomium illud eſſe cubum, niſi alia acceſſerit conditio, Quod erat operæ pretium demonſtrare.



a. Ex 1. theor. huius.

THEO-

THEOREMA VII.

Exiſtente cubo differentia nominum, Binomium, non erit cubus niſi alia acceſſerit conditio.

Iiſdem poſitis. Dico A B, Binomium non eſſe cubum, exiſtente cubo A D, differentia nominum, niſi alia acceſſerit conditio. Quoniam ergo alia non requiritur conditio; quadratorum differentia poterit eſſe cubus, & non cubus, ſit igitur non Cubus. Cum itaque differentia nominum ſit cubus, quemadmodum Binomium, ſi differentia iam dicta ducatur in Binomium, fiet cubus, quandoquidem cubus ductus in cubum, facit cubum. At verò ſi differentia nominum ducatur in aggregatum, ſit differentia quadratorum, ergo differentia quadratorum cubus erit, ſupponebatur autem non cubus, quod eſt abſurdum. Quapropter exiſtente cubo differentia nominum, Binomium non erit cubus; niſi alia acceſſerit conditio. Quod erat à nobis oſtendendum.

A D D B
....

THEOREMA VIII.

Binomio exiſtente cubo, non neceſſariò ſequitur quadratorum differentiam cubum eſſe.

Sit Binomium A B, conſtans ex duobus nominibus A C, C B. Dico exiſtente cubo prædicto Binomio, non neceſſariò ſequi differentiam quadratorum ex A C, C B, cubum eſſe. Quoniam enim numerus cubus diuidi poteſt [a]; in duas partes quarum differentia non ſit cubus, nec etiam neceſſariò differentia quadratorum, cubus erit; cum differentia quadratorum non ſit cubus [b]; per ſecundam huius, niſi differentia nominum exiſtente cubo. Ergo Binomio exiſtente cubo, non neceſſariò &c. Quod oportebat oſtendere. a. Per primā huius.

A D C B
....

Præoſtenſis autem, quæ ſupra, nemini futurum exiſtimo in controuerſia poſitum, Binomium cubicum haud rectè deprendi, ex eo, quod quadratis nominibus quadratorum differentia numerus ſit cubus.

Satis autem deprehendi videtur mihi Binomium eſſe cubicum quoties cumq; iuxta leges præſcriptas ab Arte ordinata pragmatia, non elicitur Binomium quod cubicè ductum producat illud, cuius radix cubica deſideratur; neque alia opus eſt induſtria, cum hinc artificioſè conſtet, quod quæritur. Interim igitur cuique ſit exploratum tutiùs procedi non poſſe ad huius veritatis indagationem.

Digitized by Google

Qua Arte ex Binomio propoſito radix, præſertim cubica erui poſſit.

CAPVT XX.

Ars, quà radix cubica ex Binomio propoſito aliqui extrahunt.

AD extractionem igitur radicis ex Binomio propoſito, ſi ſermo ſit de radice cubica, ſic aliqui pragmatiam inſtituerunt.
Sume latus cubicum differentiæ quadratorum nominum, & hoc eſto differentia quadratorum duorum, numerorum, quorum vnus ſit rationalis; alter irrationalis; at verò productum ex triplo numero rationali, in quadratum irrationalis adiunctum cubo numeri rationalis, faciat, numerum rationalem, propoſiti Binomij, ex quo latus cubicum erui proponitur.

Exemplum.

Vt ſit binomium 45 ✣ ℞ 1682. Differentia quadratorum nominum eſt 343, cuius latus cubicum eſt 7. Oportet igitur reperire duos numeros rationalem vnum, irrationalem alterum, qui ſit affectus charactere radicis quadratæ, cùm ex his ſupponatur propoſitum binomium conſtare, & ipſorum numerorum quadrata differant per 7; & quod productum triplum ex numero rationali in quadratum irrationalis addiunctum cubo numeri rationalis, efficiat 45. Cuiuſmodi ſunt 3, & ℞ 2, namhorum quadrata differunt per 7, & 18, triplum productum ex 3, parte rationali in 2, quadratum partis irrationalis, additum ad 27, cubus ex 3, parte rationali, facit 45, partem rationalem propoſiti Binomij 45 ✣ ℞ 1682; itaut radix cubica ipſius ſit 3 ✣ ℞ 2.
Hoc etiam pacto idem reperire licet.

Præceptum alterũ ad idē perficiendum.

Si in propoſito binomio nulla ſit fractio; Sume cubum, numerum contentum in parte rationali, itaut ſubtractus ipſe cubus ab huiuſmodi parte relinquat numerum diuiſibilem in tres partes ſine vlla fractione; Nam ſi tertia hæc pars fuerit diuiſa per latus cubicum accepti numeri cubici, dabit numerum, cuius latus quadratum erit pars irrationalis quæſitæ radicis, exiſtente parte rationali latere cubico iam dicto. Idem eueniet, ſi pragmatia inſtituatur in parte irrationali ipſius binomij.

Exemplum I.

Propoſitum ſit binomium ℞ 108 ✣ 10, ex quo eruenda ſit radix cubica. Maximus cubus contentus in 10, eſt 8, cuius latus cubicum eſt 2, ſubductus ex 10, relinquit 2, numerum, qui non eſt diuiſibilis in tres partes æquales ſine fractione; proinde cubus contentus faciens ad rem erit 1, cuius cubus eſt 1, quo ſubtracto ex 10, relinquitur 9, cuius tertia pars eſt 3, qua diuiſa per 1, latus cubicum iam dictum, ſit 3, cuius radix quadrata eſt ℞ 3, qua addita ad 1, latus cubicum iam dictum fiet ℞ 3 ✣ 1. Quæ autem fiunt mediante parte rationali propoſiti binomij, fieri etiam poſſunt beneficio partis irrationalis.

Exemplum II.

Propoſitum ſit binomium ℞ 1944 ✣ 44, cuius latus cubicum deſideratur. Cubus in 44, contentus, ita vt ſubtractus ex 44, relinquat numerum diuiſibilem in tres partes æquales ſine fractionibus, erit 8, quo ſubtracto ex 44, remanet 36, cuius tertia pars eſt 12. At verò ſi 12, diuidatur per 2, radicem cubicam prædictam, fit quotiens 6, cuius radix quadrata eſt ℞ 6, ad quam addito 2, fit ℞ 6 ✣ 2, & ita ℞ 6 ✣ 2, erit latus cubicum binomij iam dicti ℞ 1944 ✣ 44.

Exemplum III.

Sit binomium vt ſupra 45 ✣ ℞ 1682, cuius latus cubicum deſideratur. Numerus cubus contentus in 45, vt ſubtractus ex ipſo relinquat numerum diuiſibilem in partes æquales ſine fractione eſt 27, cuius latus cubicum eſt 3. At ſi ex 45, ſubtrahatur 27, remanet 18, cuius tertia pars 6, diuiſa per 3, latus cubicum iam dictum, dat 2, cuius radix quadrata eſt ℞ 2, qua addita ad 3, radicem cubicam

modo

Digitized by Google

modo iam dictam fit 3 + ℞ 2, radix cubica quæſita Binomij propoſiti 45 + ℞ 1682.

Si vero in Binomio fuerit fractio, ſumatur numerus cubus maximus contentus in parte rationali propoſiti Binomij. Vt ſit datum Binomium 120 + ℞ $\frac{349496}{27}$. Numerus cubus maximus contentus in 120, eſt 64, cuius latus cubicum eſt 4. Subtractus autem 64, ex 120, relinquit 56, quo diuiſo per 3, fit quotiens 18 $\frac{2}{3}$; hoc autem diuiſo per 4, radicem cubicam, maximi cubi fit quotiens $\frac{14}{3}$, cuius radix ℞ $\frac{14}{3}$, erit pars irrationalis Binomij propoſiti, exiſtente parte rationali, cubico latere iam dicto 4, ita vt latus cubicum quæſitum ſit 4 + ℞ $\frac{14}{3}$.

Cum in Binomio eſt fractio

Vt in ſuprapoſito Binomio 45 + ℞ 1682; pars irrationalis eſt ℞ 1682; eodem modo procedendum erit in hac parte irrationali ℞ 1682; vt diximus, de rationali.

Qua arte cognoſcatur ſine multiplicatione Binomium aliquod eſſe alterius radicem cubicam.

Non erit alienum ab inſtituto explicare quo pacto dignioſiendum ſit num Binomium aliquod ſit radix cubica alterius Binomij; vt inquirendum ſit num 3 + ℞ 2, ſit radix cubica Biuomij 45 + ℞ 1682. Vel cuius nam Binomij ſit radix.

Summe quadratum nominis maioris; & huic adde 6, triplum quadratum nominis minoris ℞ 2; ſummam verò 15, multiplica per 3, nomen maius, & fit 45, maius nomen Binomij cubici.

Deinde cum nomine minori ſic operabimur.

Summe quadratum nominis minoris, & huic adde 27, triplum quadratum nominis maioris, & fit 29; hanc autem ſummam duc in ℞ 2, nomen minus, & prouenier 1682; eiuſq; latus ℞ 1682, erit nomen minus cubici Binomij.

Propoſitum ſit Binomium ℞ 525 + 23 $\frac{5}{8}$, cuius latus cubicum deſideratur. Cubus contentus in 23, ſit 8, cuius latus eſt 2; ſi verò ex 23, ſubtrahatur 8, remanebit 15, quo diuiſo per 3, fit quotiens 5; hoc autem diuiſo per 2, radicem cubicam ipſius 8, fit quotiens 2 $\frac{1}{2}$, cuius latus quadratum eſt ℞ 2 $\frac{1}{2}$ qua addita ad 2 fit 2 + ℞ 2 $\frac{1}{2}$. Itaque latus cubicum oblati Binomij erit 2 + ℞ 2 $\frac{1}{2}$.

Propoſitum ſit Binomium 56 $\frac{1}{4}$ + ℞ 2973 $\frac{61}{64}$.

Cubus contentus in 56 $\frac{1}{4}$ ſit 27, cuius radix eſt 3, ſubtracto autem 27 ex 56 $\frac{1}{4}$, remanet 29 $\frac{1}{4}$ quo diuiſo per 3, fit quotiens 9 $\frac{3}{4}$, hoc autem diuiſo per 3, radicem cubicam ſupradicti cubi, fit quotiens 3 $\frac{1}{4}$, cuius radix quadrata eſt ℞ 3 $\frac{1}{4}$, quæ addita ad 3, radicem cubicam iam dictam, fit Binomium 3 + ℞ 3 $\frac{1}{4}$, radix cubica propoſiti Binomij.

Eruitur radix cubica ex Binomio propoſito adhibita parte rationali.

Propoſitum ſit Binomium ℞ 968 + 25; cuius latus cubicum quæritur. Cubus in 25, contentus, ita vt ex eo, ſubtractus relinquat numerum diuiſibilem in tres partes æquales ſine fractione erit 1, cuius radix eſt 1. At ſi 1, cubus ſubtrahatur ex 25, relinquitur 24, cuius tertia pars eſt 8, quo diuiſo per 1, fit itidem 8, cuius radix quadrata ℞ 8, erit ℞ 8, itaque hac addita ad 1, fit ℞ 8 + 1. & ita ℞ 8 + 1, erit latus cubicum propoſiti Binomij.

Item eadẽ rationali parte adhibita.

Propoſitum ſit Binomium ℞ 20480 + 128, & oporteat latus cubicum eius reperire. Cubus contentus in 128, erit 8, cuius latus cubicum eſt 2, ſi verò ſubtrahatur 8, ex 128, remanet 120, qui diuidi poteſt in tres partes æquales ſine fractione, & quidem tertia pars erit 40, hic autem numerus ſi diuidatur per 2, radicem cubicam iam dictam, fiet quotiens 20, cuius latus quadratum eſt ℞ 20, ad quam addito 2, radice prædicta, fiet ℞ 20 + 2, radix cubica Binomij propoſiti.

Item adhibita parte irrationali.

Quod ſi adhibere velimus partem irrationalem, ſit Binomium ℞ 108 + 10, numerus cubus contentus in ℞ 108, erit ℞ 27, qua ſubtracta ex ℞ 108, remanet itidem ℞ 27. Eſt autem ℞ 3; radix cubica ipſius ℞ 27; & erit ℞ 3, maius nomen binomiæ cubicæ radicis queſitæ. Diuidatur igitur reſiduum illud ℞ 27, per 3, redactum ad quadraticam naturam, & fiet quotiens ℞ 3, qua diuiſa per maius nomen iam dictum, nempè per ℞ 3, quæ erat radix cubica ipſius ℞ 27, fit quotiens 1, cuius radix quadrata eſt 1; atque 1, erit minus nomen quæſitæ binomiæ cubicę radicis. Itaque binomia radix erit ℞ 3 + 1.

Vnde Auctor hãc Regulam alioquin vulgatam, deduxerit, & quomodo Analytice oſtēdatur.

Regula autem ſuperior ad extrahendam cubicam radicem ex propoſito Binomio, inde eſt à nobis deducta. Effingo radicem Binomiam conſtantem ex parte rationali, & irrationali eſſe a + ℞ b c cuius quadratum eſt a^2 † 2 a ℞ b c † b c, & cubus eſt a^3 † 3 a b c † 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c.

a † ℞ b c
a † ℞ b c

a ℞ b c † b c
a^2 † a ℞ b c

a^2 † 3 a ℞ b c † b c
a † ℞ b c

a^2 ℞ b c † a a b c † b c ℞ b c
a^3 † 2 a^2 ℞ b c † a b c

a^3 † 3 a b c † 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c

Reſolutio Binomij in ſua membra.

Itaq; Binomium cubicum eſt a^3 † 3 a b c † 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c. Pars autem rationalis eſt a^3 † 3 a b c, & pars irrationalis eſt 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c. Vides autem huius Binomij partes, in quænam reſoluantur ſingularia membra. Conſideremus primò partem rationalem a^3 † 3 a b c, quæ in hæc reſoluitur, nempe in a^3, cubum primi nominis binomiæ radicis a † ℞ b c, & in 3 a b c, ſolidum factum à triplo b c in a. Vel à triplo a in b c.

Fit reſolutio mediante parte rationali.

Quare cum ex primo nomine rationali propoſiti Binomij cubici, auferimus cubum numerum; reſiduum erit diuidendum in tres partes æquales, quarum quælibet repręſentatur per a b c, & hæc tertia pars diuidenda erit per radicem cubicam inuentam pro primo nomine, repræſentatam per a, vt enim a b c, factum erat ex b c ducto in a, ita pariter vt innoteſcat b c, oportet diuidere a b c, tertiam partem ipſius 3 a b c, per a, quod enim fit per multiplicationem, diuiſione reſoluitur. Igitur cùm altera pars binomiæ cubicæ radicis ſit irrationalis, ea erit ℞ b c, prima rationali exiſtente a.

Mediante parte irrationali idem perficitur.

Si verò idem aſſequi volumus mediante parte irrationali ſic operabimur. Reſoluitur enim 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c in 3 a^2 ℞ b c, & b c ℞ b c. Vbi ℞ b c, repræſentat latus cubicum, in hac parte irrationali, vt a, repręſentabat in parte rationali, & eius cubus eſt b c ℞ b c, & triplum planum, quod intelligitur duci in latus illud cubicum, vt in parte rationali erat 3 b c, quod ductum erat in a, hic repræſentatur per 3 a^2, quod ducitur in ℞ b c. Vel planum, quod intelligitur duci in triplum latus illud cubicum, vt in parte rationali erat b c, quod ductum erat in 3 a, hic repręſentatur per a^2; quod ducitur in 3 ℞ b c. Si ex 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c; auferatur b c ℞ b c nempe cubus, & reſiduum 3 a^2 ℞ b c, diuidatur per 3, fit quotiens a^2 ℞ b c, quo diuiſo per ℞ b c, latus cubicum ipſius b c ℞ b c, fit quotiens a^2, cuius latus a, erit nomen alterum quæſitæ binomiæ cubicæ radicis. Eodem igitur modo procedendum.

Cum igitur eadem ſit compoſitionis, atque reſolutionis via; proinde rectè quidem Regula præcipit, Si ſumatur cubus contentus &c.

Cæterum, quæ de Binomijs diximus, de Reſiduis quoq; intelligenda ſunt; adhibito ſigno deffectus.

Hoc igitur pacto, ex propoſito Binomio licet radicem cubicam eruere, & allatam Regulam analyticè demonſtrare.

Potuiſſet autem operatio inſtitui ſupponendo a † ℞ b pl. pro radice. Fieret enim cubus a^3 † 3 a b pl. † 3 a^2 † ℞ b pl. † b pl. ℞ b pl.. Vnde loco ipſius b c, ſubrogandum erit b pl. nempe b planum, cùm b c, ſit b, ductum in c, hoc autem ſignificatur per b pl.

Propoſitum

a † ℞ b pl.
a † ℞ b pl.

---

a ℞ b pl. † b pl.
a^2 † a ℞ b pl.

---

a^2 † 2 a ℞ b pl. † b pl.
a † ℞ b pl.

---

a^2 ℞ b pl. † 2 a b pl. † b pl. ℞ b pl.
a^3 † 2 a^2 ℞ b pl. † a b pl.

---

a^3 † 3 a^2 ℞ b pl. † 3 a b pl. † b pl. ℞ b pl.

Propoſitum ſit Binomium ℞ $66\frac{10}{27}$ † 8, ex quo eruenda ſit radix cubica. Cubus contentus in parte rationali ſit 1, cuius radix cubica erit 1, qua ſubtracta ex 8, remanet 7, quo diuiſo per 3, fiet quotiens $2\frac{1}{3}$, hoc autem diuiſo per 1, latus cubicum ſuperius, fit quotiens itidem $2\frac{1}{3}$, cuius radix quadrata erit ℞ $2\frac{1}{3}$, qua addita ad 1, fit ℞ $2\frac{1}{3}$ † 1, radix cubica propoſiti Binomij. *Eruitur radix cubica ex Binomio propoſito.*

Sed cuius Binomij, ſit radix cubica Binomium ℞ $2\frac{1}{3}$ † 1. Hunc in modum iuxta ſuperius præceptum dignoſcemus. *Qua Arte cognoſcamus Binomium vnum eſſe radicem cubicã alterius Binomij ſine multiplicatione.*

Nomen maius eſt ℞ $2\frac{1}{3}$ cuius quadratum eſt $2\frac{1}{3}$ ad quod addendum eſt 3, triplum quadratum nominis minoris 1, & fit $5\frac{1}{3}$, hæc autem ſumma redacta ad quadraticam naturam, nempè quadraticè ducta, facit $28\frac{4}{9}$, quo ducto in ℞ $2\frac{1}{3}$ nomen maius, facit ℞ $66\frac{10}{27}$.

Deinde nomen minus eſt 1, cuius quadratum eſt 1, quo addito ad 7, triplum quadratum nominis maioris ℞ $2\frac{1}{3}$, & fit 8, hac autem ſumma multiplicata per nomen minus 1, fit 8, nomen minus quæſiti binomij, cuius nomen maius erit ℞ $66\frac{10}{27}$. Itaque binomium ℞ $66\frac{10}{27}$ † 8, eſt illud, cuius radix cubica eſt ℞ $2\frac{1}{3}$ † 1.

Appoſitè autem hoc demonſtrationis genus adhibetur, hoc enim modo Analytica, Analyticè, vt Geometrica, Geometricè tractantur.

Cęterùm illud eſt etiam operæ pretium aduertere, nimirum cubici lateris nomina reſpondere nominibus Binomij cubici. Vt igitur Binomium conſtat ex numero rationali, & irrationali; ita pariter eius latus cubicum conſtat ex numero rationali, & irrational. Præterea addendum, & illud, nempe ſi numerus rationalis fuerit nomen maius in Binomio cubico, non ita in radice cubica numerus rationalis maius nomen erit, & contra. Vt nec etiam in radice quadrata, de quo infra. *Binomij nominibus reſpondent radicis Binomia nomina.*

Verùm enim verò ſupereſt illud itidem adnotaſſe, nempe non diſſimiliter procedi poſſe in extrahenda radice cubica ex aliquo Binomio, cuius vtrumq; nomen ſit fractio, vel fractiones habeat adiunctas.

Propoſitum ſit Binomium ℞ $1\frac{73}{216}$ † $1\frac{1}{8}$, & ex hoc eruenda ſit radix cubica. Cubus contentus in $1\frac{1}{8}$, ſeu in $\frac{9}{8}$, ſit $\frac{1}{8}$, cuius radix cubica eſt $\frac{1}{2}$, ſubtracto autem $\frac{1}{8}$, ex $1\frac{1}{8}$, remanet 1, cuius tertia pars eſt $\frac{1}{3}$, qua diuiſa per $\frac{1}{2}$, radicem cubicam iam dictam ipſius $\frac{1}{8}$, fit quotiens $\frac{2}{3}$, & huius radix quadrata ℞ $\frac{2}{3}$, erit nomen maius binomiæ quæſitæ radicis. Nomen autem minus eſt $\frac{1}{2}$ radix cubica ipſius $\frac{1}{8}$, vnde radix quæſita erit ℞ $\frac{2}{3}$ † $\frac{1}{2}$. Non diſſimiliter operabimur ad indagandam eandem cubicam binomiam radicem adhibendo partem irrationalem. *Radicis cubica extractio, ex Binomio, cuius vtrumque nomen eſt fractio.*

Cæterùm cuius Binomij ſit radix cubica binomium iſtud ℞ $\frac{2}{3}$ † $\frac{1}{2}$, facilè aſſequemur ſine multiplicatione. Quadratum maioris nominis ℞ $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{3}$, triplum quadratum nominis minoris eſt $\frac{3}{4}$, quo addito ad $\frac{2}{3}$, fiet $\frac{17}{12}$, hoc autem ducto in ℞ $\frac{2}{3}$, fit $1\frac{146}{432}$, ſeu $1\frac{73}{216}$, cuius radix ℞ $1\frac{73}{216}$, erit nomen maius.

Deinde quadratum nominis minoris $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{4}$, cui addito 2, triplo quadrato nominis maioris fit $2\frac{1}{4}$, quo ducto in nomen minus $\frac{1}{2}$, fit $1\frac{1}{8}$, productum, quod erit

nomen minus. Itaque binomium erit ℞ 1 $\frac{21}{216}$ † 1 $\frac{1}{3}$, cuius latus cubicum eſt ℞ $\frac{2}{3}$ † $\frac{1}{2}$.

Quædam conſideranda. Sed ante quam ea nos afferamus, quæ ad vniuerſalem methodum pertinent; conſideranda occurrunt non nulla; & primo non ignorandum, quod aliàs notauimus, nempe Radicis extractionem haberi non immeritò poſſe pro diuiſionis ſpecie; neque hæc operatio ſecus perficitur, ac illa, quæ in vulgari Arithmetica, ex numero propoſito eruitur.

Vt enim ſi aliquis numerus in ſe ducatur, producitur numerus, cuius radix non eſt, niſi numerus ille, qui in ſe ductus fuit. Ita quoque ſi ſpecies aliqua, ſeu Alphabeti elementum ducatur in ſe, producitur id, cuius latus eſt id, quod in ſe ductum fuit.

Quamobrem vt a, ductum in ſe facit a² cuius radix eſt a; Ita quoq; ſi ex a² intelligatur extrahenda radix, ea quidem erit a.

Non diſſimiliter cum a² ducitur in a, producitur a³; Ita etiam ſi extrahatur radix cubica ex a³; ea erit a. Quod intelligendum eſt etiam de alijs radicum ſpeciebus.

Non ſecus ſi ex compoſitis quantitatibus extrahenda ſit radix. Vt enim ex quantitatibus ſimplicibus radicis extractio ſe habet non ſecus ac extractio radicis, ex aliquo numero, qui tantùm ſit vnius characteris. Ita pariter radix ex aliqua quantitate compoſita, non ſecus extrahetur, ac ſi ex aliquo numero, eliciatur radix, quæ pluribus conſtet characteribus.

Vt ſi propoſitum ſit, quadratam radicem extrahere ex a² † 2 a b † b². Primùm oportet extrahere radicem ex a², quæ quidem eſt a, quæ ducta in ſe facit a², quo ablato ex a² remanet o.

Mox verò multiplicetur a per 2, vt fiat 2 a per quod diuidere oportet † 2 a b, vt proueniat in quotiente † b, quo adſcripto priori lateri ſingulari a, ſit latus quæſitum, vt mox dicemus. Si igitur ducatur 2 a in b; ſit 2 a b, quo ſublato ex 2 a b, remanet o. Si verò multiplicetur † b in ſe fit † b², quo ſubtracto ex † b², remanet o; & ſic perfecta erit operatio, vt propoſitæ quantitatis radix ſit a † b.

Sed hæc eadem numeris perficientur. Si enim ſupponamus eſſe 29 † 20; quod binomium, non poteſt vtique dici rigoroſè acceptum, vt ab Euclide vſurpatur lib. X. prop. 37. Alioquin iuxta rigorem Euclideum ſibi hoc nomen vindicare non poteſt. Vult enim ibi lineam ex duabus lineis tantùm potentia commenſurabilibus binomium dici, cuiuſmodi non eſt 29 † 20. Huius radix erit 5 † 2.

Hæc enim in ſe ducta producit 25 † 10 † 10 † 4. Hoc eſt 29 † 20.

Quod, & de Binomio rigoroſè ſumpto intelligi etiam debet.

Si enim fuerit a² † 2 a ℞ e pl. † e pl., radix eius erit a † ℞ e pl. Vbi obſerua etiam ſi plura ſint membra duobus in a² † 2 a ℞ e pl. † e pl. accipi pro duobus, vt fiat binomium; etenim a² † e pl. conſtituit membrum vnum, nempe partem rationalem, & 2 a ℞ e pl. conſtituit partem alteram, ſcilicet irrationalem.

	a † ℞ e pl.	
	a † ℞ e pl.	
	a ℞ e pl. †	e pl.
a² † a ℞ e pl.		
a² † 2 a ℞ e pl. †		e pl.

Huius autem radix; vt diximus eſt a † ℞ e pl. quæ quidem eruitur, non diſſimiliter ac ſuperiùs factum fuit.

Siquidem primum extrahi debet radix ex a², & eſt a, cuius quadratum eſt a², quo ſubtracto ex a², remanet o. Mox autem ducatur a in 2, fit 2 a, per quod diuidatur † 2 a ℞ e pl. & prouenit ℞ e pl. quod adſcribitur primo lateri, ducatur in 2 a, & prouenit 2 a ℞ e pl. quo ſubtracto ex 2 a ℞ e pl. remanet o. Denique ducatur ℞ e pl.

in

in ſe, & prouenit e pl. quo ſubtracto ex e pl. remanet o. Quod etiam numeris abſolui poteſt.

```
              2 ✣ ℞ 3
              2 ✣ ℞ 3
        ─────────────────
           ℞ 12 ✣    3
     4 ✣ ℞ 12
     ───────────────────
     4 ✣ ℞ 12 ✣ ℞ 12 ✣ 3
            7 ✣ ℞ 48
```

Hinc autem innotuit modus extrahendi radicem quadratam ex propoſito binomio, ſi tamen intelligamus Poteſtates omnes ex binomia radice productas terminis conſtare continuè proportionalibus in ratione nominum radicis, ſi terminus vnus tantùm ex æqualibus occurrentibus accipiatur. Siue binomium lata, ſiue ſtricta ſignificatione vſurpetur.

Quamobrem a^2; ae; e^2, ſunt continuè proportionales ſuppoſita radice a † e, cuius quadratum eſt a^2 † 2 a e † e^2, Quemadmodum etiam a^2, a ℞ e pl. e pl. Sunt itidem proportionales, ſuppoſita radice a † ℞ e pl. cuius quadratum eſt a^2 † 2 a ℞ e pl. † e pl. Quod ſuperiùs oſtendimus. Verùm enim verò ex Binomio.

Quæſita radix ſic eruetur. Binomium eſto 7 † ℞ 48. Diuidatur ℞ 48; per 2, vt proueniat ℞ 12. Deinde diuidatur 7, in duas partes, vt rectangulum ſub ipſis, æquale ſit 12, quadrato ex ℞ 12. Et quidem pars vna eſto 1 R, altera erit 7 — 1 R. Rectangulum ſub his eſt 7 R — 1 Q, quod æquabitur 12. Dimidium numeri radicum eſt $3\frac{1}{2}$, cuius quadratum eſt $12\frac{1}{4}$, à quo ſi dempſeris 12, comparationis homogeneum, remanebit $\frac{1}{4}$, cuius radix eſt $\frac{1}{2}$, quæ ſubtracta ex $3\frac{1}{2}$, dimidio coefficientis, remanet 3, hoc autem ſeruetur. Deinde ad $3\frac{1}{2}$, addatur $\frac{1}{2}$, & fiet 4. Horum autem latera ſunt ℞ 3, & 2, quorum aggregatum 2 † ℞ 3, eſt propoſiti binomij radix quæſita.

Sit propoſitum binomium 27 † ℞ 200. Dimidium partis irrationalis eſt ℞ 50. Dimidium verò partis rationalis puta 27 eſt $13\frac{1}{2}$, cuius quadratum eſt $182\frac{1}{4}$. A quo ſi dempſeris 50, remanet $132\frac{1}{4}$ nempe $\frac{529}{4}$, cuius latus quadratum eſt $\frac{23}{2}$, ſeu $11\frac{1}{2}$, quo ſubtracto ex $13\frac{1}{2}$, remanet 2, addito autem eidem $13\frac{1}{2}$, fit 25, horum autem latera ſunt ℞ 2, & 5. Itaque 5 † ℞ 2, erit propoſiti binomij radix quadrata.

Præterea ſit Binomium 5 † ℞ 24. Diuidatur 5, nomen rationale in duas partes, vt productum ab ipſis æquale ſit 6, quadrato dimidiæ partis nominis irrationalis ℞ 24. Pars vna eſto 1 R, alia erit 5 — 1 R, productum ſub his eſt 5 R — 1 Q, quod eſt æquale 6, quadrato dimidiæ partis nominis irrationalis, & reperiemus radicis pretium eſſe 2, & 3, quorum latera ℞ 2, & ℞ 3, connexa per ſignum † exhibent ℞ 3 † ℞ 2 radicem quadratam Binomij propoſiti 5 † ℞ 24.

Igitur eſto Canon.

Quadratum dimidiæ partis irrationalis ſubtrahatur, ex quadrato dimidiæ partis rationalis; reſidui verò latus quadratum ſubducatur ex prædicto dimidio partis rationalis, eidemque addatur, reſidui enim huiuſmodi, & aggregati, latera ſimul iuncta conſtituunt binomium, quod eſt radix quadrata propoſiti Binomij. At verò ex Binomio extrahitur, etiam radix quadrata ad eum modum, quo numeris perfici conſueuit; Subtractis enim à ſe inuicem quadratis partium dati Binomij; Reſidui verò radix quadrata addatur ad maiorem partem, & ab eadem auferatur. Radices enim quadratæ ex ſemiſſe ſummæ, & differentiæ per ſignum ✣ vel — dati Binomij connexæ, binas exhibent radicis partes. Quod alibi vberiùs explicabimus.

Itaque ad extrahendam radicem quadratam ex Binomio propoſito a^2 † e pl. † 2 a ℞ e pl. Ex a^2 † 2 a^2 e pl. † e pl. pl. quadrato partis maioris, nimirum ipſius a^2 † e pl.

ſubtra-

Methodus ex ſupradictis de ductu ad extrahendam radicē ex Binomio propoſito.

Ex Binomio, propoſito, radix educitur.

Canon ex ſuperioribus deductus.

ſubtrabatur 4 a^2 e pl. quadratum partis minoris, videlicet, ipſius 2 a ℞ e pl. & remanebit a^4 — 2 a^2 e pl. † e pl. pl. cuius radix quadrata a^2 — e pl. addita ad maiorem partem a^2 † e pl. & ab eadem ſubtracta; facit ſummam 2 a^2, & differentiam 2 e pl. quarum dimidia ſunt a^2, & e pl. eorum autem radices ſunt a, & ℞ e pl. quarum aggregatum a † ℞ e pl. eſt propoſiti Binomij radix quadrata.

a^2 † e pl. † 2 a ℞ e pl.

a^2 † e pl.	
a^2 † e pl.	2 a ℞ e pl.
	2 a ℞ e pl.
a^2 e pl. † e pl. e pl.	
a^4 † a^2 e pl.	4 a^2 e pl.
a^4 † 2 a^2 e pl. † e pl. e pl.	
4 a^2 e pl.	a^2 † e pl.
	a^2 – e pl.
a^4 – 2 a^2 e pl. † e pl. e pl.	
	2 a^2
a^2 – e pl.	
a^2 – e pl.	a^2 † e pl.
	a^2 – e pl.
– a^2 e pl. † e pl. e pl.	
a^4 – a^2 e pl.	2 e pl.
a^4 – 2 a^2 e pl. † e pl. e pl.	

Extractio cubicæ radicis. Ad extractionem cubicæ radicis, quod attinet. Si fuerit compoſita magnitudo a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3.

Primùm extrahatur latus cubicum ex a^3, quod eſt a; cuius cubus a^3, ſubductus ex a^3, nihil relinquit. Mox verò quadratum ipſius, nempe a^2, ducatur in 3; & fiet 3 a^2, per hoc diuidatur 3 a^2 e, & fiet quotiens e, adnectendum inuento a. Ducatur † 3 a^2 in e, & fiet 3 a^2 e. Hoc autem ſubtracto ex 3 a^2 e, remanebit o. Deinde ducatur e^2 in 3 a, fiet 3 a e^2, quo ſubtracto ex 3 a e^2, remanet o. Denique ex e^3, ſubtrahatur cubus ex e, & nihil remanebit, quod etiam numeris perfici poteſt,

In quo conſiſtat radicis quadratæ extractio ex Binomio. Innotuit autem nobis extractionem quadratæ radicis ex Binomio propoſito de quo loquimur, in eo conſiſtere, vt nomen rationale diuidatur in duas partes, ita vt factum ſub ipſis æquale ſit quartæ parti quadrati alterius nominis; ſcilicet irrationalis. At verò ſi vntrumque nomen irrationale fuerit, reducatur ad illud, cuius nomen vnum ſit irrationale, de quo infra.

Multitudo ſiquidem terminorum, quibus Binomij poteſtates continuò conſtanr, in dupla continua ratione creſcit. Et quidem quadratum conſtat quatuor terminis Cubus verò octo,

At quadrato-quadratum ſexdecim &c.

Huiuſmodi autem poteſtates omnes, ex binomia radice productæ terminis conſtant continuè proportionalibus in ratione nominum radicis, ſi vnus tantùm ex terminis æqualibus occurrentibus accipiatur. Quo fit, vt nomen rationale vnum ſit diuidendum, vt diximus ad extractionem radicis quadratæ.

In quadrato ſunt tres termini proportionales; in cubo quatuor; In quadrato-quadrato quinque &c. De his tamen in Specioſa diſſeremus. Innotuit etiam extractionem cubicæ radicis in eo poſitam eſſe, vt vtumque nomen diuidatur in duas partes, itaut pars minor nominis rationalis ad $\frac{1}{3}$, partis maioris, rationem habeat, quam obtinet $\frac{1}{3}$, partis maioris nominis irrationalis, ad partem minorem.

Atque

Atque adeo ſi fuerit Binomium 26 † ℞ 675; cuius radicem cubicam inquirimus Huiuſmodi radicis extractio in eo conſiſtit, vt 26, diuidatur in duas partes. Itemque ℞ 675, vt pars minor in illo, ad $\frac{1}{3}$, partis maioris rationem habeat, quàm $\frac{1}{3}$, partis maioris in iſto ℞ 675, ad partem minorem. Itaque 26, erit diuidendus in 8, & 18; Atque ℞ 675, in ℞ 432, & ℞ 27, etenim 8, ad 6, tertiam partem ipſius 18, rationem habet, quam ℞ 48, tertia pars ipſius ℞ 432, ad ℞ 27, partem minorem.

In quo conſiſtat cubicæ radicis extractio ex Binomio.

Si verò quæſita radix binomia ſit quadrato-quadratica, non diſſimili methodo innoteſcet huiuſmodi radicis extractionem conſiſtere in eo, vt nomen rationale ſit in tres partes diuiſum; at irrationale in duas; itaut ex his quinque terminis continuè proportionalibus; primus ſit minima è tribus partibus nominis rationalis, quintus autem ſit media, tertius ſit $\frac{1}{6}$, maximæ; At verò ſecundus ſit $\frac{1}{4}$, partis maioris nominis irrationalis, & quartus ſit $\frac{1}{4}$, reliquæ partis. Quæ intelligenda ſunt cum nomina fuerint inæqualia, alioquin ſi æqualia fuerint; nomen irrationale erit in duas partes æquales diuiſum, nomen verò rationale in tres, quarum duæ erunt inter ſe æquales, & fiet Analogiſmus quinq; terminorum æqualium, in quibus conſiſtet quadrato quadraticæ radicis extractio &c.

In quo inuentio radicis quadrato quadraticæ ex propoſito Binomio poſita ſit.

His autem conſideratis, reliquum eſt, vt explicemus quo pacto ex quocunque Binomio propoſito radix erui poſſit; methodus quidem vniuerſalis erit.

Sternitur via ad generalem methodum extractionis.

Primò ad radicem quadratam quod attinet, cum nullum Binomium ſit, ex quo huiuſmodi radicis genus erui non poſſit, de eo nulla poterit eſſe difficultas, quin obſeruatis præceptis eius radix exhibeatur.

At ſi binomium fuerit ex quo radix cubica erui debeat; cùm non omne Binomium radicem habeat cubicam; propterea primò inquirendum eſt, num Binomium propoſitum habeat, vel non habeat radicem cubicam. Si non habeat oportet claudere illud intra parentheſin; ſi verò habeat, obſeruanda eſt methodus, quam hìc generalem tradimus pro extractione radicis cuiuſcunque generis ex propoſito Binomio. Præmiſſis quæ ſequuntur.

Nõ omne enim Binomium habet radicem cubicam.

Primò præmittendum eſt illud, nempè differentiam quadratorum ipſorum nominum eſſe quadratum differentiæ quadratorum nominum Binomij, quod eſt radix quadrata Binomij propoſiti; Itemque differentiam quadratorum nominum, eſſe cubum differentiæ quadratorum nominum illius Binomij; quod eſt radix cubica propoſiti Binomij; Ita vt vniuerſim differentia quadratorum nominum Binomij propoſiti, ſit poteſtas differentiæ quadratorum nominum illius Binomij, quod eſt radix propoſiti Binomij denominata à poteſtate iam dicta.

Primò præmittendum.

Præmittendum ſecundò. Differentia quadratorum nominum applicata ad ipſorum aggregatum, prouenire differentiam eorundem.

Secundò præmittendum.

Præmittendum tertiò. Si differentia nominum addatur aggregato eorundem, fieri duplum nominis maioris; ſi verò ſubtrahatur, fieri duplum nominis minoris.

Tertiò præmittendum.

His autem præhabitis, ad extrahendam radicem ex propoſito Binomio ſic procedendum erit.

Præceptum ſiue Canon.

Primò oportet accipere differentiam quadratorum ipſorum nominum, & ex ipſa elicere latus, iuxta naturam quæſitæ radicis binomiæ. Illud autem ſeruandum eſt.

Præcepti pars prima.

Secundò eruenda eſt radix proxima partis irrationalis, & quidem radix quadrata quæ addenda eſt parti rationali (eruitur autem quadrata radix, cum numerus conſtituens partem irrationalem, ab huiuſmodi radice denominetur).

Secunda præcepti pars.

Tertio ex aggregato, eruenda eſt radix. iuxta naturam quæſitæ radicis binomię; ita tamen, vt inter veram, & hanc proximè maiorem, exceſſus non ſuperet $\frac{1}{2}$. Et huiuſmodi latus pro vero habendum eſt. (Facilè autem elicitur radix illa, quæ non excedat veram, ita vt exceſſus non ſuperet $\frac{1}{2}$).

Tertia pars.

Quartò per huiuſmodi radicem diuidendum eſt latus ſupra ſeruatum, & quotiens addendus, aliquando, & quandoque ſubtrahendus; lateri ſuperius ſeruato.

Quarta pars.

Addendus eſt, cum pars rationalis quæſitæ radicis binomiæ, fuerit maior parte irrationali; Subtrahendus verò cum fuerit minor.

Illud

Digitized by Google

Error multorum in generali methodo decernenda.

Illud autem adijciam pleroſque in hoc fuiſſe deceptos, cum exiſtimauerint additionem fieri debere, quando rationalis pars Binomij, cuius radix quæritur maior fuerit parte irrationali. Contra verò cum minor extiſterit.

Verum enim verò ad id oſtendendum; præter innumera exempla, demonſtratio etiam firmiſſima ſuppetit.

Exempla ad id confirmandum.

At vt ab exemplis ducamus exordium. Iuuabit claritatis gratia numeros rationales, tanquam irrationales tractare. Itaq;

Exemplum I.

Eſto Binomium 52 ✣ ℞ 2304, cuius radix quadrata erit *6* ✣ ℞ *16*. In hoc quidem caſu debet fieri addito non quia 52, vt ipſi perperam crediderun, maior ſit quàm ℞ 2304. Sed quia *6*, maior eſt quàm ℞ *16*.

Exemplum II.

Quod vt euidenter cognoſcamus; præſtat ſupponere Binomium alterum 20 ✣ ℞ 256, cuius latus quadratum eſt 2 ✣ ℞ 16.

Quamuis igitur 20, maior ſit, quàm ℞ 256; non propterea inſtituenda eſt additio, quod fiet manifeſtum hunc in modum. Quadratum ex 20, eſt 400, & ex ℞ 256; eſt 256; quorum differentia eſt 144; cuius latus quadratum eſt 12; ſeruandum. At verò radix ex 256; eſt *16*; quæ addita ad 20, partem rationalem facit *36*; cuius latus eſt *6*; per quod diuidi debet 12; vt fiat quotiens 2, quod non eſt addendum *6*, diuiſori fieret enim 8, cuius dimidium non eſt pars rationalis Binomij 2 ✣ ℞ *16*; Sed potius ſubtrahi debet, vt remaneat 4, cuius dimidium eſt 2.

Exemplum III.

Non diſſimiliter eſto Binomium 52 ✣ ℞ 2304; cuius latus quadratum eſt 4 ✣ ℞ 36, differentia quadratorum nominum eſt 400, cuius latus quadratum eſt 20; ſeruandum. At verò ℞ 2304, eſt 48, addenda 52, parti rationali, vt fiat 100, cuius latus eſt 10; per quod diuidi debet 20, latus ſeruatum, vt proueniat 2; At verò 2, addi non debet 10, diuiſori; foret enim 12, cuius dimidium non eſt 4, pars rationalis Binomiæ radicis quæſitæ 4 ✣ ℞ *36*; Sed potius ſubtrahi debet, vt fiat reſiduum 8, cuius dimidium eſt 4.

Exemplum IV.

Hoc idem etiam luculenter conſpiciemus tractando Binomia, rigoroſè accepta, in quibus nomen vnum, ſaltem re verà irrationale eſt; Vt *19* ✣ ℞ *192*, cuius latus quadratum eſt 4 ✣ ℞ *3*, & rationalis pars maior eſt parte irrationali. Differentia quadratorum nominum eſt *169*; cuius latus quadratum eſt 13; ſeruandum; Deinde latus proximè maius ipſius *192*; eſt 14; quod additum ad *19*, partem rationalem facit 33, cuius latus proximè maius eſt *6*, per quod dinidatur 13; latus differentiæ quadratorum, & prouenit 2 $\frac{1}{6}$; quo addito ad *6*, radicem æſtimatam veram, fit 8, duplum partis rationalis 4, quæſitæ radicis Binomiæ 4 ✣ ℞ 3; Hoc autem non ideo eſt, quia quadratnm ex *19*; ſit maius quadrato ex ℞ 192; Sed potius, quia 4, pars rationalis Binomiæ radicis, maior eſt quàm ℞ 3.

Exemplum V.

Id autem facilè deprehendemus perpendendo hoc aliud Binomium, 21 ✣ ℞ 272, cuius latus quadratum eſt ℞ 17 ✣ 2. Differentia quadratorum nominum eſt *169*; cuius latus quadratum eſt 13, ſeruandum. Deinde radix proxima ipſius 272, eſt 17*, quę addita ad 21, facit 38; huius radix proximè maior eſt *6* $\frac{1}{2}$, per quam ſi diuidatur 13; latus ſeruatum, fit quotiens 2. Si hoc adderetur ad *6* $\frac{1}{2}$, radicem veram æſtimatam, fieret 8, huius dimidium eſt 4, non autem 2; pars rationalis quæſitæ Binomiæ radicis ℞ 17 ✣ 2. At ſi ſubtrahatur ex *6* $\frac{1}{2}$, remanet 4, cuius dimidium eſt 2.

** Radix proximior eſt 16 $\frac{1}{2}$, at ſine fractione eſt 17.*

Exemplum VI.

Præterea Binomium eſto *29* ✣ ℞ 720, cuius latus quadratum eſt ℞ 20 ✣ 3. Eſt quidem *29*; maior quàm ℞ 720; at verò 3, minor eſt, quam ℞ 20. Reperiemus autem fieri debere, non additionem, ſed ſubtractionem.

Differentia enim quadratorum propoſiti Binomij eſt 121; euius latus quadratum eſt 11; At verò radix proxima ipſius 720, eſt 27, quę addita ad *29*; facit *56*; Cuius latus proximè maius eſt 7 $\frac{1}{2}$, per quod diuidere oportet 11; latus differentiæ qnadratorum, & fit quotiens 1 $\frac{7}{15}$, quo addito ad 7 $\frac{1}{2}$, neglettis fractionibus, addito inquam ad 7 $\frac{1}{2}$, radieem æſtimatam veram, fiet 8, euius dimidium eſt 4, non autem 3; pars rationalis Binomiæ radicis ℞ 20 ✣ 3. At verò ſi ex 7, auferatur 1, remanet *6*, euius dimidium eſt 3.

Non diſſimiliter ratiocinandum in radice cubica. Demonſtratio autem poſtulat, vt quæ præmiſimus oſtendamus &c. Primum erat.

Si

Si differentia nominum addatur aggregato eorundem fit duplum nominis maioris. Si verò ſubtrahatur fit duplum nominis minoris.

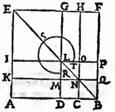


Sit recta A B, conſtans ex duabus partibus A D, D B, quarum differentia ſit A C, protrahatur autem A B, ad E, itaut E A, ſit æqualis A C. Dico E B, eſſe duplum partis A D, quod facilè conſtat. Cùm enim C D, D B, ſint æquales, itemque E A, A C, erit A D, pars maior conſtans ex A C, C D, æqualis E A, vna cum D B, hunc enim in modum æqualia, æqualibus adduntur; At verò E A, vna cum D B, cum ſit æqualis ipſi A D, erit A D, plus E A, vna cum D B, duplum ipſius A D. Sed A D, plus E A, vna cum D B, æqualis eſt ipſi E B, ergo A D, duplum æquale eſt eidem E B; Ergo ſi differentia nominum addatur &c. Quod oportebat oſtendere.



Sit recta A B, repręſentans Binomium, cuius partes ſunt A C, C B, Oſtendendum eſt igitur ſi differentia quadratorum partium A C, C B, applicetur ad ipſorum aggregatum, prouenire differentiam earundem partium.

Secetur D C, æqualis C B, ita vt differentia partium A C, C B, ſit A D. Proximum eſt vt demonſtremus, rectangulum B A D, æquale eſſe differentiæ quadratorum partium A C, C B.



Intelligatur ſuper A B, deſcriptum quadratum A E F B, in quo ducta ſit diameter E B, & ex punctis D, & C, ductæ ſint D G; C H, parallelæ alterutri ipſarum A E, B F, & per puncta interſectionum L, & N; ductę ſint I P, K Q, parallelæ alterutri ipſarum A B, E F. Manifeſtum eſt A D, eſſe differentiam partium A C, C B; & I G, eſſe quadratum ipſius; præterea M O; C Q, quadrata eſſe,[a] & quidem inter ſe æqualia;[b] itemque A M, ipſi K L; atque adeo L H, ac proinde rectangulum A G, æquale eſſe gnomoni, R S T.

a. Coroll. 4. ſecundi.
b. 1. ſexti.

Igitur rectangulum A G, eſt differentia quadratorum partium A C, C B; quare cum rectangulum A G, contentum ſit ſub A E, & E G, hoc eſt A B; & A D; rectangulum B A D, erit differentia quadratorum partium, quoniam autem huiuſmodi planum applicatum ad A B, partium aggregatum reſtituit A D, differentiam earundem, propterea differentia quadratorum partium applicata ad aggregatum ipſarum, prouenit differentia earundem. Quod erat &c.

Ad tertium denique quod attinet, videlicet.

Differentia quadratorum nominum Binomij propoſiti eſt quadratum differentia quadratorum nominum alterius Binomij, quod eſt radix propoſiti Binomij.

Hoc autem vt oſtendamus; ſint numeri, A, B, illius autem quadratum ſit C; iſtius vero D; horum aggregatum eſto G, differentia verò H; quadratum aggregati G, ſit K, differentiæ verò H, ſit L. Rectangulum verò ſub A, & B, eſto E, cuius duplum ſit F, huius quadratum ſit I, differentia verò inter K, & I, eſto M.

A	B	E
6	4	24
C	D	F
36	16	48
G	H	I
52	20	2304
K	L	M
2704	400	400

Ll Demon-

Demonſtrandum eſt M, æqualem, eſſe ipſi L. Hunc enim in modum conſtabit quod intendimus.

Sed non prætereo illud, nimirum hoc eò deduci.

Si duo ſint numeri, ſumanturque eorum latera, quod ſit ſub prædictis numeris æquale eſt quadrato ex facto ſub lateribus.

Hinc enim fit, vt quadruplum factum ſub ipſis numeris æquale, ſit quadrato eius, quod fit ex duplo facto ſub lateribus.

Atque adeò hinc oſtenditur, quod eſt principaliter intentum.

Sed factum ſub duobus numeris æquale eſſe quadrato facti ſub eorum lateribus hunc in modum perſpicuum fiet.

Sint duo numeri A, B, eorumque latera ſint C, & D. Quod fit ſub A, & B, eſto E, quod autem fit ſub C, & D eſtò F.

Dico F, eſſe latus quadratum ipſius E.

Demõſtratio. Quandoquidem A, multiplicans B, producit E; ſupponamus vnitatem eſſe I, erit vt I, ad A, ita B, ad E; & quia C, multiplicans D, producit F, ergo vt I, ad C, ita D, ad F; Sed I, eſt radix ſuimet, & C, radix ipſius A, quemadmodum D, ipſius B, etiam F, erit radix ipſius E.

Hæc etiam ſuperius oſtenſa fuit.

		E		
	A	576	B	
	36		16	
I				H
	C		D	
	6		4	
		F		
		24		

Si enim F, non eſt radix ipſius E, ea eſto H, maior, vel minor. Sit primum maior; Quoniam igitur H, eſt radix ipſius E, ſuntque I, C, D, radices ipſorum I, A, B, ergo I, C, D, H, erunt proportionales; ſiquidem I, A, B, E, ſunt proportionales, ergo H, æqualis erit ipſi F, contra hypotheſin, ſupponebatur enim maior; ita etiam ſi ſupponeretur minor.

At ſi E, eſt quadratum ipſius F, ergo, & E, quadruplum erit quadratum dupli F; quadrata enim ſunt in duplicata ratione laterum. Hæc etiam de cubis, de quadrato-quadratis ſuo modo &c.

Reaſſumamus nunc ſuperiùs paradigma. Quandoquidem A, B, ſunt latera ipſorum C, D; erit E, quod fit ſub A B, radix eius quod fit ſub C, D, & inſuper F, duplum ipſius E, erit radix quadrupli eius quod fit ſub C D. Sed ex hypotheſi F, multiplicando ſe ipſum producit I, ergo I, erit quadruplum eius quod fit ſub C D, at verò ipſorum C, D, aggregatum eſt G, cuius quadratum eſt K;

A	B	E
6	4	24
C	D	F
36	16	48
G	H	I
52	20	2304
K	L	M
2704	400	400

& quadruplo facto ſub partibus ablato à quadrato totius relinquit quadratum differentiæ partium, ergo ſublato I, ex K, quod remanet M, erit quadratum differentiæ partium nempe L, eſt enim H, differentia partium, vt ſupponimus, cuius quadratum L, quod erat nobis propoſitum demonſtrare.

Principale intentum, ex dictis conſtat. Ex his planè conſtat principale intentum, videlicet. Si ex differentia quadratorum partium Binomij eliciatur latus quadratum; & hoc (quandoquidem eſt quadratum differentiæ quadratorum nominum alterius Binomij, quod eſt radix propoſiti Binomij) diuidatur per aggregatum nominum, orietur differentia ipſorum nominum quæſiti Binomij.

At

At vero ſi differentia nominum addatur aggregato, ſit duplum lateris maioris; ſi vero ſubtrahatur, ſit duplum minoris.

Quare ſi nomen rationale eſt maius, ad illud habendum oportet differentiam addere aggregato; ſi vero fuerit minus oporter ſubtrahere. *Quando nomē rationale eſt maius.*

Non igitur attendi debet num pars rationalis maior; vel minor ſir parte irrationali in propoſito Binomio ex quo radix eruenda eſt; ſed potius attendi debet num pars rationalis Binomiæ radicis quæſitæ maior, vel minor fuerit parte irrationali. De hoc iterum infra.

Et in hoc deceptus eſt ille, alioquin optimè meritus de Scientijs Mathematicis, cum attendendum putet num rationalis pars propoſiti Binomij ex quo radix elici debet maior, vel minor fuerit parte irrationali. *Error multorum.*

Sit iniunctum radicem quadratam extrahere ex Binomio 23 ✚ ℞ 448. Hoc autem eſt Binomium primum, cuius maius nomen, plus poteſt quam minus quadrato, cuius radix maiori nomini eſt longitudine commenſurabilis, ipſumque maius nomen expoſito numero rationali eſt commenſurabile longitudine. *Radix, quadrata ex à propoſito Binomio eruitur.*

Radix paulo minor ipſius 448, eſt 21; at vero paulo maior eſt 22; ſi fiat additio ad 23, partem rationalem, fiet 44, vel 45, radix autem quadrata paulo minor eſt $6\frac{1}{2}$, & 7, eſt paulo maior, ſumatur autem differentia quadratorum nominum, eaque eſt 81; cuius latus quadratum eſt 9, diuidendum per 7; radicem paulo maiorem inuentam, & prouenier $\frac{2}{7}$. Hoc autem quoniam pars rationalis maior eſt parte irrationali, addatur ad 7; radicem iam dictam, & prouenier $8\frac{2}{7}$, dimidium autem integri in hoc contenti numeri eſt 4, pars rationalis quæſitę radicis; ex cuius quadrato nimirum 16, auferri debet radix differentiæ quadratorum nominum, quandoquidem quadratum partis rationalis, maius eſt quadrato partis irrationalis, & remanet 7, pro quadrato irrationalis partis, itaque pars ipſa erit ℞ 7; quamobrem quæſita radix propoſiri Binomij erir 4 ✚ ℞ 7.

Quod ſi Binomium fuerit fractionibus implicatum, cuiuſmodi eſt $1\frac{3}{4}$ ✚ ℞ 3, liberetur ab ipſis fractionibus omnia multiplicando per denominatorem 4. Fiet autem $\frac{7}{4}$ ✚ ℞ $\frac{48}{16}$, hoc eſt 7 ✚ ℞ 48. *Quādo Binomium eſt fractionibus implicatum.*

Huius radix ſic eruetur. Radix proximè maior ex 48 eſt 7; quæ addita ad 7, partem rationalem, efficit 14; cuius latus proximè maius eſt 4, ſeruandum. Hoc autem habendum eſt pro vero latere Binomij.

Deinde differentia quadratorum partium eſt 1; cuius radix diuiſa per 4; ſeruatum, dat $\frac{1}{4}$, pro quotiente. Addito autem $\frac{1}{4}$ ad 4; radicem habitam pro vera, dat $4\frac{1}{4}$, maximus integer numerus eſt 4; cuius dimidium eſt 2; pars rationalis Binomiæ radicis quæſitæ. Huius quadratum eſt 4.

At verò ex hoc, ſubtrahatur 1; radix differentiæ quadratorum nominum; & habetur 3, cuius latus eſt ℞ 3, connectantur per ſignum ✚, & proueniet 2 ✚ ℞ 3, latus quæſitum diuidendum per 2; latus quadratum denominatoris 4; & proueniet 1 ✚ ℞ $\frac{1}{4}$, quæ erit radix propoſiti Binomij $1\frac{3}{4}$ ✚ ℞ 3.

Cnm autem pars rationalis; quæſitæ Binomiæ radicis fuerit maior, parte rationali; Habita ipſa parte rationali, ad habendam irrationalem; ex quadrato rationalis ſabtrahatur latus differentiæ quadratorum nominum; propoſiti Binomij, ex quo radix eruenda eſt; & reſidui ſumarur latus. *Quando pars rationalis maior fuerit parte irrationali.*

Contra verò ſi pars rationalis fuerit minor, ei addenda eſt, radix differentiæ quadratorum nominum. *Quādo minor*

Cùm autem vtraque Binomij pars fuerit irrationalis, oportet Binomium illud, ad aliud reuocare, in quo pars vna rationalis ſit. Id autem per multiplicationem alterutrius partis aſſequimur, vel fortè breuiùs, per minoris numeri multiplicationem, vel diuiſionem. *Quādo vtraque pars, eſt irrationalis.*

Sit Binomium ℞ 242 ✚ ℞ 243, & oporteat illud reuocare ad Binomium, cuius altera pats ſir rationalis. Multiplicerur igitur vtrumque nomen per ℞ 242, & proueniet 242 ✚ ℞ 58806. *Exemplum.*

Per multiplicationem. Quod ſi vtrumque nomen foret multiplicatum per ℞ 2, idem breuiùs perficeretur, prouenit enim Binomium ℞ 486 + 22, etenim ducendo ℞ 242 in ℞ 2; fit ℞ 484, hoc eſt 22, multiplicando autem ℞ 243 per ℞ 2, fit ℞ 486.

```
      2 4 3
      2 4 2
    -------
      4 8 6
    9 7 2
  4 8 6
  ---------
℞ 5 8 8 0 6
```

Non diſſimiliter procedendum erit in alijs. Propoſitum ſit Binomium ℞ 4050 + ℞ 3364. Diuidatur vtrumque nomen per ℞ 2. Diuiſa ℞ 4050 per ℞ 2, fit quotiens ℞ 2025, hoc eſt 45. Diuidatur ℞ 3364, per ℞ 2, fit quotiens ℞ 1682. Ex his porro conſurgit Binomium 45 + ℞ 1682; ex quo radix cubica erui poteſt.

Per diuiſionẽ. Sit Propoſitum Binomium ℞ 2028 + ℞ 2025. Diuidatur vtrumque nomen per ℞ 3, & quidem ſi diuidatur ℞ 2028, per ℞ 3, fit quotiens ℞ 676, nempe 26; ſi diuidatur ℞ 2025 per ℞ 3, fit quotiens ℞ 675, itaque fiet Binomium 26 + ℞ 675.

Per multiplicationem autem ſic. Propoſitum ſit Binomium ℞ 54 + ℞ 50. Multiplicetur vtrumque nomen per ℞ 2, & proueniet Binomium in quo alterum è nominibus erit rationale. Si enim multiplicetur ℞ 54 per ℞ 2, fiet productum ℞ 108. At ſi multiplicetur ℞ 50, per ℞ 2, fiet ℞ 100, hoc eſt 10; Vnde Binomium ex huiuſmodi multiplicatione proueniens erit ℞ 108 + 10. Cuius latus cubicum exhiberi poteſt; illudq; eſt ℞ 3 + 1.

Extractio radicis cubicæ ex Binomio propoſito. Ad extrahendam radicem cubicam Binomij propoſiti, non diſſimiliter procedendum; Solum illud intereſt quòd, è differentia quadratorum nominum extrahenda eſt radix cubica, non autem quadrata, & inſuper ex aggregato, quod conſurgit ex proxima radice partis irrationalis, & ex parte rationali, extrahi debet radix cubica, non autem quadrata. In reliquis verò eadem præcepta ſeruanda.

Exemplum. Propoſitum ſit Binomium 45 + ℞ 1682; cuius latus cubicum quæritur: Differentia quadratorum nominum eſt 343, cuius radix cubica eſt 7, ſeruanda. Deinde ſumatur radix quadrata ipſius 1682; eaque eſt 42, quæ addita ad 45, partem rationalem facit 87, cuius radix cubica proximè maior erit 4 $\frac{1}{2}$, (debet autem eſſe proximè maior, itaut eius exceſſus ſupra veram, non ſuperet $\frac{1}{2}$,) per 4 $\frac{1}{2}$, iam inuentam radicem æſtimandam veram, diuidatur 7, vt fiat quotiens 1 $\frac{5}{9}$, quo addito ad 4 $\frac{1}{2}$, radicem æſtimatam veram, proueniet 6, cuius dimidium eſt, 3, & eſt pars rationalis Binomiæ quæſitæ radicis.

At verò ſi ex 9, quadrato ipſius 3, auferatur 7, radix ſuperiùs ſeruata, ſ. radix differentiæ quadratorum nominum, prouenit 2, cuius radix eſt ℞ 2, addenda ipſi 3, vt fiat 3 + ℞ 2, propoſiti Binomij 45 + ℞ 1682, radix cubica.

Explicatur cur fieri debeat additio &c. Primùm autem, addi debet 1 $\frac{5}{9}$, ad 4 $\frac{1}{2}$, ad habendam partem rationalem. Quoniam pars rationalis, quæſitæ radicis Binomiæ, maior eſt parte irrationali.

Secundò ad habendum irrationale nomen, habito rationali, debet è quadrato rationalis ſubtrahi latus differentiæ quadratorum propoſiti Binomij, quoniam rationale nomen quæſitæ Binomiæ radicis maius eſt irrationali, & differentiæ quadratorum nominum latus, eſt differentia, quadratorum nominum quæſitæ radicis Binomiæ.

Exemplum alterum. Sit deinde propoſitum Binomium ℞ 20480 + 128. Differentia quadratorum nominum eſt 4096, cuius latus cubicum eſt 16, ſeruandum.

Deinde radix quadrata proximè maior ipſius 20480, eſt 144, quæ addita ad 128, partem rationalem facit 272, cuius radix cubica proximè maior eſt 6 $\frac{1}{2}$, per quam oportet diuidere 16, latus ſuperius ſeruatum, vt proueniat 2 $\frac{6}{13}$, quod eſt ſubtrahendum ex 6 $\frac{1}{2}$, vt remanat 4 $\frac{1}{26}$, in quo maximus integer numerus eſt 4, cuius dimidium eſt 2, pars rationalis quæſitæ Binomiæ radicis cubicæ, ad cuius quadratum 4, ſi addatur 16, latus ſupra ſeruatum fiet 20, cuius radix quadrata, eſt ℞ 20, addenda inuento 2, vt fiat ℞ 20 + 2, radix quæſita cubica propoſiti Binomij ℞ 20480 + 128.

Explicatur cur debeat fieri ſubtractio. Debet autem ſubtrahi 2 $\frac{6}{13}$, ex 6 $\frac{1}{2}$, ad habendam partem rationalem quæſitæ

Binomiæ

Binomiæ radicis, quoniam huiuſmodi pars rationalis minor eſt parte irrationali.

Vnde eſt, vt ad eius quadratum addi debeat differentiæ quadratorum nominum radix 16; ad habendam partem irrationalem quæſitæ Binomiæ radicis.

Inſuper propoſitum ſit Binomium ℞ 1944 + 44. Radix cubica differentiæ quadratorum partium eſt 2; nam differentia quadratorum è partibus eſt 8, cuius radix cubica eſt 2. At verò radix quadrata ex 1944, eſt maior quàm 44, minor verò, quàm 45. Hanc autem oportet addere parti rationali, puta numero 44, vt fiat 88, vel 89; cuius radix cubica maior eſt, quàm 4, minor verò quàm $4\frac{1}{2}$. Quamobrem diuidatur 2, radix differentiæ quadratorum partium per $4\frac{1}{2}$, radicem, quam diximus rationalem, proueniet $\frac{4}{9}$, quo ſubtracto ex $4\frac{1}{2}$, radice rationali remanet $4\frac{1}{18}$. Sumatur autem 2, dimidium integri numeri 4, & erit pars rationalis Binomiæ quæſitæ radicis; huius autem quadrato 4, ſi addatur 2, radix differentiæ quadratorum, proueniet 6, quadratum reliquæ partis; quamobrem pars ipſa erit ℞ 6, proinde ℞ 6 + 2, erit radix, cubica propoſiti Binomij. *Exemplum alterum.*

Quod ſi ex propoſito Binomio extrahenda ſit radix quadrato-quadrata, id quidem perficietur extrahendo bis radicem quadratam. *Radix quadrato-quadrata ex propoſito Binomio.*

Propoſitum ſit Binomium 97 + ℞ 9408, cuius radix quadrato-quadrata quæritur. Primò notetur differentia quadratorum nominum Binomij; eaque eſt 1, cuius latus quadratum eſt 1. Deinde hoc ſeruato, ſumatur latus proximè maius, numeri 9408, latus inquam quadratum, & illud eſt 97, quod additum ad 97; partem rationalem facit 194, cuius latus quadratum proximè maius eſt 14, per quod diuidendum eſt 1, latus ſupra ſeruatum, vt in quotiente proueniat $\frac{1}{14}$. Interim autem numero ipſi 14, addatur $\frac{1}{14}$ (quoniam radicis Binomiæ quæſitæ maius nomen eſt pars rationalis), & proueniet $14\frac{1}{14}$. Dimidium integri numeri eſt 7; & erit 7; pars rationalis quæſitæ Binomiæ radicis. Quoniam autem pars rationalis eſt maius nomen. Ab eius quadrato 49, ſubtrahatur 1, latus quadratum differentiæ quadratorum nominum, & proueniet 48, cuius latus quadratum eſt ℞ 48, connexis autem hiſce nominibus per ſignum + fiet 7 + ℞ 48.

Mox quidem non diſſimili artificio eruetur latus quadratum huius Binomij 7 + ℞ 48; Differentia quadratorum nominum eſt 1, cuius latus quadratum eſt 1, ſeruandum. Deinde latus quadratum proximè maius ipſius 48, eſt 7, quod additum ad 7, partem rationalem propoſiti Binomij, facit 14, cuius latus quadratum proximè maius eſt 4, per quod oportet diuidere 1, latus ſupra ſeruatum, vt proueniat $\frac{1}{4}$, addendum ad 4, cum pars rationalis Binomiæ quæſitæ radicis maior ſit altera parte; & fit $4\frac{1}{4}$, dimidium autem integri numeri eſt 2, & eſt pars rationalis quæſi-

2 + ℞ 3
2 + ℞ 3
———————
℞ 12 + 3
4 + ℞ 12
———————
7 + ℞ 48
2 + ℞ 3
———————
℞ 147 + 12
14 + ℞ 194
———————
26 + ℞ 675
2 + ℞ 3
———————
℞ 2028 + 45
52 + ℞ 2700
———————
97 + ℞ 9408

ta, à cuius quadrato 4, cum ipſa pars rationalis maior ſit reliqua, auferatur latus differentiæ quadratorum nominum propoſiti Binomij, & remanet 3, cuius latus quadratum eſt ℞ 3, quod additum ad 2, facit 2 ✠ ℞ 3, & eſt radix quadrata propoſiti Binomij 7 ✠ ℞ 48. Atq; adeo quadrato-quadrati eius quod propoſitum eſt ab initio Binomij 97 ✠ ℞ 9408.

Hìc autem vides opere multiplicationis 2 ✠ ℞ 3; in ſe quadrato-quadraticè produci Binomium iam dictum; nempe illud ex quo radix huiuſmodi generis extrahenda proponebatur.

Qua Arte cognoſcatur, cuiusnam Binomij, propoſitum Binomiū ſit radix quadrato-quadratica.

Num autem Binomium aliquod ſit alterius Binomij, vel cuiuſnam Binomij ſit radix quadrato-quadratica, ſine vlla multiplicatione facilè dignoſci poteſt; vt ex dictis intelligere non eſt difficile.

Iam enim ſuperiùs traditum eſt, quo pacto id nobis colligere licet de Binomio cubico.

Erat autem præceptum, vt ad quadratum nominis maioris adderetur quadratum triplum nominis minoris, ſumma verò multiplicaretur per nomen maius. Inde enim alterum maius Binomij quæſiti, prouenit.

Et ſi ad quadratum nominis minoris addatur quadratum triplum nominis maioris, ſumma verò multiplicetur per nomen maius, productum ſiquidem eſt nomen minus quæſiti Binomij.

Hæc autem nos ex eo deduximus, quia ſi exempligratia ſupponamus a, eſſe nomen vnum; at vero ℞ b pl. nomen alterum; manifeſtum eſt ex opere multiplicationis cubicæ prouenire a^3 † 3 a^2 ℞ b pl. † 3 a b pl. † b pl. ℞ b pl. Vbi pars rationalis eſt a^3 † 3 a b pl. pars autem irrationalis eſt 3 a^2 ℞ b pl. † b pl. ℞ b pl. Obſerua autem nomen maius, ex hypotheſi, quod, ſit maius nomen Binomij, eſſe a^3 † 3 a b pl. effectum hunc in modum, nempe addendo quadratum triplum nominis huius ℞ b pl. cuiuſmodi eſt 3 b pl. ad a^2 quadratum nominis alterius a; aggregatum verò a^2 † 3 b pl. multiplicando per nomen ipſum a; fit enim a^3 † 3 a b pl. Deinde ad nomen alterum quod attinet. Quæſiti Binomij nomen ipſum 3 a^2 ℞ b pl. † b pl. ℞ b pl. fieri hoc modo, nempe 3 a^2 triplum quadratum nominis a, addendo ad b pl. quadratum nominis alterius, ſummam vero 3 a^2 † b pl. multiplicando per nomen cuiuſmodi eſt ℞ b pl. hoc enim pacto fit 3 a^2 ℞ b pl. † b pl. ℞ b pl.

Non minus ſi ſermo ſit de radice quadrato-quadratica, idem aſſequemur; nam ſuppoſito, quod Binomium datum ſit a † ℞ b pl. huius quadrato-quadratum erit a^4 † 4 a^3 ℞ b pl. † 6 a^2 b pl. † 4 a b pl. ℞ b pl. † b pl. b pl. ſeu, quod idem eſt a^4 † 6 a^2 b pl. † b pl. pl. † 4 a^3 ℞ b pl. † 4 a b pl. ℞ b pl.

Vbi pars rationalis eſt a^4 † 6 a^2 b pl. † b pl. pl. reliqua eſt pars irrationalis, illa ſit maior ex hypotheſi, quod, ſit nomen maius; hæc erit minor, ſi nimirum fuerit minus nomen. Obſerua autem a^4 † 6 a^2 b pl. † b pl. b pl. factum eſſe ex additione quadrati nominis minoris ad ſextuplum quadratum nominis maioris, ſuppoſito, quod a, ſit nomen maius, & ℞ b pl. nomen minus, deinde verò ſumma ducta ſit in quadratum nominis minoris, productum verò additum ſit ad quadrato-quadratum nominis maioris.

Ad nomen alterum quod attinet. Quadruplo cubo nominis maioris additum ſit productum ex quadruplo nomine maiori in nominis minoris quadratum; ſumma autem ducta ſit in nomen minus.

Vt ſit Binomium 2 ✠ ℞ 3, quadratum nominis minoris eſt 3, quo addito ad 24, ſextuplum quadratum nominis maioris 2, fit 27, hoc autem ductum in 3, quadratum nominis minoris facit 81, quod additum ad 16, quadrato-quadratum ipſius nominis maioris 2, facit 97, nomen rationale quæſiti Binomij.

Deinde quadruplus cubus nominis maioris 2 eſt 32, addatur 24; producto ex 8, quadruplo nominis maioris in 3, nominis minoris quadratum, ſumma autem 56, ducta ſit in ℞ 3, nomen minus, & fiet ℞ 9408, nomen irrationale Binomij quæſiti. Sed de his alibi redibit ſermo.

Supereſt, vt hic adnotemus; poſtquam Binomium datum per numerum aliquem

multiplica-

Digitized by Google

multiplicatum, aut diuiſum fuerit; atque adeo ad aliud redactum, cuius radix inuenta ſit, Arte nimirum tradita, vel alio quocunque modo; Adnotemus inquam ſupereſt, ad conſequendam prioris Binomij radicem, opus eſſe radicem inuentam diuidere, vel multiplicare per radicem numeri, per quem Binomium, fuit multiplicatum, vel diuiſum.

Itaque ſi ſit $12\frac{1}{2}$ ✠ ℞ 242; multiplicetur autem vtraque Binomij pars per 2, fiet 25 ✠ ℞ 968, ſeu ℞ 968 ✠ 25. Huius autem Binamij cubica radix deprehenditur eſſe ℞ 8 ✠ 1. Oportet igitur diuidere ℞ 8 ✠ 1, per ℞ c 2; vt fiat quotiens ℞ c c 128 ✠ ℞ c $\frac{1}{2}$ itaut prioris illius Binomij 12 $\frac{1}{2}$ ✠ ℞ 242, radix ſit ℞ c c 128 ✠ ℞ c $\frac{1}{2}$. *Cū Binomiū diuiditur:*

Supereſſet, vt hic oſtenderemus methodum iam traditam.

Ex dictis tamen difficile non eſt intelligere quo pacto huiuſmodi demonſtratio contexi poſſit. Solum illud inſinuabo, quod ab alijs etiam præſtitum legimus, nimirum. *Aliorum demōſtratio inſinuatur.*

Si ſupponamus Binomium a ☋ ℞ b c, in ſe quadratè ductum facere a^2 † b c ☋ 2 a ℞ b c, & ex hoc in illud gigni a^3 † 3 a b c ☋ 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c, hoc enim erit cubus propoſitę radicis, in quo pars rationalis ſignificatur per a^3 † 3 a b c, pars verò irrationalis per 3 a^2 ℞ b c † b c ℞ b c, vbi obſeruant, quod nos ſuperiùs etiam aduertimus, rationalem partem eſſe compoſitam, ex cubo partis rationalis radicis, & ex triplo ſolido, quod ex hac parte in quadratum reliquę partis radicis conſurgit. Harum autem partium quadrata ſunt a^6 † 6 a^4 b c † 9 a^2 b^2 c^2, & b^3 c^3 † 6 a^2 b^2 c^2 † 9 a^4 b c, quorum differentia erit a^6 ∽ 3 a^4 b c † 3 a^2 b^2 c^2 ∽ b^3 c^3, & hanc eſſe cubum differentiæ inter a^2, & b c, nempe cubum ex a^2 ∽ b c, liquido conſtat. *☋ Significat plus, vel minus.*

Oſtendunt autem Binomium ductum in differentiam quadratorum partium producere ſemper aliud Binomium, in quo differentia quadratorum partium, ſit numerus cubus; atque ex his deducunt intentum. Sufficiat autem hæc inſinuaſſe, obiter enim hìc à nobis de Binomio auctum fuit in gratiam tantummodo extractionis radicis cubicæ ex Binomio propoſito, huiuſmodi enim Pragmatia erat nobis opus ad explicandas cubicas æquationes, alibi autem hac de re inſtituenda erit tractatio.

Illud ad extremum videtur adnotandum, ex ſupra explicata methodo extrahendæ radicis cubicæ ex Binomio propoſito deduci illam, ſic ſe habentem. Sit Binomium ℞ 108 ✠ 10.

Reperiatur numerus cubus, qui detractus ex ℞ 108, relinquat numerum triplum ad ſecundi nominis quadratum, multiplicatum per nomen primùm.

Numerus cubus eſto ℞ 27, qui detractus ex ℞ 108, relinquat numerum ℞ 27; huius autem radix cubica eſt ℞ 3, & ita ℞ 3, erit nomen primum. *Alia extrahēdæ radicis ratio ex ſuperioribus deducta affertur.*

Modo ſecundum nomen eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, cuius triplum eſt 3 Q, quo ducto in ℞ 3, primum nomen, fit ℞ 27 Q, & erit æquatio ℞ 27 Q ⫶ ℞ 27; quare ſi diuidatur ℞ 27, per ℞ 27 Q, fiet quotiens 1, cumque diuiſor afficiatur quadrato: extrahatur radix quadrata ex 1; quamobrem 1, erit, radix; atque adeò nomen ſecundum, ac ob id radix cubica Binomij erit ℞ 3 ✠ 1, ſicut radix cubica reſidui erit ℞ 3 — 1. At verò ſecundi nominis 10, beneficio tali pacto radix reperietur.

Inueniatur numerus cubus, qui deductus ex 10, relinquat numerum triplum ad primi nominis quadratum ductum in ſecundum nomen. Dico igitur numerum cubum eſſe 1, quo ſubtracto ex 10, remanet 9. Modo primum nomen radicis cubicæ extrahendæ eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q, cuius triplum eſt 3 Q, quod multiplicari debet per 1, ſecundum nomen inuentum, & fiet 3 Q, quod æquabitur 9, reſiduo iam habito per ſubtractionem vnius ex 10, & fiet 3 Q ⫶ 9; quare 1 Q, æquabitur 3; proindè ℞ 3, æquabitur pretio vnius radicis, atque adeò ℞ 3, erit nomen primum.

At verò ſecundum erat 1; ob id ℞ 3 ✠ 1, erit radix cubica quæſita, ſicut radix cubica reſidui, erit ℞ 3 — 1.

Superiora quidem conducunt ad oſtendendum, haud benè generaliter pronunciatum fuiſſe in extractione radicis cuiuſcumque generis ex Binomio propoſito at-

tendendum

Digitized by Google

tendendum eſſe, num eius pars rationalis fuerit maior parte irrationali &c.

Quo ſenſu intelligenda ſint ſuperiora.

Alioquin ſi contingat in cubico Binomio, vel aliquo alio; vt pars rationalis, ſit maior parte irrationali, etiam radicis pars rationalis maior eſſe debeat parte irrationali; hoc vtique ſenſu tolerabile erit; perinde enim foret, vnum, vel alterum in ipſius radicis inquiſitione reſpicere; generale tamen præceptum non erit; quamobrem improbandum cenſuimus. Iuuat igitur illud decernere; Exiſtentibus proportionalibus in continua ratione, cum Binomium cubicum fuerit; cubo primi nominis, ſolido ſub quadrato primi, & ſecundo; Solido ſub primo, & quadrato ſecundi, & cubo ſecundi, iuxta hanc hypotheſin; num aggregatum ex primo, & triplo tertij maius ſit aggregato ex triplo ſecundi, & quarto; Binomij primo nomine exiſtente maiori, & ſecundo minori.

Notanda quædam circa ſuperius dicta.

Cùm autem enunciauimus reſpiciendum eſſe ad rationalem partem radicis, quamuis iſta non conſtet, quandoquidem in quæſtione poſita eſt, non ſic accipias amabo; quaſi nos tanquam exploratam adhibendam illam eſſe putemus, ſed quoniam id ſupponendum eſt pro rei natura, de qua agitur; quemadmodum ſuperius à nobis oſtenſum fuit; Fatendum tamen id ad radicis inquiſitionem non facere, niſi quatenus in hac vtroque modo elicita, periculo facto, licet illam præferre, quæ iuxta exigentiam in ſe ducta Binomium reſtituit, ex quo radix eruenda eſt.

Excuſatio.

Si quid autem in his proprio Marte parauimus, negligendum non duximus, eſt enim proles, licet ingenij; atque adeo, eius, quæ eſt corporis, conditionem ſortita, nam.

Εἷς γάρ τις ἐστὶ κοινὸς ἀνθρώποις νόμος,
Καὶ θεοῖσι τοῦτο δόξαν, ὃ σαφῶς λέγω,
θηρσίν τε πᾶσι τέκνα τίκτουσι φιλεῖν.

Rerum difficilium tractatione laus comparatur.

Accedit, quod in difficillimis tentaſſe, ſat eſt ad laudis conſecutionem. Quod ſi in homine laudabilius, nihil perhibetur, quàm præclariora ſectari, commendabile profectò erit id ad quod tractandum, nos amimum appulimus, Quod ſi perficere non licuit, adumbraſſe ſit ſatis. In Mathematicis enim diſciplinis, quæ de Reſolutione diſputat pars in poſtremis habita nunquam fuit, quòd in præclariſſimarum rerum contemplatione occupata, menti pabulum conſentaneum præſtat; prout videlicet hominem ſublimis, peneq; Diuinæ naturæ decet. Sed inter cætera, momenti parui non eſt, quod hìc tractandum aſſumpſimus, in hoc enim multorum è veteribus ingenio præſtanti, atque ſublimi ſe exercuit labor. Tanti autem refert Binomij cubici naturam introſpexiſſe; vt eius quidem ignoratione nemini liceat æquationum ſolidarum reſolutionem adire. Hæc autem quamplurimos præterijt; paucis innotuit; non tamen ſatis pro dignitate tractata, neglexerunt enim rem verſare diligentiùs, ea lege vt præceptis demonſtratione firmatis intellectus acquieſceret, quod nobis præſertim curam ingeſſit; cum non pauca fuerint ad demonſtrationis calculum redigenda. Reliquum autem eſt, vt cubicarum æquationum explicationem aggrediamur; quod pluribus modis perficere tentabimus methodicè procedendo, & præcepta demonſtrando; ne aliquid deſiderandum ſuperſit, quantum ingenij imbecillitas patietur.

De

De explicandis æquationibus Cubicis affectis tantùm ſub latere ; in quibus nimirum ſecundus terminus deeſt.

CAPVT XXI.

Generalem methodum tradidimus, pro explicandis æquationibus cuiuſcumque generis, Analyticè procedendo ; & quidem ſi quid erat quod officeret, curauimus opportuna remedia, vt inſtituta Analyſi denique ad finem Artifex non ſine veritatis lucro perueniret ; Numerorum enim aſymmetria, nimis, eſt oneroſa ; plurimumque vexat animum operantis , vnde locus præcluditur induſtriæ ; propterea non erat prætermittenda ſpecialis ratio explicandi æquationes in quibus plurimum negotij experitur Artifex . Sumemus autem exordium ab æquationibus cubicis ; in quibus ſecundus terminus deeſt , tum quia ad id cogimur naturæ ordine, cum quia ordo etiam doctrinæ id exigit ; eo vel maximè, quòd ad has aliæ quidem artificiosè reuocari poſſunt. *Supradictorũ cõmemoratio.*

Cæterum harum æquationum Geometrica explicatio quantum in Geometria ipſa momenti habeat, ſuo loco planum fiet. *Harum æquationum Geometrica magis fieri debet.*

Interim illud adijciam ; nempe rationem hanc Arithmeticè omnia perficiendi, quæ ad hæc æquationum genera pertinent, exploratam eſſe , etſi diu in tenebris latitauerit, minus tamen conſtare modum, quo hæc Geometricè præſtari, & abſolui poſſint . De his tamen in hac Arte reſolutiua nobis erit agendum alibi. Quo non erit parum gloriæ conſecutus Artifex , oſtendens, quo pacto id Geometricè poſſit abſolui, quaue ratione Geometrica effectio perfici queat. Tanti autem hoc fieri debet, quantum inſigne, ſingulareq; tam nobilis, tamque præſtantis vtriuſque Diſciplinæ poſtulat incrementum. Difficile enim eſt dictu , quantum hinc vtraque ,& ditior, & locupletior euaſerit ; erat quandoquidem Vtriuſque campus ferax , at incultus videbatur effœtus ; Haud erant Problemata ac Theoremata multa quibus Artificis opera poſſet fieri ſatis. Nunc nullum extat, quod ſatis obuium non putes ; nullum tam abſtruſum , ad cuius reſolutionem non liceat apertam calcare viam , & vt Clauis eſt in detegendis veritatibus, quas Natura ſuo Theſauro abſconditas concludit, ita magni facienda eſt ad illas recludendas , vt vix liceat in omni diſciplinarum ordine reperire, vnde humanum animum maior admiratio ſubeat.

De explicanda æquatione , in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere ; datoq; coefficiente plano.

CANON.

Cubus tertiæ partis numeri radicum addatur quadrato dimidij numeri abſoluti , aggregati autem ſumatur latus, cui additum ; vel ſubtractum dimidij numeri abſoluti gignit Binomium , & Apotomen. Si itaque latus cubicum ipſius Apotomes ſubtrahatur à latere cubico Binomij , Reſiduum erit, quæſita radicis pretium . *Præceptum.*

Mm EXEMPLVM

EXEMPLVM.

1 C ✠ 72 R ⵌ 1720.

7 2 9 6 0 0	*Quadratum dimidij numeri abſoluti.*
1 3 8 2 4	*Cubus tertia partis numeri radicum.*
7 5 3 4 2 4	*Aggregatum primum.*
8 6 8	*Radix quadrata ipſius Aggregati.*
8 6 0	*Dimidium numeri abſoluti.*
1 7 2 8	*Aggregatum ſecundum.*
1 2	*Radix cubica ſecundi, aggregati.*
8 6 8	*Radix quadrata primi oggregati.*
8 6 0	*Dimidium numeri abſoluti.*
8	*Differentia.*
2	*Radix cubica differentia.*
1 2	*Radix cubica primi aggregati.*
1 0	*Differentia, & Radix æquationis cubica propoſita.*

Præcepti explicatio.

Itaque tertia pars numeri radicum eſt 24, quæ cubicè ducta in ſe facit 13824, huic addatur 739600, quadratum ex 860, dimidio numeri abſoluti, vt fiat 752424, huius autem radix quadrata eſt 868; huic verò ſi addatur 860, dimidium numeri abſoluti, fiet 1728, cuius latus cubicum eſt 12. At ex 868, radice quadrata iam dicta eodem 860, dimidio ſubducto, remanet 8, cuius latus cubicum eſt 2; hoc autem ſubtracto ex 12, cubica radice ipſius 1728, remanet 10, pro æquationis propoſitæ radice.

Aliter idem effertur.

Cæterum in idem recidit illud.

Sumatur quarta pars, quadrati ex numero abſoluto, & huic addatur vigeſimaſeptima pars cubi ex numero radicum, huius autem aggregati lateri quadrato, addatur dimidium numeri radicum, & ab eodem ſubducatur, ex aggregati verò latere cubico, ſubtrahatur latus cubicum reſidui horum namque differentia erit radix quæſita. Hoc infra oſtendemus.

Præceptum. Explicatur. Exemplum I.

Sit æquatio, vt ſupra 1 C ✠ 72 R ⵌ 1720 Hoc modo ſit explicanda.

Quarta pars numeri abſoluti eſt 739600, cui addatur 13824, vigeſima ſeptima pars cubi ex numero radicum, fiteue 753424, huius latus quadratum eſt 868, cui ſi addatur dimidium numeri abſoluti, nempe 860, fit 1728. Cuius latus cubicum eſt 12. Illudque ſeruetur. Modo idem 860, dimidium numeri abſoluti, ſubtrahatur ex 868, latere illius aggregati ſ. ex quarte parte quadrati numeri abſoluti, & ex vigeſima ſeptima parte cubi ex numero radicum, & remanet 8, cuius latus cubicum eſt 2, quod ſubtractum ex 12, ſeruato, relinqcit 10, pro æquationis propoſitæ radice. Sed redeamus ad primum.

Exemplum II. ad idem.

Sit æquatio 1 C ✠ 6 R ⵌ 20.

Tertia pars numeri radicum eſt 2, cuius cubus eſt 8, at verò quadratum ex dimidio

midio numeri abſoluti eſt 100, quandoquidem dimidium ipſum eſt 10, addatur autem 8, ad 100; vt fiat 108; cuius radix quadrata eſt ℞ 108, huic addatur 10; dimidium numeri abſoluti, & fiet ℞ 108 + 10; Ab eadem autem auferatur 10; & remanebit ℞ 108 − 10. Modo radix cubica Binomij eſt ℞ C (℞ 108 + 10), & radix cubica Apotomes eſt ℞ C (℞ 108 − 10) hæc autem ſi ex illa ſubducatur, remanet ℞ C (℞ 108 + 10) − ℞ C (℞ 108 − 10), pro radice propoſitæ æquationis. Sed tam ex Binomio, quàm ex Apotome radix cubica erui poteſt; ex ijs quæ ſuperiùs docuimus, eſtque Binomij ℞ 108 + 10, radix cubica ℞ 3 + 1. Reſidui verò radix cubica eſt ℞ 3 − 1. Harum autem radicum differentia eſt 2, & ob id 2, erit radix æquationis propoſitæ; atque adeo vnius radicis valor quæſitus.

Sit æquatio 1 C + 9 R = 270.

Tertia pars numeri radicum eſt 3, cuius cubus eſt 27; huic addatur 18225, nimirum quadratum ex dimidio numeri 270, & fit ſumma 18252; cuius radix quadrata eſt ℞ 18252; huic addatur illud dimidium, & fit ℞ 18252, + 135, ex quo eruatur latus cubicum; & erit ℞ C (℞ 18252 + 135) inſuper extrahatur latus cubicum, ex reſiduo, & erit ℞ C (℞ 18252 − 135). *Exempliũ III.*

Hoc autem ex illo ſi dematur, remanebit ℞ C (℞ 18252 + 135) − ℞ C (℞ 18252 + 135).

Et hoc erit radicis pretium.

Verum enim verò Radix explicabilis eſt; ſiquidem ex ℞ 18252 + 135, & ex ℞ 18252 − 135, radix cubica erui poteſt; Illius enim eſt ℞ 12 + 3, iſtius verò ℞ 12 − 3. Si autem ex ℞ 12 + 3, dempſeris ℞ 12 − 3, remanebit 6; pro vnius radicis pretio ſuperioris æquationis.

Sit æquatio 1 C + 9 R = 1836.

Tertia pars numeri radicum eſt 3; cuius cubus eſt 27, huic addatur 842724, quadratum ex 918. dimidio numeri 1836; Fit 842751, cuius latus quadratum eſt ℞ 842751, cui addito 918, fiet ℞ 842751 + 918, cuius latus cubicum eſt ℞ C (℞ 842751 + 918), ex hoc autem ſubtrahatur latus cubicum reſidui, vt ℞ C (℞ 842751 − 918), & remanebit ℞ C (℞ 842751 + 918) − ℞ C (℞ 842751 − 918). At verò radix cubica illius Binomij ℞ 842751 + 918, eſt ℞ 39 + 6, Reſidui verò ℞ 842751 − 918, eſt ℞ 39 − 6. Si ex ℞ 39 + 6, auferatur ℞ 39 − 6, remanebit 12, pro radice æquationis propoſitæ. *Exempliũ IV.*

Propoſita ſit æquatio 1 C + 12 R = 112.

Tertia pars coefficientis, ſeu numeri radicum eſt 4, cuius cubus eſt 64, cui addito 3136, quadrato ex 56, dimidio comparationis homogenei, ſeu numeri abſoluti 112, prouenieт 3200; cuius latus quadratum eſt ℞ 3200, cui ſi addideris prædictum dimidium, puta 56, fiet ℞ 3200, + 56, Binomium, ſi verò idem dimidium ex illo ſubduxeris, fiet ℞ 3200 − 56, quorum latera cubica ſunt ℞ C (℞ 3200 + 56), & ℞ C (℞ 3200 − 56) quæ ſi per ſignum defectus ſeparentur, fiet radix æquationis propoſitæ ℞ C (℞ 3200 + 56) − ℞ C (℞ 3200 − 56) Sed Binomij ℞ 3200 + 56, latus cubicum eſt ℞ 8 + 2, & radix cubica Apotomes ℞ 3200 − 56, eſt ℞ 8 − 2. Hæc autem ſi ab illa auferatur, fit 4, radix æquationis propoſitæ. *Exempliũ V.*

At verò, tam Binomij, quàm Apotomes, illas eſſe radices cubicas hunc in modum deprehendemus.

Cubus contentus in 56, itaut ex hoc numero 56, ſubtractus relinquat numerum integrum diuiſibilem in tres partes æquales ſine fractione eſt 8, quo ſubtracto ex 56, remanet 48; cuius tertia pars eſt 16; hic autem numerus ſi diuidatur per 2, latus cubicum ipſius 8, fit quotiens 8, cuius radix quadrata ℞ 8, adſcito 2, latere cubico iam dicto facit ℞ 8 + 2. Itaq; ℞ 8 + 2, erit latus cubicum illius Binomij, quemadmodum ℞ 8 2, − erit latus cubicum Reſidui. *Supradictorũ comprobatio*

Digitized by Google

Hæc methodus maximè Arithmeticè conſentanea.

Hæc autem explicandæ æquationis cubicæ ratio maximè, vt, & eius demonſtratio Arithmeticæ eſt conſentanea. Inſtituitur enim additio inter heterogenea; & fit aſcenſus multiplicatione ad imaginarias quantitates.

Quædam adimantur.

At candor ille Geometricus ab his inquinari non permittit; deturpari non patitur. Et quidem hæc methodus à nonnullis infœliciter tamen, vt opinor, fuit demonſtrata. Fotet irritus labor, ſi quis Geometricè in quibuſdam contenderet illam oſtendere, præcipitur enim, vt coefficientis tertia pars cubicè multiplicetur, & productum addatur quadrato comparationis homogenei. At quis non videt, ex illa cubica multiplicatione plani, cuiuſmodi eſt coefficiens, atque adeo eius tertia pars non procreari quantitatem intra cancellos Geometricos contentam? imaginaria enim eſt, cuius contemplationem Geometra dedignatur. Ita dimidium comparationis homogenei, quod ſolidum ſupponitur, quadraticè ductum, quantitatem gignit alterius generis ab ea, quę ſub Geometrica cadit contemplatione, ſic & alia obſunt Artifici, ne hęc Geometricè tractate poſſit. Illud tamen non diſſimulandum, ſi poteſtates tanquam ſimpliciſſimę longitudines concipiantur, rem quidem eò deduci poſſe, vt pateat aditus ad Geometram ipſum. Huius tamen loci non eſt hac de re diſſerere. Subijciam, nempe methodum hanc Arithmeticè oſtendi poſſe; In ſerie enim quatuor quantitatum continuè proportionalium, vt mox etiam dicemus, cubus è ſecunda plus ſolido à quadrato primæ in ſecundam, æqualis eſt ſolido à quadrato primæ in aggregatum ſecundæ, & quartæ; ita vt in hoc æquationis genere, quadratum primæ ſit coefficiens; ſolidum à quadrato primæ in aggregatum è ſecunda, & quarta ſit comparationis homogeneum, ipſa verò ſecunda radicis æſtimatio. At ſi ad quadratum è dimidio ſolidi contenti ſub quadrato primæ, & aggregato ſecundæ, & quartę addatur cubus è triente quadrati primę; aggregati verò lateri quadrato addatur, & ſubtrahatur prædictum dimidium ſolidi; differentia inter latera cubica aggregati, & reſidui æqualis eſt ſecundæ è quatuor quantitatibus continuè proportionalibus ſupra dictis, propterea huiuſmodi differentia erit radicis valor in æquatione propoſita, in qua nimirum coefficiens eſt quadratum primæ è quatuor proportionalibus, comparationis autem homogeneum eſt &c.

Maioris vel minoris inter extremas.

Sit æquatio $a^3 \dagger b^2 a = b^2 d$, *& tranſmutata induat hanc formam.*

$$a^3 = * - p\,a \dagger q.$$

Specioſa reſolutio.

Si igitur ſit æquatio prima $a^3 = * - p\,a \dagger q$, hæc methodus obſeruari debet. Sumatur $\dagger \frac{1}{2} q$, illudque ſeruetur, mox autem accipiatur $\frac{1}{4} q^2$, cui addatur $\frac{1}{27} p^3$ & ex aggregato extrahatur latus quadratum, illudque addatur ipſi $\dagger \frac{1}{2} q$: Superius ſeruato, ex toto hoc autem aggregato ſumatur latus cubicum, cui ſubducatur latus cubicum huius reſidui, nempe ſumatur ℞ $(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3)$, ex hoc autem latere ſubtrahatur $\frac{1}{2} q$; ita vt fiat $- \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3)$ huius porro reſidui latus cubicum erit ℞ $C\,(- \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3))$, factaque ſubtractione, vt dictum eſt; futura eſt radix, vt hic vides.

℞ $C\,(\dagger \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3)) -$ ℞ $C\,(- \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3))$.

Hæc autem iuuabit numeris explicare; Sit æquatio primò propoſita.

$$\underset{a^3}{1\,C} \dagger \underset{p}{72\,R} = \underset{q}{1720}.$$

Numeris explicatur.

Huius æquationis radix erit.

℞ $C\,(\dagger 860 \dagger$ ℞ $(739600 \dagger 13824)) -$ ℞ $C\,(- 860 \dagger$ ℞ $(739600 \dagger 13824))$

** ſeu 868.*

hoc eſt, ℞ $C\,(\dagger 860 \dagger$ ℞ 753424*$) -$ ℞ $C\,(- 860 \dagger 868)$.

Hoc eſt ℞ $C\,1728 -$ ℞ $C\,8$.

Hoc eſt $12 - 2$. Hoc eſt 10, & ita 10, erit radix propoſitæ æquationis.

Huius autem methodi demonſtratio ſic ſe habet.

Suppo-

Supponamus A B, æquari a, eſt autem a, radix ſuperioris æquationis, quæ quidem ſupponitur valere 10; adeò vt A C, æquetur huic, nempe $\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$. *Huius methodi demonſtratio.*



Si igitur accipiatur reſiduum iſtud, id eſt $\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ æquale nimirum lineæ B C, eorum differentia erit $\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)-\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, & quidem æqualis erit hæc differentia ipſi A B.

Si verò ſtatuamus A B, æquari a, differentiæ cuborum ex prædictis radicibus, nempe differentiæ inter $\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, nempe cubum ex $\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q\dagger\frac{1}{27}p^3)$ ex hunc ſcilicet $-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ cubum nimirum ex $-\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ erit inquam iſtorum cuborum differentia æqualis q; vt patet ex opere multiplicationis &c.

Erit igitur q differentia inter cubum lineæ A C, & cubum lineæ B C, Cubus autem

Cubus $\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ *ex A C.*
Cubus $-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ *ex B C:*
q. Differentia cuborum ſupradictorum.

ex A B, atque triplum productum rectarum A C, B C, A B, ſimul æquantur eidem differentiæ q, quandoquidem cubus ex A B, plus cubo ex B C, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, ſimul æquatur cubo lineæ A C, vt enim q, eſt differentia inter illos duos cubos $\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3$ & $-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, ita cubus ex A B, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, ſimul; proinde cubus ex A B, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, æquabitur q. Quamobrem a^3, nempe cubus ex A B, vna cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æquabitur q; Illud autem triplum productum, comparabitur, ſi multiplicemus Binomium $\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, æquale rectæ A C, per reſiduum $\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ æquale rectæ B C; At verò inſtituta multiplicatione, vt vides ex $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$ in ſe fit certè $\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3$. Inſuper ex $\dagger\frac{1}{2}q$ *in* $-\frac{1}{2}q$ *fit* $-\frac{1}{4}q^2$. Si igitur ad iſtud $\dagger\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3$ addatur $-\frac{1}{4}q^2$, fit ſumma $\dagger\frac{1}{27}p^3$. Etenim †, & — in additione ſubtrahuntur.

Producta verò facta ex $\dagger\frac{1}{2}q$; & $-\frac{1}{2}q$, in radicem illam nimirum $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, quoniam vnum euadit affectum ſigno †, alterum verò ſigno —, proinde ſe mutuo deſtruunt; Quamobrem ſi ducatur $\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$

$$\text{℞}\,C(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$$
$$\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$$
$$\dagger\text{℞}\,C(\ldots\ldots\ldots)\dagger\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3$$
$$-\frac{1}{4}q^2-\text{℞}\,C(\ldots\ldots\ldots)$$
$$\frac{1}{27}p^3$$
$$\text{℞}\,C(\frac{1}{27}p^3)$$
$$\text{ſeu } \frac{1}{3}p$$

in hanc nimirum $\text{℞}\,C(-\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3)$, fiet productum $\text{℞}\,C(\frac{1}{27}p^3)$, ſeu $\frac{1}{3}p$ nempe radix cubica ipſius $\frac{1}{27}p^3$, fit autem productum illud $\text{℞}\,C(\frac{1}{27}p^3)$ quoniam radices cubicæ ligatæ fuerunt multiplicatæ; proinde etiam productum debet eſſe huiuſmodi, nempe radix cubica &c. Triplum autem productum (erat enim in æquatione, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B,) erit quidem p; hoc autem ſi multiplicetur per a, quoniam productum ex A C, in B C, fuit ductum in A B, fiet pa, quamobrem $a^3\dagger pa$, æquabitur q. Vel a^3 æquabitur $-pa\dagger q$. Vel demum $a^3\dagger pa-q=0$.

De hoc iterum redibit ſermo, & in quo huiuſmodi demonſtrationum vis conſiſtat explicabimus.

Superiùs

$$
\begin{array}{r}
e + b \\
e + b \\
\hline
b\,e + b^2 \\
e^2 + b\,e \quad\; \\
\hline
e^2 + 2\,b\,e + b^2 \\
e + b \\
\hline
b\,e^2 + 2\,b^2\,e + b^3 \\
e^3 + 2\,b\,e^2 + b^2\,e \quad\;\; \\
\hline
e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3
\end{array}
$$

Aſſumpti demonſtratio. Superiùs à nobis aſſumptum fuit quod veriſſimum eſt; Nempe ſi fuerit recta A C, vtcunque in B, diuiſa, cubum lineæ A B, plus cubo lineæ B C, atq; triplo producto linearum A C, B C, A B, ſimul æquari cubo lineæ A C; Supponamus A B, æquari e, & B C; æquari b; tota A C, æquabitur $e + b$; erit autem productum linearum A C, B C, A B;

Idem quod $b\,e^2 + b^2\,e$, huius triplum erit $3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e$, huic verò ſi addantur cubi linearum A B, B C, fiet $e^3 + 3\,b\,e^2$, $+ 3\,b^2\,e$, $+ b^3$; Hæc autem ſumma æqualis eſt cubo ex recta A C, nam hæc erat $e + b$, cuius cubus conſtat opere multiplicationis vt ſupra.

Cæterùm ſuperior methodus ex alijs etiam principijs deduci potuiſſet, atq; adeo aliæ æquationes conſentaneæ ſupponi $a^3 \dagger 3\,b$ pl. $a = d$ ſol. Item $a^3 \dagger 3\,b$ pl. $a = b$ pl. d.

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

Sit æquatio $a^3 \dagger b^2\,a = b^2\,d$.

Propoſitio. Quoniam autem.

Si ſint quatuor quantitates continuè proportionales, cubus à ſecunda, plus ſolido à quadrato primæ in ſecundam æqualis eſt ſolido à quadrato primæ in aggregatum ex ſecunda, & quarta.

Propterea in æquatione propoſita coefficiens planum eſt quadratum primæ maioris, minoriſue inter extremas, ſeu quod idem eſt, latus, quod poteſt planum coefficiens eſt prima maior, vel minor inter extremas, & aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt quantitas ortiua ex applicatione ſolidi comparationis homogenei, ad planum coefficiens. Eò igitur res deducitur, vt ſi ſit æquatio huiuſmodi $a^3 \dagger b^2\,a = b^2\,d$.

Vt b, ſit prima maior, vel minor è. quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, at d, ſit aggregatum ex ſecunda, & quarta; vnde fit vt, a radix, ſit ſecunda; quare oportet.

Zeteticum. *Data prima, & aggregato ex ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, inuenire ſecundam.*

Secunda ex quatuor prædictis continuè proportionalibus eſt radix æquationis cubicæ propoſitæ.

At verò propoſitio ſuperior.

Si ſint quatuor quantitates continuè proportionales, cubus è ſecunda plus ſolido &c.

Propoſitionis probatio, ſeu demonſtratio. Sic Analyticè demonſtrabitur.

Sunto quatuor quantitates continuè proportionales b. a. c. d. Quoniam autem hæ ſunt in continua ratione, proinde erit b^2, quadratum primæ, ad a^2, quadratum ſecundæ, vt a, ſecunda ad quartam, vt patet ex Elementis, atque adeo conuertendo, vt a^2 ad b^2, ita d, ad a, & componendo, vt $a^2 \dagger b^2$ ad b^2, ita $d \dagger a$, ad a. Sed etiam conuertendo erit b^2 ad $a^2 \dagger b^2$, ita a, ad $d \dagger a$, ergo productum ſub

medijs

medijs æquabitur producto ſub extremis; quare a^3 † $b^2 a$, æquabitur $b^2 d$ † $b^2 a$. Sed a^3, eſt cubus è ſecunda ſolidum $b^2 a$, eſt contentum à quadrato primæ in ſecundam. Denique $b^2 d$ † $b^2 a$, eſt ſolidum à quadrato primæ in aggregatum è ſecunda, & quarta; proinde ſi fuerint, quatuor quantitates continuè proportionales &c. Quod oportebat oſtendere.

Propoſita ſit æquatio 1 C ✣ 36 R = 2160; erit igitur 36, quadratum primæ, e quatuor continuè proportionalibus, at verò aggregatum è ſecunda, & quarta, orietur ex applicatione 2160, ad 36, cum enim 2160, ſit ſolidum à quadrato primæ in aggregatum ex ſecunda, & quarta, ſi applicetur huiuſmodi ſolidum ad quadratum ipſum orietur aggregatum ex ſecunda, & quarta, erit autem 60. Secunda eſto 1 R, ergo quarta erit 60 — 1 R, ſolido autem ſub primæ quadrato, & quarta eſt æqualis cubus e, ſecunda cum ſit, vt quadratum primæ ad quadratum ſecundæ ita ſecunda, ad quartam, quare 1 C, æquabitur 36, in 60, hoc eſt 2160 — 36 R, & per antitheſin fiet 1 C ✣ 36 R = 2160.

Ad huius igitur æquationis explicationem, oportet.

Data prima è ſerie quatuor continuè proportionalium, datoq; aggregato ex ſecunda, & quarta, diſtinguere ſingulas. *Zeteticum.*

Cæterum iuxta priorem methodum, æquatio propoſita ſic explicaretur, cubus è tertia parte coefficientis plani eſt 1728, quo addito ad 1166400, quadrato à 1080, dimidio numeri 2160, fit 1168128, cuius radix quadrata eſt ℞ 1168128, cui addito, & ſubtracto prædicto dimidio fit ℞ 1168128, ✣ 1080, & ℞ 1168128 — 1080; Horum autem latera cubica ſunt ℞ 48 ✣ 6, & ℞ 48 — 6. Quorum differentia eſt 12. Itaque propoſitæ æquationis radix eſt 12. Quare primus è, quatuor numeris continuè proportionalibus erit 6, ſecundus 12; quartus erit 60 — 12, nempe 48, tertius erit radix quadrata producti ex 48, in 12, vel tertius proportionalis ad 6, 12, nempe 24.

Propoſita ſit ęquatio 1 C ✣ 9 R = 810.

Iuxta priorem methodum ſic procedendum eſſet, Dimidium numeri abſoluti 810, eſt 405, cuius quadratum eſt 164025; huic ſi addatur 27, cubus è 3, triente coefficientis plani, 9. fit 164052, cuius radix quadrata eſt ℞ 164052 cui additio 405, dimidio iam dicto fit ℞ 164052 † 405, & ab eadem ℞ 164052, ſubtracto ipſo dimidio, remanebit ℞ 164052 — 405. Horum autem radices cubicæ ſunt ℞ c (℞ 164052 ✣ 405) & ℞ c (℞ 164052 — 405) ex Binomio autem ſi ſubduxeris reſiduum ℞ c (℞ 164052 — 405) remanebit ℞ c (164052 † 405) — ℞ c (℞ 164052 — 405). At vero ex huiuſmodi Binomio, & reſiduo, radices cubicæ extrahi poſſunt. Binomij ſiquidem radix cubica eſt ℞ 23 $\frac{1}{4}$ † 4 $\frac{1}{2}$. Reſidui vero eſt ℞ 23 $\frac{1}{4}$ — 4 $\frac{1}{2}$. Harum quidem differentia eſt 9. itaq; 9, erit radix ſuperioris æquationis. *Proponitur æquatio explicanda.*

At vero radices cubicas, prædictorum eas eſſe, quas diximus ſic oſtendemus. Quadratum nominis maioris ℞ 23 $\frac{1}{4}$ eſt 23 $\frac{1}{4}$ cui ſi addideris 60 $\frac{3}{4}$, triplum quadratum nominis minoris fiet 84, quo ducto in ℞ 23 $\frac{1}{4}$ nomen maius, fit ℞ 164052 nomen maius quæſiti Binomij. Deinde quadratum nominis minoris 4 $\frac{1}{2}$ eſt 20 $\frac{1}{4}$ at ſi huic addatur 69 $\frac{3}{4}$, triplum quadratum nominis maioris fiet 90, quo ducto in nomen minus 4 $\frac{1}{2}$ Fit productum 405, nomen minus Binomij, cuius latus cubicum dicebatur eſſe ℞ 23 $\frac{1}{4}$ † 4 $\frac{1}{2}$. Non diſſimiliter de Reſiduo. *Supradictorũ explicatio.*

Cæterum, cubicam radicem ex illo Binomio extraximus hunc in modum Radix quadrata proximè maior numeri 164052 eſt 406, cui ſi addideris partem rationalem 405, fiet ſumma 811, cuius radix cubica maior eſt quàm 9 ſed minor quàm 9 $\frac{1}{2}$ per hanc diuidatur 3 latus cubicum numeri 27, qui eſt differentia inter 164052, & 164025, nempe inter quadrata partium Binomij propoſiti fit quotiens $\frac{6}{19}$ quo ſubtracto ex 9 $\frac{1}{2}$ radice cubica ſuperius habita proxime maiori; fit reſiduum 9 $\frac{7}{38}$. Integri autem numeri dimidium eſt 4 $\frac{1}{2}$ & 4 $\frac{1}{2}$ eſt pars rationalis binomiæ radicis cubicæ de qua quæritur. Ad habendam partem irrationalem, quadraticè

ducatur

ducatur $4\frac{1}{2}$ & ſit $20\frac{1}{4}$ cui addito 3. radice cubica differentiæ quadratorum partium Binomij, fit $23\frac{1}{4}$ cuius radix quadrata eſt ℞ $23\frac{1}{4}$ cui, addito $4\frac{1}{2}$ fit ℞ $23\frac{1}{4}$ † $4\frac{1}{2}$: fit Radix quæſita.

Vel numerus cubus contentus in 405, ſit $91\frac{1}{8}$ cuius radix cubica eſt $4\frac{1}{2}$ at vero ex 405, ſubtracto $91\frac{1}{8}$ remanet $313\frac{7}{8}$ ſeu $\frac{2511}{8}$ cuius tertia pars eſt $\frac{837}{8}$ hic autem numerus diuidatur per $4\frac{1}{2}$ radicem cubicam ipſius $91\frac{1}{8}$, fit quotiens $23\frac{1}{4}$ cuius radix quadrata eſt ℞ $23\frac{1}{4}$, & hæc erit pars irrationalis quæſitæ binomiæ radicis; At pars rationalis erit $4\frac{1}{2}$. Itaque radix vniuerſa erit ℞ $23\frac{1}{4}$ † $4\frac{1}{2}$

Hic autem obſerua, non vnum eſſe cubum contentum in numero 405, itaut ex hoc ſubtractus relinquat numerum diuiſibilem in tres partes ſine fractione. Ita quidem v. g. eſt 216, qui ablatus ex 405, relinquit 189, cuius tertia pars eſt 63. Quod etiam obſeruare licet in hoc alio exemplo, vt ſi propoſitum ſit Binomium, ℞ 1168128 † 1080. Cuius latus cubicum eſt ℞ 48 † 6. Numerus enim cubus contentus in 1080, itaut ſubtractus relinquat numerum diuiſibilem in tres partes ſine fractione; eſt alius etiam a 216, cubo ex 6; eſt enim 729, cubus ex 9, ſiquidem ſubductus ex 1080. relinquit 351. diuiſibilem vt requiritur, eius enim tertia pars eſt 117. Præceptum igitur intelligendum eſt, vt videatur maximus, vel minimus, qui ſi non ſit idoneus, eligantur deinceps, quod etiam ſuperiùs tetigimus.

Ita ſi ſit Binomium ℞ 11951936 † 3456, ex quo radix cubica ſit eruenda, quæ quidem eſt ℞ 101 † 9. ne dum numerus 729, cubus ex 9. ſubductus ex 3456, relinquit numerum diuiſibilem in tres partes ſine fractione, relinquit enim 2727, cuius tertia pars eſt 909. ſed etiam, 3375, cubus ex 15, relinquit enim 81, cuius tertia pars eſt 27. Propterea cautè in hoc procedendum; vnde in hoc caſu præferendus eſt 729, vt vides. Obſerua igitur in propoſito numero, quot ſint numeri contenti, cum ſupra poſita conditione, &c. & præfetas illum, qui facit ſatis.

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

a^3 † 3 b pl. a = d ſolido.

Et quoniam vt ex alibi traditis eſt manifeſtam Cubus differentia laterum, plus triplo ſolido ab eadem differentia in planorum ſub lateribus æqualis eſt differentia cuborum ab eiſdem lateribus.

Propterea ex hoc facilè conſtat alia eandem æquationem explicandi ratio. Siquidem coefficiens erit triplum planum ſub lateribus, comparationis homogeneum erit differentia cuborum, & æquationis radix erit laterum differentia, vt ſi fuerit a^3 † 3 b pl. a = d ſolido; erit quidem b pl. erit in quam planum ſub lateribus, & d ſol. erit differentia, cuborum ab eiſdem; at vero a, erit differentia laterum. Oportet igitur.

Zeteticum. *Data differentia cuborum, & rectangulo ſub lateribus reperire laterum differentiam.*

Cum autem quadratum differentiæ cuborum, plus rectangulo ſub lateribus quadruplo cubo, æquale ſit quadrato aggregati cuborum; Si comparationis homogeneum quadraticè multiplicetur, eidemque addatur quadruplus cubus à plano ſub lateribus, aggregati, verò ſumatur latus quadratum, hoc vtique erit aggregatum cuborum, quorum differentia eſt comparationis homogeneum. Quamobrem oportet.

Zeteticum. *Data differentia cuborum, & aggregato eorundem reperire latera; Horum enim differentia erit radix æquationis propoſita.*

Verum enim verò ſi ad aggregatum cuborum addatur eorundem differentia, fit duplus maior cubus, ſi verò ſubtrahatur, fit duplus minor, ergo cum habito duplo, ſimplum ignorari non poſſit; propterea ſtatim conſtabit, & cubus maior, & cubus

cubus minor, quorum latera non latebunt. His autem habitis, ſtatim innoteſcet differentia ipſorum, atque adeo radix æquationis propoſitæ.

Sed vt meliùs intelligantur; reaſſumamus ſuperiorem æquationem 1 C ✠ 72 R = 1720.

Coefficiens planum eſt 72, & hoc eſt triplum planum ſub lateribus; at verò 1720, comparationis homogeneum, eſt differentia cuborum eorundem laterum. Quadratum autem ex 1720, eſt 2958400, cui ſi addideris quadruplum cubum ex 24, tertia parte plani coefficientis, cuiuſmodi eſt 55296; cubus enim ex 24, eſt 13824, cuius quadruplum eſt 55296; fiet 3013696, & hoc erit quadratum aggregati cuborum ab eiſdem lateribus; Huius igitur latus quadratum, 1736, erit cuborum aggregatum, ad quod ſi addideris 1720, cuborum differentiam, fiet 3456, duplum cubi maioris, ſi verò ſubduxeris, fiet 16, duplum cubi minoris. Dimidium autem ipſius 3456, eſt 1728, cuius latus cubicum eſt 12. Dimidium ipſius 16, eſt 8, cuius latus cubicum eſt 2.

At verò differentia inter 12, & 2, eſt 10, & ita quidem 10, erit radix æquationis propoſitæ,

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

a^3 † 3 b pl. a = b pl. d.

Præmittendum eſt autem.

L E M M A.

INter duos numeros datos, medium, vel medios proportionales inuenire.

Satis eſt obuia ratio inueniendi inter duos numeros datos medium proportionalem. Ductis enim numeris datis inter ſe, producti verò latus accipiatur quadratum, numerus enim hic erit medio loco proportionalis inter numeros datos.

Si verò duo ſint reperiendi numeri inter duos numeros datos. Ducatur quadratum minoris in maiorem, producti verò ſumatur radix cubica, erit primus medius iuxta minorem è duobus datis collocandus; Vt dati ſint duo numeri 2, & 54, inter quos oporteat reperire duos medios proportionales. Ducatur 4 quadratum minoris 2 in 54, vt fiat 216, cuius radix cubica eſt 6, & hic erit numerus minor è duobus medijs. Vel quadratum maioris, nempe 2916 ducatur in 2 fiet 5832, cuius radix cubica 18, erit maior è duobus medijs.

Ad explicandam æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque, coefficiente plano.

Sumatur tertia pars coefficientis, per quam diuidatur comparationis homogeneum, quotiens autem ſtatuatur coefficiens longitudo æquationis quadraticæ, in qua comparationis homogeneum ſit tertia pars iam dicta. Præceptum.

Huius enim radix erit minor extremus numerus è quatuor proportionalibus, quorum differentia erit ipſa coefficiens; at differentia mediorum, erit radix initio æquationis propoſitæ.

Oblata ſit æquatio 1 C † 324 R = 5616.

Diuidatur 324 per 3, fit quotiens 108, per quem diuidatur 5616, & fiet quotiens 52. Fiat igitur æquatio 1 Q ✠ 52 R = 108. Eruatur radix huius æquationis, & erit 2, hic erit numerus minor extremus è quatuor continuè proportionalibus, quo addito ad 52 fiet 54 maior extremus, inter quos per Lemma præmiſſum, reperiantur medij 6, & 18, quorum differentia 12, erit radix initio æquationis propoſitæ 1 C † 324 R = 5616.

Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Vt a^3 ✠ 3 b pl. a = b pl. d. Sunt quatuor magnitudines, ſeu quantitates proportiona-

Nn les,

les, ſub quarum medijs, vel extremis ſit b pl. at verò differentia extremarum eſt d, ſit autem a. differentia mediarum; Quod ex Zetetico deprehenſum eſt.

Zeteticum. *Data differentia extremarum, & rectangulo ſub medijs; vel extremis in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire differentiam mediarum.*

Propoſitio. *Si fuerint quatuor quantitates in continua ratione, cubus è differentia mediarum, plus triplo ſolido ab eadem differentia in planum ſub ipſis medijs, vel extremis, æqualis eſt ſolido à differentia extremarum in planum ſub medijs, vel extremis.*

Quamobrem coefficiens in huiuſmodi æquatione eſt triplum planum ſub medijs, vel extremis, & comparationis homogeneum eſt ſolidum iam dictum, factum nimirum à differentia extremarum in tertiam partem coefficientis, nempe planum ſub medijs vel extremis.

Si igitur ſumatur tertia pars ipſius coefficientis per hanc verò diuidatur comparationis homogeneum, innoteſcit differentia extremarum è quatuor continuè proportionalibus, à quarum medijs, vel extremis ſit planum æquale tertiæ parti ipſius coefficientis.

Quamobrem ſupponendo extremum minus eſſe 1 R, extremum maius erit 1 R, plus differentia, quæ per diuiſionem prædictam innotuit; cumque etiam conſtet planum ſub medijs, atque adeo ſub extremis; ſi extremum vnum eſt 1 R, aliud 1 R, plus illa differentia; fiet 1 Q, plus plano ſub differentia iam dicta, & radice, quod æquabitur plano ſub medijs, atque adeo ſub extremis. Vnde deprehenſo valore ipſius radicis, innoteſcet minus extremum; cumque cognita ſit differentia inter ipſum, & maius extremum, hęc vtique non latebit. Habitis autem duobus extremis, è quatuor proportionalibus, repertis medijs, cognita fiet differentia mediarum; atque adeo radix æquationis propoſitæ.

At verò ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, cubus è differentia mediarum, plus ſolido &c.

Vt ſuperiùs enunciauimus hunc in modum innoteſcet.

Propoſitio. *Cubus enim differentia laterum, plus triplo ſolido à differentia laterum, in rectangulum ſub lateribus eſt æqualis differentia cuborum à lateribus.*

Sint latera a, & e, & ſit oſtendendum, cubum ab a — e, plus ſolido ſub triplo a e, & a — e, æquari $a^3 - e^3$.

Opere multiplicationis conſtat ex a — e, cubum eſſe $a^3 - 3\,a^2 e + 3\,a\,e^2 - e^3$. At huic ſi addideris $3\,a^2 e - 3\,a\,e^2$. Solidum abs 3 a e in a — e, vt etiam ex opere multiplicationis conſtat; fiet $a^3 - e^3$, nempe differentia cuborum à lateribus. Quod oportebat oſtendere.

Deinde.

Propoſitio. *Si quatuor quantitates fuerint continuè proportionales, & planum ſub extremis, ducatur in differentiam extremarum, ſit differentia cuborum à medijs; Seu ſolidum à plano ſub extremis in differentiam extremarum, æquale eſt differentia cuborum à medijs.*

Sint quantitates proportionales in continua ratione a, b, c, d, Sitque demonſtrandum, ſolidum à rectangulo a d, in a - d, æquale eſſe $b^3 - c^3$, nempe differentiæ cuborum a medijs.

Quandoquidem $a^2 d$, æquale eſt b^3, & $a\,d^2$, æquale eſt c^3, proinde ſolidum $a^2 d - a\,d^2$, æquabitur $b^3 - c^3$; eſt autem ſolidum à rectangulo a d in a — d; æquale ſolido $a^2 d - a\,d^2$. Quamobrem ſolidum à plano a d in a — d, æquabitur $b^3 - c^3$.

Ex his porrò deducitur primum nempe.

Propoſitio. *Si fuerint quatuor quantitates in continua ratione, cubus è differentia mediarum, plus triplo ſolido ab eadem differentia, in planum ſub ipſis medijs, vel extremis, æqualis eſt ſolido à differentia extremarum in planum ſub medijs, vel extremis.*

Ex quo facilè intelliges, ſi fuerit æquatio in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano; quemadmodum eſt $a^3 + 3$ b pl. a = b pl. d. Quatuor eſſe proportionales quantitates, ſub quarum medijs, vel extremis ſit b pl. nempe tertia pars plani coefficientis, differentia verò extremarum eſt d, nempe quantitas ortiua ex applicatione ſolidi comparationis homogenei ad tertiam par-

 tem

Digitized by Google

tem coefficientis plani. At verò a, eſſe differentiam mediarum. Quod tanquam arcanum ab aliquibus venditatum fuit.

Elegans igitur hæc eſt æquationem cubicam explicandi methodus; & quidem Geometriæ quoq; maximè conſentanea.

De explicanda æquatione, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

C A N O N.

SVmatur tertia pars numeri Radicum, eaque cubicè multiplicetur, numerus productus auferatur à quadrato dimidij numeri abſoluti, (quando ſubtractio inſtitui poteſt), reſidui verò quadrata radix addatur ad dimidium numeri abſoluti, & ex aggregato extrabatur latus cubicum, eadem vero radix quadrata auferatur ex dimidio numeri abſoluti, & reſidui latus cubicum, ad latus cubicum iam inuentum addatur, hoc enim aggregatum erit æquationis propoſita radix quaſita.

Cubus autem è triente plani coefficientis, non præſtet quadrato à dimidio comparationis homogenei.

E X E M P L V M.

$$1\,C - 72\,R \sqsupset 280.$$

19600	*Quadratum dimidij numeri abſoluti.*
13824	*Cubus tertia partis numeri radicum.*
5776	*Reſiduum.*
76	*Radix quadrata reſidui.*
140	*Dimidium numeri abſoluti.*
216	*Aggregatum.*
6	*Radix cubica.*
140	*Dimidium numeri abſoluti.*
76	*Radix quadrata primi reſidui.*
64	*Reſiduum ſecundum.*
4	*Radix cubica ſecundi reſidui.*
6	*Radix cubica primi aggregati.*
10	*Aggregatum vtriuſque radicis cubica, & radix æquationis propoſita.*

Vel quod in idem recidit.

Sumatur dimidium numeri abſoluti, atque huic addatur latus quadratum differentia inter quartam partem quadrati numeri abſoluti; & vigeſimamſeptimam partem cubi ex numero radicum.

At verò ex hoc aggregato ſumatur latus cubicum, cui addatur latus cubicum differentia,

 inter

inter dimidium numeri abſoluti, & latus potentis differentiam, quæ eſt inter quartam partem quadrati ex numero abſoluto, & vigeſimamſeptimam partem cubi ex numero radicum, hoc enim aggregatum radicis quæſitæ, pretium repræſentabit.

Exemplum I. Sit eadem æquatio 1 C — 72 R = 280.

Dimidium numeri abſoluti, eſt 140, quarta verò pars quadrati numeri abſoluti, eſt 19600, à quo ſubtrahatur 13824, nempe vigeſimaſeptima pars cubi ex numero radicum, & remanet 5776; cuius radix quadrata eſt 76, quæ addi debet ad 140, dimidium numeri abſoluti vt fiat 216, cuius latus cubicum eſt 6; modo ſumatur idem numerus 76, habitus, vt modò dicebamus, & ſubtrahatur ex 140, dimidio numeri abſoluti, fiet reſiduum 64, cuius latus cubicum eſt 4, hoc autem addito ad 6, fit 10, radix æquationis propoſitæ.

Exemplum II. Sit æquatio 1 C — 6 R = 40.

Tertia pars numeri radicum eſt 2, cuius cubus eſt 8; qui ſubductus, ex 400, quadrato dimidij numeri abſoluti relinquit 392; cuius radix quadrata eſt ℞ 392; hæc autem addatur ad 20, fiet 20 + ℞ 392, ab eadem 20, auferatur, & remanet 20 — ℞ 392. Nunc autem oportet eruere radices cubicas ex Binomio, & Apotome.

Hæ verò ſunt ℞ C (20 + ℞ 392), & ℞ C (20 — ℞ 392). Quæ ſi per ſignum + connectantur, fiet ℞ C (20 + ℞ 392) + ℞ C (20 — ℞ 392).

Sed hæ radices explicabiles ſunt, quandoquidem, tam 20 + ℞ 392, quàm 20 — ℞ 392, radicem cubicam habent, illius quidem radix cubica eſt 2 + ℞ 2. Iſtius verò eſt 2 — ℞ 2, quarum ſumma eſt 4, & hæc eſt radix ſuperioris æquationis.

Exemplum III. Propoſita ſit æquatio 1 C — 24 R = 72.

Tertia pars numeri radicum eſt 8, cuius cubus eſt 512; iſque ſeruetur, ſumaturque dimidium comparationis homogenei, ſeu numeri abſoluti 72, & eſt 36, cuius quadratum eſt 1296, à quo ſubtracto 512, remanet 784, cuius latus quadratum eſt 28, quo addito ad 36, ſuperiùs habitum, fit 64, cuius latus cubicum eſt 4. Deinde ex 36, dimidio comparationis homogenei, auferatur 28, latus quadratum differentiæ inter 1296, & 512, & remanet 8, cuius latus cubicum eſt 2, quo addito ad 4; latus cubicum ſuperiùs ſeruatum fiet 6, radix æquationis propoſitæ.

Animaduertendum autem ſumi potuiſſe cubum ex 24, illudque diuidi per 27, proueniſſet enim 512. Idem enim numerus prouenit, ſi numerus quiſpiam cubicè multiplicetur, productuſque per 27, diuidatur; ac ſi tertia pars numeri prædicti, cubicè multiplicatus fuerit.

Exemplum IV. Propoſita ſit æquatio 1 C — 60 R = 1008.

Cubus ex 60, eſt 216000, quo diuiſo per 27, prouenit 8000, qui ſubductus ex 254016, quadrato è 504, dimidio numeri abſoluti, remanet 246016, cuius latus quadratum eſt 496; Hoc autem addito ad 504, fit 1000, cuius latus cubicum eſt 10; At ex 504, dimidio coefficientis, auferatur 496; eadem ſcilicet differentiæ radix, & remanet 8; cuius latus cubicum eſt 2, quo addito ad 10, latus cubicum ſupra ſeruatum, fit 12. Radix æquationis oblatæ.

Sit æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$, & tranſmutata induat hanc formam.

$$a^3 = * + p a + q.$$

Si igitur ſit æquatio ſuperior $a^3 = * + p a + q$; Hæc Methodus obſeruanda eſt. Sumatur $+ \frac{1}{2} q$, illudque ſeruetur, mox accipiatur $\frac{1}{4} q^2$, à quo ſubtraha-

tur

tur $\frac{1}{27} p^3$, & ex reſiduo extrahatur latus quadratum, illudque addatur $\dagger \frac{1}{2} q$, ſuperiùs ſeruato; ex toto hoc autem aggregato, ſumatur latus cubicum, cui addatur latus cubicum huius reſidui; nempe ſumatur ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$ hoc autem ſubtrahatur ex $\frac{1}{2} q$, itaut fiat $\dagger \frac{1}{2} q$; — ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$ huius porro reſidui latus cubicum erit ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q -$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$ factaque additione, vt dictum, eſt, futura eſt radix, vt hic vides ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)) \dagger$ ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q -$ ℞ $(\dagger \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$.

Hæc autem iuuabit numeris explicare; Sit æquatio primò propoſita.

$$\underset{a^3}{1\,C} - \underset{p}{72\,R} = \underset{q}{280}.$$

Huius æquationis radix erit ℞ C(140 † ℞ (19600 — 13824) † ℞ C(† 140 — ℞ (19600 — 13824).

Hoc eſt ℞ C 216 † ℞ C 64.

Hoc eſt 6 † 4. Hoc eſt 10, & ita 10, erit radix propoſitæ æquationis.

Huius autem methodi demonſtratio, ſic ſe habet.

Supponamus ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$ æquari A B, & deinde B C, eſſe ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q -$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$.



Summa Cuborum vtriuſq; lineæ erit q.

Cubus ✠ $\frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$ ex AB
Cubus ✠ $\frac{1}{2} q -$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$ ex BC

q Summa Cuborum.

Si verò A C, æquetur a, cuius cubus erit a^3; & ab eius cubo auferatur triplum productum linearum A B, B C, & A C, ſeu a, remanebunt cubi linearum A B, B C, qui ſimul ſumpti æquantur q. Triplum enim productum rectarum A B, B C, & A C, ſeu a, plus cubis rectarum A B; B C, æquatur cubo, ex A C, ſeu ex a, quare ſi abs cubo, ex A C, ſeu a, nempe ab a^3, auferamus triplum productum, ex A B, B C, & A C, ſeu a, remanebunt cubi linearum A B, B C; Hi autem ſimul ſumpti ſunt æquales q. At verò productum ex A B, & B C, eſt ℞ $C(\frac{1}{27} p^3)$ ſiue $\frac{1}{3} p$ productum ex A B, in B C, hoc eſt ex ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$ in ℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q -$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$ eſt inquam ℞ $C(\frac{1}{27} p^3)$; ſiue $\frac{1}{3} p$, vt patet, ex opere multi-

℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$
℞ $C(\dagger \frac{1}{2} q -$ ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3))$

— ℞ $C(\ldots\ldots\ldots\ldots) - \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3$
$\frac{1}{4} q^2 \dagger$ ℞ $C(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$\frac{1}{27} p^3$
℞ $C(\frac{1}{27} p^3)$
ſeu $\frac{1}{3} p$.

plicationis. Si enim † ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$ ducatur in — ℞ $(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$, ob ſigna † & —, fiet productum $- \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3$, multiplicata verò vtraq; radice per $\dagger \frac{1}{2} q$, euaneſcent producta ob ſigna † & –, & remanet $\dagger \frac{1}{2} q$, in ſe ducendum, vt fiat $\frac{1}{4} q^2$, quo addito, ad $- \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3$, fiet ſumma ℞ $C(\frac{1}{27} p^3)$ & erit totum productum ex illa multiplicatione. Quamobrem eius radix cubi-

ca

ca $\frac{1}{3}$ *p*, erit quoque productum; Huius autem triplum eſt *p*, quo ducto in *a*, fit *p a*, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C, & quia a^3, minus huiuſmodi triplo producto æquabatur cubis ex A B, B C, qui æquales erant *q*; proinde $a^3 - p\,a$, æquabitur *q*. In ſuperiori etiam demonſtratione erat *p*, triplum ipſius $\frac{1}{3}$ *p*, & *p a*, æquale erat triplo producto linearum A B, B C, A C, quod ibi fortè ſub obſcure dictum fuit.

Numeris autem illuſtratur ſuperior doctrina hunc in modum.

Sit æquatio 1 C − 72 R = 280. Sumatur dimidium numeri 280, nempe 140, & ab eius quadrato ſubtrahatur 13824, nempe quotiens, qui oritur, diuiſo 273248, cubo ex 72, per 27, & remanet 5776, cuius radix quadrata eſt 76, qua ſubtracta ex 140, remanet 64, huius radix cubica eſt 4, quæ ſeruanda eſt. Sumatur idem 140, cui addatur 76, nempe radix illius numeri 5776, ortum ducentis ex illa diuiſione; facta autem additione habetur 216, cuius latus cubicum eſt 6, cui addatur latus cubicum 4, ſuperiùs ſeruatum, & fiet 10, pro radice quæſita.

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

$$a^3 - b^2\,a = b^2\,d,$$

Quoniam igitur.

Propoſitio. *Si ſint quatuor quantitates continuè proportionales; cubus è ſecunda, minus ſolido ſub quadrato primæ minoris inter extremas, & ſecunda æqualis eſt ſolido à quadrato eiuſdem primæ minoris, & differentia inter ſecundam, & quartam.*

Propterea in æquatione propoſita, coeſſiciens planum eſt quadratum primæ minoris inter extremas, ſeu quod idem eſt, latus quod poteſt planum coefficiens eſt, prima minor inter extremas, & quantitas ortiua ex applicatione comparationis homogenei ad planum coefficiens, ſit differentia ſecundæ, & quartæ. Eò igitur res deducitur vt ſi fuerit æquatio huiuſmodi $a^3 - b^2\,a = b^2\,d$.

Sit quidem b, prima minor inter extremas, è quatuor quantitatibus continuè proportionalibus; at verò d, ſit differentia ſecundæ, & quartæ, itaut a, radix ſit ſecunda. Quare oportet.

Zeteticum. *Data prima minore inter extremas, & differentia ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, inuenire ſecundam.*

Secunda enim in huiuſmodi ſerie, eſt radix quæſita.

Superior autem propoſitio de quatuor continuè proportionalibus ſic oſtenditur.

Sint quatuor continuè proportionales b, a, c, f, at verò quoniam quarta ſupponitur exprimere differentiam à ſecunda; ipſa differentia eſto d, vnde quarta erit d + a, æqualis f, itaque proportionales erunt b, a, c, d + a, Quamobrem erit b^3 ad a^3, vt a ad d + a, proinde conuertendo erit a^3 ad b^3, vt d + a ad a, & diuidendo vt $a^3 - b^3$ ad b^3, ita d ad a; ergo productum ſub medijs æquabitur producto ſub extremis, quare $a^3 - b^2\,a$, æquabitur $b^2\,d$. At verò a^3 eſt cubus è ſecunda, & b^2 a, eſt ſolidum à quadrato primæ minoris inter extremas in ſecundam. Denique b^2 d, eſt ſolidum, quidem ſub quadrato primæ minoris, & differentia ſecundæ, & quartæ. Proinde ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales &c. Quod oportebat oſtendere.

Propoſita ſit æquatio 1 C − 64 R = 960.

Erit igitur 364, quadratum primæ è quatuor continuè proportionalibus, at verò differentia ſecundæ, & quartæ orietur ex applicatione 960, ad 64. Cum enim 960,

960, ſit ſolidum à quadrato primæ minoris inter extremas in differentiam ſecundæ, & quartæ, ſi applicetur huiuſmodi ſolidum ad planum prædictum, orietur differentia 15, inter ſecundam, & quartam.

Secunda igitur eſto 1 R, ergo quarta erit 15 + 1 R. Solido autem ſub quadrato primæ, & quarta, æqualis eſt cubus è ſecunda. ob id æquabitur 64 R, plus 64, in 15, hoc eſt 960, & per antitheſin 1 C — 64 R, æquabitur 960.

Ad huius igitur æquationis explicationem oportet.

Data prima minore inter extremas, & differentia ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium inuenire ſecundam. *Zeteticum.*

Cæterùm iuxta priorem methodum æquatio propoſita facilè explicatur; vt ex dictis eſt manifeſtum.

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

$$a^3 - 3\ b\ pl.\ a = d\ ſolido.$$

Quoniam cubus aggregati laterum minus triplo ſolido ſub aggregato in planum ſub ipſis lateribus æqualis eſt aggregato cuborum à lateribus.

Propterea facilè conſtat alia huius æquationis explicandæ ratio. Siquidem coefficiens erit triplum planum ſub lateribus, comparationis homogeneum erit cuborum aggregatum, & æquationis radix erit aggregatum ipſorum laterum.

Vt ſi fuerit $a^3 - 3$ b pl. a $=$ d ſolido, erit b pl. id quod fit ſub lateribus, & d ſolidum erit aggregatum cuborum ab ipſis, quare oportet.

Dato aggregato cuborum, & rectangulo ſub lateribus reperire latera.

Cum autem quadratum aggregati cuborum, minus quadruplo cubo rectanguli ſub lateribus æquale ſit quadrato differentiæ cuborum. Si comparationis homogeneum quadraticè multiplicetur, ex producto autem auferatur quadruplus cubus a, rectangulo ſub lateribus, remanebit quadratum differentiæ cuborum, cuius latus quadratum, erit ipſa cuborum differentia. Oportet igitur.

Data differentia cuborum, & eorundem aggregato reperire latera. Horum enim aggregatum erit radix initio cubicæ æquationis propoſitæ.

Verum enim verò ſi ad aggregatum cuborum addatur eorundem differentia, fit duplum cubi maioris; ſi verò ſubtrahatur, fit duplum minoris. Ergo cùm habito duplo ſimplum ignorari non poſſit; ob id ſtatim conſtabit, & cubus maior, & minor, quorum latera non latebunt. His autem habitis ſtatim innoteſcet eorum aggregatum, atque adeo radix æquationis propoſitæ. Quæ vt meliùs intelligantur, explicetur æquatio 1 C — 24 R $=$ 72.

Comparationis homogeneum 72, quadraticè multiplicetur vt fiat 5184, ex quo ſubtrahatur 2048, quadruplum cubi à plano ſub lateribus, vt remaneat 3136, quadratum differentiæ cuborum, cuius latus eſt 56; differentia cuborum, qua addita ad 72, eorumdem aggregatum, fit 128, & ab eodem ſubtracta remanet 16. Horum quidem dimidia ſunt 64, & 8, quorum latera cubica ſunt 4, & 2. Horum aggregatum eſt 6, & quidem 6, erit radix initio æquationis propoſitæ.

Sit igitur æquatio primò loco ſuperius poſita 1 C — 72 R $=$ 280. Diuiſo 72, coefficiente per 3, & fiet quotiens 24, nimirum planum ſub extremis, vel medijs. Deinde diuiſo 280, per 24, fit quotiens 11 $\frac{2}{3}$, & hoc erit aggregatum duorum extremorum, è quatuor proportionalibus in ratione continua. Minus extremum eſto 1 R, maius igitur erit 11 $\frac{2}{3}$ — 1 R, ducantur inter ſe; & fiet 11 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q, quod æquabitur 24; Huius autem æquationis radix duplex eſt; quarum minor eſt 5 $\frac{5}{6}$ — ℞ 10 $\frac{1}{36}$; & erit minus extremum è quatuor proportionalibus; maius autem extremum erit 5 $\frac{5}{6}$ † ℞ 10 $\frac{1}{36}$. *Exemplum I.*

Repertis autem duobus medijs inter hæc duo; ita vt planum ſub ipſis ſit 24, & erunt

erunt 4, & 6; Sunt enim in continua ratione hi numeri 5, $\frac{1}{6}$ − ℞ 10 $\frac{1}{36}$; 4; 6; 5 $\frac{1}{6}$ † ℞ 10 $\frac{1}{36}$.

Aggregatum autem mediorum; nempe 10, erit ſuperioris æquationis radix.

Non diſſimiliter æquationes, quæ in alijs exemplis allatæ ſunt; poterunt explicari, vt ſi fuerit æquatio 1 C − 6 R = 40. Diuiſo 6, coefficiente, per 3, fit quotiens 2; Illudque eſt planum, quod ſub extremis, vel medijs continetur. At verò diuiſo 40, comparationis homogeneo per 2, numerum iam habitum, & proueniet 20, pro aggregato extremorum.

Oportet igitur diuidere 20, in duas partes; ita vt planum ſub ipſis æquale ſit 2. Et quidem pars vna erit 1 R, alia autem 20 − 1 R, rectangulum ſub his eſt 20 R − 1 Q, quod æquabitur 2. Huius verò æquationis radix eſt duplex; quarum vna eſt 10 − ℞ 98, altera verò 10 † ℞ 98. Itaque minus extremum è quatuor continuè proportionalibus eſt 10 − ℞ 98; maius autem extremum erit 10 † ℞ 98. Inter hæc autem repertis duobus medijs; quorum vnum eſt 2 − ℞ 2, aliud vero 2 † ℞ 2. Sunt enim proportionales hi termini. 10 − ℞ 98; 2 − ℞ 2; 2 † ℞ 2; 10 † ℞ 98.

Aggregatum autem mediorum nimirum 4, erit ſuperioris æquationis radix.

Exemplum II. Præterea ſi fuerit æquatio ſuperiùs itidem poſita videlicet 1 C − 24 R = 72. Diuidatur 24 per 3, fit quotiens 8, & hoc erit planum ſub extremis, vel medijs. Diuidatur 72 per 8, iam inuentum, & fit quotiens 9, & hoc erit aggregatum extremorum, è quatuor proportionalibus. Extremum igitur vnum eſto 1 R; aliud erit 9 − 1 R, rectangulum ſub his eſt 9 R − 1 Q; & hoc æquabitur 8; huius porro æquationis radix duplex eſt; minor quidem 1, maior autem 8, inter iſtos autem numeros duo medij proportionales reperiantur, & erunt 2, & 4, quorum aggregatum, eſt 6, eritque 6, radix propoſitę æquationis.

Exemplum III. Sit præterea 1 C − 60 R = 1008. Diuidatur 60 per 3, fit quotiens 20, & hoc erit planum ſub extremis, vel medijs, è quatuor proportionalibus. Diuidatur 1008, per 20, iam inuentum, fiet quotiens 50 $\frac{2}{5}$. & hoc erit aggregatum extremorum. Extremum vnum eſto 1 R, aliud erit 50 $\frac{2}{5}$ − 1 R; rectangulum ſub his erit 50 $\frac{2}{5}$ R − 1 Q, & erit æquatio huiuſmodi 50 $\frac{2}{5}$ R − 1 Q = 20. Huius autem æquationis radix eſt duplex quarum minor eſt $\frac{2}{5}$, maior autem 50. Inter hos autem repertos, inueniantur duo medij proportionales, nimirum 2, & 10, horum enim aggregatum nempe 12, erit radix ſuperioris æquationis.

Exemplum IV. Sit æquatio 1 C − 4 R = 480. Diuidatur 4 per 3, fit quotiens 1 $\frac{1}{3}$, & hoc erit planum ſub duabus extremis, vel medijs, è quatuor continuè proportionalibus. Diuidatur 480, per 1 $\frac{1}{3}$, fit quotiens 360, & hoc erit aggregatum extremorum quorum vnum ſit 1 R, aliud erit 360 − 1 R; rectangulum ſub his eſt 360 R − 1 Q = 1 $\frac{1}{3}$. Huius porrò æquationis radix eſt 180 − ℞ 323 98 $\frac{2}{3}$, & hoc erit pretium radicis minoris; pretium autem maioris erit 180 † ℞ 323 98 $\frac{2}{3}$. Inter hos autem numeros duo medij reperiantur; nempe 4 − ℞ 14 $\frac{2}{3}$, & 4 † ℞ 14 $\frac{2}{3}$. Hi namque ſunt in continua ratione. Aggregatum autem mediorum, nimirum 8, erit ſuperioris æquationis radix.

Exemplum V. Sit æquatio 1 C − 9 R = 162. Diuidatur 9 per 3, fit quotiens 3. Diuidatur rurſus 162 per 3, quotientem habitum, & proueniet 54. Itaque 3, erit planum ſub medijs, vel extremis, è quatuor continuè proportionalibus.

At verò 54, erit aggregatum extremorum; quorum vnum eſto 1 R; aliud erit 54 − 1 R; rectangulum ſub his eſt 54 R − 1 Q; & hoc æquabitur 3. Huius autem æquationis radix eſt 27 − ℞ 726, & hoc erit pretium radicis minoris.

At verò maioris pretium erit 27 † ℞ 726. Inter hos autem reperiantur duo medij; nempe 3 − ℞ 6, & 3 † ℞ 6. Horum enim aggregatum; erit ſuperioris æquationis radix.

Propoſita ſit æquatio 1 C − 36 R = 224.

Exemplum VI. Et exhibenda ſit radix. Diuidatur 36 per 3, & fit quotiens 12, per quem diuidatur 224, vt fiat quotiens 18 $\frac{2}{3}$. Hic fiet coefficiens nouæ æquationis quadraticæ

draticæ Amphibolæ, cuius comparationis homogeneum, erit 12, tertia pars iam dicta; eſt enim 18 $\frac{2}{3}$, ſumma extremorum è quatuor continuè proportionalibus, quod in Specioſa demonſtrabimus. Extremum igitur vnum erit 1 R, (ad indagandam enim propoſitæ æquationis radicem oportet extrema diſtinguere; & inter hæc, media reperire) extremum alterum erit 18 $\frac{2}{3}$ — 1 R, his multiplicatis ad inuicem, fiet 18 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q, nempe rectangulum ſub extremis, vel medijs, cui æquatur 12, vt ſuo loco demonſtrabimus. Erit igitur æquatio 18 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q ⫧ 12. Huius autem æquationis radix eſt 18. Extremum igitur vnum, nempè maius erit 18; extremum alterum erit $\frac{2}{3}$, Sumatur igitur quadratum ex $\frac{2}{3}$, huiuſmodi eſt $\frac{4}{9}$; & hoc ducatur in 18; vt proueniat $\frac{72}{9}$, nempe 8, cuius latus cubicum eſt 2; & hic erit terminus minor è duobus medijs. Deinde 324, quadratum ex 18, ducatur in $\frac{2}{3}$, vt proueniat $\frac{648}{3}$, nempè 216, cuius latus cubicum eſt 6, & hic erit terminus alter, nempè maior è duobus medijs; aggregatum mediorum ſcilicet 8, erit radix initio æquationis propoſitæ cubicę 1 C — 36 R ⫧ 224.

Propoſita ſit æquatio 1 C — 34 R ⫧ 240.

Exemplum. Diuidatur 34, per 3, & fiet quotiens 11 $\frac{1}{3}$ ſtatuendus pro comparationis homogeneo nouæ æquationis quadraticæ amphibolæ vt videbimus. Diuidatur 240, per 11 $\frac{1}{3}$, fiet quotiens 21 $\frac{3}{17}$ aſſumendus pro coefficiente eiuſdem nouæ æquationis. Eſt enim 11 $\frac{1}{3}$ rectangulum ſub extremis, vel medijs è quatuor proportionalibus; & 21 $\frac{3}{17}$ eſt aggregatum extremarum. Ad enodandam autem propoſitam æquationem cubicam; oportet extrema diſtinguere. Extremum vnum eſto 1 R; aliud igitur erit 21 $\frac{3}{17}$ — 1 R, rectangulum ſub his eſt 21 $\frac{3}{17}$ R — 1 Q, id verò æquabitur 11 $\frac{1}{3}$. Huius autem æquationis radix eſt ℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$ hoc enim ducto in 21 $\frac{3}{17}$ fit ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ † $\frac{64800}{289}$, ſeu quod idem eſt, (ductis numeratore, & denominatore per 12,) $\frac{777600}{3468}$. Quadratum autem ex ℞ $\frac{349496}{3468}$ — $\frac{180}{17}$ eſt $\frac{738296}{3468}$ † ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ quo ſubtracto ex producto iam dicto, remanet 11 $\frac{1}{3}$.

℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$
† 21 $\frac{3}{17}$

℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ † $\frac{64800}{289}$ ſeu $\frac{777600}{3468}$
℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$
℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$

† ℞ $\frac{11323670400}{1002252}$ † $\frac{32400}{289}$
† $\frac{349496}{3468}$ † ℞ $\frac{11323670400}{1002252}$

† $\frac{349496}{3468}$ † ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ † $\frac{32400}{289}$ ſeu $\frac{388800}{3468}$
$\frac{738296}{3468}$ † ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$
℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ † $\frac{777600}{3468}$
$\frac{738296}{3468}$ † ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$

Reſiduum $\frac{39304}{3468}$ ſeu 11 $\frac{1}{3}$

Eſt igitur extremum vnum è quatuor proportionalibus, quod diximus ℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$, extremum alterum erit reſiduum ad 21 $\frac{3}{17}$ nempe $\frac{180}{17}$ — ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$.

Propoſita æquationis radix exhibetur. Ad comparandam radicem cubicæ æquationis iam propoſitæ, inter hæc duo extrema, duo proportionalia media reperire oportet, quod aſſequemur iuxta præceptum iam traditum, de indagandis duobus medijs proportionalibus inter duo extrema data, nempe ducatur $\frac{738296}{3468}$ † ℞ $\frac{45294681600}{1002252}$ quadratum ex ℞ $\frac{349496}{3468}$ † $\frac{180}{17}$ ducatur inquam in extremum alterum ſcilicet $\frac{180}{17}$ — ℞ $\frac{349496}{3468}$ producti verò ſumatur latus cubicum; hoc enim erit terminus maior è duobus medijs proportionalibus.

Si fuerit enim æquatio in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque

coefficiente plano. Vt ſi ſit $a^3 - 3$ b plano $a = b$ plano d.

Sunt quatuor quantitates continuè proportionales, ſub quarum medijs, vel extremis ſit b pl. aggregatum autem extremarum eſt d, & ſit a, mediarum aggregatum quod ex Zetetico depromptum eſt.

Zeteticum. *Dato aggregato extremarum, & rectangulo ſub medijs vel extremis, in ſerie quatuor continue proportionalium inuenire mediarum aggregatum.*

Propoſitio. *Si fuerint quatuor quantitates, in continua ratione, cubus ex aggregato mediarum, minus triplo ſolido ab eodem aggregato, in planum ſub medijs, vel extremis, æqualis eſt ſolido, ab aggregato extremarum in planum ſub medijs.*

Quamobrem coefficiens in huiuſmodi æquatione eſt triplum planum ſub medijs, vel extremis, & comparationis homogeneum eſt ſolidum iam dictum, factum nimirum ab aggregato extremarum, in tertiam partem coefficientis, nempe planum, ſub medijs, vel extremis.

Si igitur ſumatur tertia pars coefficientis, & per hanc diuidatur comparationis homogeneum, innoteſcit aggregatum extremarum, è quatuor continuè proportionalibus, à quarum medijs, vel extremis ſit planum æquale tertiæ parti coefficientis.

Explicatio. Quamobrem ſupponendo extremarum datum aggregatum; ſiquidem eſt quod oritur ex applicatione comparationis homogenei ad tertiam partem coefficientis plani, extremum vnum erit 1 R, aliud erit aggregatum prædictum; minus 1 R, productum autem ſub his erit planum ſub aggregato extremarum, & 1 R, minus 1 Q, quod æquabitur plano ſub extremis, vel medijs.

Cùm autem innotuerint extremæ quantitates, duabus medio loco proportionalibus repertis, innoteſcet etiam initio cubicæ æquationis radix, nempe mediarum quantitatum aggregatum.

At ſi fuerint quatuor quantitates in continua ratione cubus ex aggregato mediarum, minus &c. Quod nos ſuperiùs aſſumpſimus, ſic oſtendemus.

Demonſtratio ſupradictorũ. Si fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, ſolidum ab aggregato extremarum in planum ſub extremis, vel medijs æquale eſt aggregato cuborum à medijs. Sint continuè proportionales a, b, c, d, ergo erit $a^2 d = b^3$, & $a d^2 = c^3$ quare $a^2 d$ ✠ $a d^2$, æquabitur b^3 ✠ c^3, at cubus ex aggregato mediarum, minus triplo ſolido ab eodem aggregato in planum ſub medijs vel extremis, æqualis eſt aggregato cuborum à medijs nempè b^3 ✠ c^3; ergo cubus ab aggregato mediarum, minus triplo ſolido ab eodem aggregato in planum ſub medijs vel extremis; æquabitur $a^2 d$ ✠ $a d^2$, ſed hoc eſt ſolidum ab aggregato extremarum in planum ſub medijs vel extremis, ergo cubus ab aggregato mediarum, minus triplo ſolido ab eodem aggregato in planum ſub medijs, vel extremis, æqualis eſt ſolido ab aggregato extremarum in planum ſub medijs, vel extremis.

Sint rurſus continuè proportionales a, b, c, d, & oſtendendum ſit, cui nam ſolido ſit æqualis cubus aggregati mediarum, minus triplo ſolido ſub aggregato mediarum, & rectangulo ſub extremis, vel medijs.

Demonſtratio Cubus aggregati mediarum eſt b^3 ✠ $3 b^2 c$ † $3 b c^2$ † c^3, ex quo ſi ſubduxeris triplum ſolidum ſub eodem aggregato b † c, & b c, cuiuſmodi eſt $3 b^2 c$ † $3 b c^2$, remanebit aggregatum cuborum à medijs, nempe b^3 † c^3, ſed in ſerie quatuor continuè proportionalium; ſolidum ſub rectangulo à medijs, vel extremis, & aggregato extremarum, eſt æquale aggregato cuborum à medijs, ergo in ſerie quatuor continuè proportionalium, cubus aggregati mediarum, minus triplo ſolido ſub aggregato eodem, & plano ſub extremis, vel medijs, æqualis eſt ſolido ab aggregato extremarum in planum ſub extremis, vel medijs. Quod oportebat oſtendere.

Quando autem cubus è triente numeri radicum præſtat quadrato ſemiſſis numeri abſoluti, res eſt difficultatibus implicata; neque ſatis pro dignitate tractata.

Aliqui igitur ſic præcipiunt.

Vtrique

Vtrique æquationis parti adde numerum cubum, cuius latus cubicum ad vnitatem, eandem habeat rationem, quam numerus compoſitus ex numero cubico addito, & numero abſoluto æquationis ad numerum radicum. Additione ſiquidem facta, partes diuidantur per 1 R, plus latere cubico, cubi additi, ita enim æquatio cubica, in quadraticam erit tranſmutata.

Propoſita ſit æquatio in qua 1 C — 12 R = 16. Reperiatur numerus cubus, qui addi debet vtriq; æquationis parti, itaut latus ipſius ad vnitatem, rationem habeat, quam compoſitum ex huiuſmodi cubo, & numero abſoluto, ad numerum radicum. Numerus autem cubus idoneus erit 8, qui additus ad 16, numerum abſolutum efficit 24, qui ad 12, numerum radicum rationem habet, quam 2, radix cubica ipſius 8, ad vnitatem. Fiat igitur additio ad vtramque partem, prius tranſmutata æquatione per antitheſin in hanc formam 1 C = 12 R † 16. Facta autem additione erunt æquales æquationis partes 1 C † 8, & 12 R † 24. Diuidatur 1 C † 8 per 1 R † 2; fiet quotiens 1 Q † 4 — 2 R, ſi verò diuidatur 24, per eundem diuiſorem fit quotiens 12. *Exemplum.*

Itaque erit æquatio 1 Q † 4 — 2 R = 12, & ordinata æquatione fiet 1 Q — 2 R = 8. Huius autem æquationis radix eſt 4. Itaque æquationis propoſitæ 1 C — 12 R = 16. Radix erit 4.

Propoſita ſit æquatio in qua 1 C — 13 R = 12. Numerus cubus addendus erit 27, nam 39, conſtans ex 27, & 12, ad 13, numerum radicum eſt vt 3, latus cubicum ipſius 27, ad vnitatem. Tranſmutata æquatione in aliam formam, vt fiat 1 C = 13 R † 12. Fiat additio vtriq; eius parti, & erit quidem 1 C † 27 = 13 R † 39. Diuidatur 1 C † 27 per 1 R † 3, fiet quotiens 1 Q † 9 — 3 R. Diuidatur 13 R † 39, per eundem diuiſorem, fiet quotiens 13. Itaque erit æquatio 1 Q † 9 — 3 R = 13. Et ordinata æquatione, fiet 1 Q — 3 R = 4. Huius autem æquationis radix eſt 4. *Exemplum.*

Alij autem animaduerterunt coefficiens planum conſtare aggregato quadratorum à duobus lateribus, plus rectangulo ſub iiſdem, rectangulum autem, ſub lateribus medium proportionale eſſe, inter quadrata laterum, eo proinde rem deduci exiſtimant, vt tres numeri reperiantur in continua analogia, quorum ſumma faciat coefficiens planum; nam extremi numeri, erunt quadrata laterum quæſitorum, quorum ſcilicet aggregatum eſt radix cubicæ æquationis propoſitæ. *Quid alij hac de re ſenſerint.*

Si itaque (vt eorum vtar exemplo) fuerit æquatio 1 C — 13 R = 12, pragmatiam hunc in modum inſtituemus. Primus numerus eſto 1, ſecundus 1 R, tertius erit 1 Q, ſic enim inſtituitur analogiſmus, requiſitus. Itaque 1 Q † 1 R † 1, æquabitur 13, coefficienti, atque adeo per antitheſin, fiet 1 Q † 1 R = 12. Huius autem æquationis radix eſt 3, atque adeo tres erunt proportionales 1, 3, 9, extremarum autem 1, & 9, latera quadrata 1, & 3, erunt illa, quorum aggregatum puta 4, erit radix cubicæ æquationis propoſitæ.

Obuia ſatis eſt in illa æquatione, ratio diuiſionis prædictæ.

In alijs tamen, non tam facile perficietur. Veriſſimum eſt quod aſſumitur, quod vt explicetur.

Propoſita ſit æquatio 1 C — 33 R = 18. Huius radix eſt 6. Manifeſtum eſt autem quod eſt aſſertum; ſiquidem duo ſunt numeri 3 † ℞ 6, & 3 — ℞ 6, quorum ſumma eſt 6, nempe radix æquationis propoſitæ. Horum autem quadrata ſunt 15 † ℞ 216, & 15 — ℞ 216, inter quos medio loco proportionalis eſt 3, nempe quod fit ſub numeris illis 13 † ℞ 6, & 13 — ℞ 6. Vnde numerus 33, conſtat ex aggregato quadratorum 15 † ℞ 216, & 15 — ℞ 216, ex lateribus 3 † ℞ 6, & 3 — ℞ 6, plus 3, rectangulo ſub iiſdem lateribus 3 † ℞ 6, & 3 — ℞ 6. Hæc autem omnia hic à latere cernuntur. *Supradictorũ explicatio.*

Et quidem ſi diuidatur *6*, iuxta legem præſcriptam, partes eo modo ſe habebunt, quandoquidem pars vna dicetur 1 R, alia erit *6* − 1 R, huius quadratum eſt 36 − 12 R † 1 Q, illius verò eſt 1 Q.

Horum aggregatum eſt 36 − 12 R † 2 Q; rectangulum ſub partibus eſt *6* R — 1 Q, at verò aggregatum ex his eſt 36 — *6* R † 1 Q. Hoc autem æquabitur 33, & per antitheſin fiet *6* R − 1 Q ⚌ 3. Huius porrò æquationis radix eſt 3 − ℞ *6*, itemque 3 † ℞ *6*. Et hæc ſunt latera, quorum ſumma exiſtente *6*, ſatis faciunt, eorum ſiquidem quadrata, vna cum rectangulo ſub ipſis conficiunt 33, & ipſum rectangulum medium proportionale eſt inter quadrata.

3 ✠ ℞ 6
3 ✠ ℞ 6
———
℞ 54 ✠ 6
9 ✠ ℞ 54
———
15 ✠ ℞ 256
———
3 − ℞ 6
3 − ℞ 6
———
— ℞ 54 ✠ 6
9 — ℞ 54
———
15 — ℞ 256
———
3 ✠ ℞ 6
3 — ℞ 6
———
— ℞ 54 — 6
9 ✠ ℞ 54
———
3

Diuiſioni prædictæ inſtitutio parùm eſt vtpote ambigua ad conſequendum quod intenditur.

Sed illius diuiſionis inſtitutio, qua videlicet coefficiens planum diuidendum eſt præſcripta lege, nempè in tres partes continuè proportionales, cum nihil aliud additum ſit infinitis modis abſolui poteſt; niſi enim præſcribatur proportio; cuilibet erit ambiguum aſſumere primum terminum Analogiæ, quæſtioni ſatisfacturum, atque illum eligere apportunum, & ex infinitis ſeligere Diuinum quid eſt, quamobrem aliò confugiendum erit ad comparandam propoſitæ æquationis cubicæ radicem.

Quod autem aſſumebatur demonſtrabile eſt; quandoquidem.

Propoſitio.

Si duo ſint latera, quorum quadrata adiuncta rectangulo ſub ipſis efficiant planum. Cubus ab aggregato prædictorum laterum minus ſolido ab eodem aggregato in planum prædictum, æqualis eſt ſolido ab aggregato eodem in rectangulum ſub lateribus. Et ſi duo ſint latera, quorum quadrata adiuncta rectangulo ſub ipſis efficiant planum. Solidum ab alterutro laterum in planum prædictum, multatum cubo eiuſdem lateris, æquale eſt ſolido ab aggregato laterum in rectangulum ſub iiſdem contentum.

Demonſtratio primi.

Hæc vt oſtendamus. Supponamus duo eſſe latera a, & e, quorum aggregatum eſt a † e, & quadratorum aggregatum erit a^2 † e^2, rectangulum ſub ipſis eſt a e; at aggregatum ex his eſt a^2 † e^2 † a e; & hoc quidem erit planum. At verò cubus ex a † e eſt a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3; ex quo ſi dempſeris a^3 † 2 a^2 e † 2 a e^2 † e^3. Solidum ab huiuſmodi plano in idem laterum aggregatum, remanebit a^2 e † a e^2, nempe ſolidum à rectangulo ſub lateribus in laterum aggregatum. Quod erat primum.

Demonſtratio ſecundi.

Deinde ſi duo ſint latera vt ſupra a, & e, quorum quadrata a^2, & e^2, rectangulum ſub his eſt a e; at aggregatum iſtorum a^2 † e^2 † a e, vt diximus; Solidum ab alterutro laterum, a, vel e, & exempli gratia primò ab a, in planum iam dictum a^2 † e^2 † a e, nempe a^3 † a e^2 † a^2 e, multatum a^3, cubo eiuſdem lateris a, æquale eſt a e^2 † a^2 e, nempè ſolido ab aggregato laterum in rectangulum ſub ipſis. Quod erat ſecundum.

Vnde rectè ſi a^3 − 3 b pl. a, æquatur d ſol. cedat autem ſolidi quadratum quadruplo b plani cubo, & 3 b plano e — e^2, æquabitur rurſus d ſolido, & enunciatur de duobus lateribus, à quibus ſingulis quadrata adiecta rectangulo ſub ipſis lateribus

teribus faciunt b planum. Quod autem fit ab vno laterum in quadratum reliqui adiunctum rectangulo, ſeu aliter, quod fit ab aggregato laterum in rectangulum, eſt d ſolidum, & a, enunciatur de aggregato illorum laterum.

Ex dictis porrò videtur conſtare facilè quæ ab alijs, quaſi ἀσυμματωδῶς pronunciata fuerunt.

Neque vtilius eſt ad exhibendam radicem huiuſmodi æquationis confugere ad triangula rectangula; hoc modo.

Si fuerit $a^3 - 3\, b^2 a \sqsupset b^2 d$; ſitque b maior d, ſemiſſe, & $3\, b^2 e - e^3$, æquabitur $b^2 d$. Suntque duo triangula rectangula æqualis b, hypothenuſæ, ita vt angulus acutus ſubtenſus à, perpendiculo primi ſit triplus ad angulum acutum ſubtenſum à; perpendiculo ſecundi, baſis verò dupla primi eſt d, & fit a, dupla baſis ſecundi, contracta, protractaque longitudine eius, quæ poteſt quadrato triplum perpendiculi eiuſdem.

Conſideratis tamen diuerſis modis explicandi hoc æquationis genus, cæteris videtur tamquam aptior præferendus, qui Radicis æſtimationem ad ſubtenſas in circulo refert. *Vtiliſſima Methodus ad hæc perficienda eſt per inſcriptas circulo, atque arcuū ſubtēſas.*

Si igitur quadratum ſemiſſis numeri abſoluti non ſit maius cubo trientis coefficientis plani; ſeu quod in idem recidit, quadratum ſemiſſis vltimi termini non ſit maius cubo trientis quantitatis cognitę penultimi termini.

Vt autem nobis liceat meliùs huius æquationis naturam introſpicere non pigebit quæ à maioribus accepimus in medium proferre, eademque illuſtrare,

PROBLEMA.

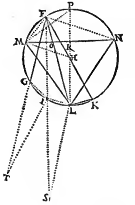
Circulo quidem exiſtente F G K, cuius diameter F K, in quo inſcripta ſit F G, trifariam autem ſectus ſit arcus G K, intereeptus à diametro, & inſcripta iam dicta in punctis I, & L, recta vero connectatur F L, ſitque data F H, ſeu H K, quæ dicatur b, dataque ſit etiam F G, quæ dicatur c. Oporteat reperire F L, quæ vt ignota ſupponatur a.

Iungantur K L, L I, & I G; atque ducta F I, producatur ad S, donec angulus quidem F S L, æqualis ſit angulo I F L, fiet [a] enim S L, æqualis ipſi L F, & SI, æqualis ipſi F K, eſt enim S L, æqualis ipſi L F, itemque S I, ipſi F K, cum triangula I L S, & K L F, ea ſint, quorum duo quidem anguli L I S, & S, vnius, æquales ſunt ſinguli duobus L K F, & L F K, alterius [b] quamobrē latus I L, ęquabitur [c] lateri L K, nec diſſimiliter intelligatur F G, protracta donec angulus F T I, æqualis ſit angulo G F I, erit enim ſimiliter T I, æqualis I F, atque T G, ipſi L F. Cum autem ſimilia ſint triangula F H L, F L S, & F I T, erit vt H F, ad F L, ita L F, ad F S. Cum igitur H F, ſupponatur b, atque F L, ſupponatur a, eritquidem F S, æqualis $\frac{a^2}{b}$ a qua ſi ſubduxeris S I, ſiue K F, hoc eſt 2 b, remanebit I F, æqualis $\frac{a^2}{b} - 2\, b$. Item cum ſit vt H F, ad F L, ita I F, ad F T, erit F T, æqualis $\frac{a^3}{b^2} - 2\, a$, è qua ſi auferatur T G, ſiue F L, nempe a remanebit G F, æqualis $\frac{a^3}{b^2} - 3\, a$ reliquum eſt, vt $\frac{a^3}{b^2} - 3\, a$, æqualis ſit G F, datæ, quæ ſopponebatur c; fiat igitur æquatio $a^3 - 3\, b^2 a \sqsupset b^2 c$.

a. 6. primi.

b. 21. & 22. tertij necnon 13. primi.

c. 29. tertij.



Hæc

Hæc æquatio ea eſt, in qua quadratum à dimidio vltimi termini ſuperatur à cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini; maius cùm ſit b^6 quam $\frac{1}{4}$ $b^4 c^2$; Si enim vtrobique inſtituatur diuiſio per b^4 fit b^2, maius quàm $\frac{1}{4}$ c^2; Siquidem vtrinque extracta radice b, fit maius quàm $\frac{1}{2}$ c, ſeu 2 b, quàm c, cum 2 b, diametrum circuli referat; at verò c, inſcriptam G F, in eodem. Quamobrem ſi b^6, æqualis eſt $\frac{1}{4}$ $b^4 c^2$, tunc itidem inſcripta G F, æquabitur diametro F K, ita vt in huiuſmodi caſu duæ hæ lineæ coincidant; eademque fiat quæſtio, non ſecus ac ſemicircumferentia F G K, in tres æquales partes diuidenda eſſet, tunc autem quæſita radix F L, ſit latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti.

Hæc omnia melius explicantur. Hæc vt meliùs etiam percipiantur. Supponamus a, æqualem f, ſeu quod idem eſt a — f æqualem o; Rurſus a, æqualem — c, ſiue a † c æqualem o; denuo etiam a, æqualem – d, ſiue a † d, æqualem o; ducamus autem a – f, æqualem o, in a † c, æqualem o, & fiet $a^2 - fa + ca - fc$, quo ducto in a † d, proueniet.

$$\begin{array}{llll} a^3 - f a^2 & - c f a & - c d f & = 0 \\ \quad + c & - d f & & \\ \quad + d & + c d & & \end{array}$$

Si autem f, ſupponatur valor radicis a, æqualis c † d, duobus valoribus falſis ipſius a ſimul ſumptis; tunc quidem † f, deſtruct – c – d, vnde fiet o a^2, ſiue euaneſcet affectio illa ſub quadrato. Cum enim ſupponamus f, æquari c † d, inſtituta multiplicatione per f, fiet $f^2 = cf + df$; at verò f^2 maius eſt quàm c d, cùm idem valeat ac $c^2 + 2cd + d^2$, nimirum quadratum ex c † d; quamobrem, & c f † d f, erit maius, quàm c d, & manebit affectio ſub latere per affirmationem, nempe † c f † d f – c d, quo intellecto per † p, & † c d f, per † q, æquatio hanc formam induct $a^3 = * + pa + q$.

Hæc autem admittit tres diuerſos radicis valores vnum verum: duos autem reliquos falſos; ad hoc autem requiritur, vt cubus è triente penultimi termini non ſit minor quadrato à dimidio termini vltimi, aliàs radix æquationis de vno tantùm valore, vtpotè vero explicabilis eſt.

Exemplum. Supponamus æquationem eſſe 1 C – 39 R = 70; hæc æquatio tres admittit radices, duas quidem falſas 2, & 5, vnam autem veram, nimirum 7; ſit autem ſi ducatur 1 R † 2, in 1 R † 5, productum autem 1 Q † 7 R † 10, ducatur in 1 R – 7, proueniet enim 1 C – 39 R — 70 = o; duæ autem falſæ radices efficiunt veram, ſi ſimul accipiantur, vbi obſerua ſi ſtatuamus ℞ 13, mediam inter 13, & vnitatem, ſtatuamus inquam ſemidiametrum ipſius circuli, videlicet F H, & in eo linea F G, ſit 5 $\frac{5}{13}$. quantitas ortiua ex applicatione 70, ad 13, & trifariam ſecando arcum G K, in punctis I, & L, iunctaque F L, hæc erit quæſitæ radicis valor 7; alij autem duo valores ſunt F M, & F N, nimirum 2, & 5, reperiuntur autem deſcribendo in circulo à puncto L, triangulum æquilaterum L M N, iunctiſque F M, F N.

Nota quadam in Arte maximè neceſſaria. Illud porro eſt conſideratione digniſſimum, cùm fuerit æquatio 39 R – 1 C = 70; eaſdem recipiendas eſſe radices, tantùm mutatis ſignis †, & –, ita vt duæ falſæ radices euadant veræ; at vera euadat falſa; erat enim 1 R = — 2 ſeu 1 R † 2 = o, & 1 R = — 5, ſeu 1 R † 5 = o, ex quorum multiplicatione fiebat 1 Q † 7 R † 10, quo ducto in 1 R = 7, hoc eſt 1 R – 7 = o; proueniebat 1 C — 39 R – 70 = o; modò autem ſi 1 R † 2, ducatur in 1 R — 5, proueniet 1 Q – 7 R † 10, quo ducto in 1 R † 7, fiet 1 C – 39 R † 70 = o, ſeu 39 R — 1 C = 70, cuius æquationis radices duæ ſunt veræ; alia autem ſalſa, nempe 2, & 5, ſunt veræ, at verò 7, eſt falſa, de quo iterum inferiùs redibit ſermo.

Quid primò curandum in æquatione explicanda. Si igitur proponatur æquatio, in qua cubus afficitur ſub latere, præſtat primum inquirere, num ea diuidi poſſit per quantitatem incognitam † plus, vel — minus aliquo numero terminum vltimum æquationis diuidente.

Et quidem ſi de æquatione agitur, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, id apud Artifices arguit radicem tàm veram, quàm falſam nullo modo exprimi poſſe, ſed potius eam eſſe denotandam per rectam datum

angulum;

angulum, vel arcum in tres æquales partes diuidentem; cum nimirum diuiſio ſupradicta iuſtitui nequit.

Vt autem hæc melius intelligantur, & cumulatius expliceutur; non pigebit quæ maiores literis prodidere breuiter in medium afferre.

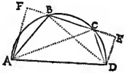
Rem igitur hæc Problemate adiuncto declarare tentatunt; ita Schooten.

PROBLEMA.

In ſemicirculo ſupra diametrum A D, deſcripto quadrilatero A B C D, cognita ſint tria latera eius A B, B C, C D.

Oporteat diametrum inuenire, ſiue quartum latus A D.

Supponamus A B, æqualem b, & B C, æqualem c, denique C D, æqualem d. Diameter autem A D, ſit a, acta recta B D, & in B C, protractam perpendicularis cadat D E.



Quandoquidem rectangulum eſt ᵃ triangulum A B D, ac proinde quadratum A D, æquale ᵇ duobus quadratis A B, B D, ſi ex quadrato A D, æquale a^2 ſubducatur quadratum A B, æquale b^2, remanebit quadratum B D, æquale $a^2 - b^2$.

a. 31. tertij.

b. 47. primi.

Quoniam verò triangulum B D C, eſt ᶜ obtuſiangulum; proinde quadratum B D, maius eſt quadratis B C, C D, ſimul ſumptis duplo rectangulo B C E, ſi à quadrato B D, æquale $a^2 - b^2$, ſubtrahamus aggregatum quadratorum B C, C D, æquale $c^2 + d^2$, remanebit duplum rectangulum B C E, æquale $a^2 - b^2 - c^2 - d^2$.

c. 12. ſecũdi.

Denique cum triangula A B D, & C E D ſint ſimilia (ſunt enim rectangula, inſuper angulos A, & D C E, babent æquales) erit vt D A, ad A B, ita D C, ad C E. Quamobrem cùm A D, ſit æqualis a, A B, æqualis b, & D C, æqualis d, erit quidem C E, æqualis $\frac{bd}{a}$, ſed ducta in duplam B C, nempe 2 b, fiet duplum rectangulum B C E, æquale $\frac{2bcd}{a}$, comparandum cum duplo rectangulo B C E, ſuperiùs inuento æquale ipſi $a^2 - b^2 - c^2 - d^2$, quapropter $\frac{2bcd}{a}$, æquabitur $a^2 - b^2 - c^2 - d^2$, & æquatione ordinata, fiet $a^3 = \left.\begin{matrix} +bb \\ +cc \\ +dd \end{matrix}\right\} a + 2bcd$.

His autem præhabitis, deinceps inquirunt, an quadratum ſemiſſis vltimi termini, maius ſit cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipſi æquale, an denique minus. De hoc tamen alibi, cum verò deprehenſum fuerit cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini maiorem eſſe quadrato ſemiſſis vltimi; concludunt radicem æquationis iuxta Cardani præcepta exhiberi non poſſe.

Schooten de æquationũ cubicarum reſolutione.

Illud porrò ſubijciendum eſt. Problema ſuperiùs poſitum ſolidum eſſe; ſi tria latera data A B, B C, & C D, inter ſe fuerint inæqualia, ſiquidem ad æquationem cubicam deuenitur, quæ diuiſionis beneficio ad quadraticam reduci non poteſt, ſi duo quælibet ex dictis lateribus æqualia fuerint, tunc æquatio diuiſione ad quadraticam reduci poteſt.

Vt ſi C, & D, æqualia, fuerint peruenitur ad æquationem $a^3 = \left.\begin{matrix} bb \\ 2cc \end{matrix}\right\} a - 2bc^2 =$ o, quæ diuiſibilis eſt per $a + b = 0$, vnde ad quadraticam reducetur $a^2 - ba - 2c^2 = 0$. Vlterius tamen diuiſioni non eſt latus.

Quod ſi tria latera æqualia fuerint inter ſe, æquatio hanc formam ſortietur $a^3 - 3b^2a - 2b^3 = 0$; & ea diuiſibilis eſt per $a - 2b = 0$. At orietur impoſſibilis æquatio $a^2 + 2ba + b^2 = 0$. Ita ſit vt valor verus radicis, a, tunc ſit 2b; ſintq; prætetea duo falſi valores − b, & − b, quòd ex eo liquet, quoniam ſi tria latera A B, B C, & C D, inter ſe fuerint æqualia, erit quidem figura A B C D, ſemihexa-

miexagona regularis, cuius quodlibet latus æquale eſt ſemidiametro.

Numeris autem hunc in modum.

Hæc omnia numeris illuſtrantur.

Supponamus A B, ſiue b ⊐ 24; B C, ſeu c ⊐ 20, C D, ſeu d ⊐ 15, & quæratur A D ⊐ 1 R. Quoniam igitur b^2 † c^2 † d^2, fuit æquale 1201, & 2 b c d ⊐ 14400, proueniet æquatio 1 C ⊐ 1201 R † 14400, ſiue 1 C ♀ 0 Q — 1201 R — 14400 ⊐ 0, quæ diuiſibilis eſt per 1 R † 25 ⊐ 0, fit enim quotiens 1 Q — 25 R — 576 ⊐ 0. Siue 1 Q — 25 R ⊐ 576, cuius radix 1 R, duo admittit valores, nempe $12\frac{1}{2}$ † ℞ $732\frac{1}{4}$, & $12\frac{1}{2}$ — ℞ $732\frac{1}{4}$; ita nimirum, vt ſupradictæ æquationis radix, ſiue diameter A D, tres recipiat diuerſos valores vnum verum, ſiue maiorem quàm 0, vt $12\frac{1}{2}$ † ℞ $732\frac{1}{4}$, duos autem falſos, ſeu minores quam 0, vt — 25, & $12\frac{1}{2}$ — ℞ $732\frac{1}{4}$, qui ſimul ſumpti, vero ſunt æquales.

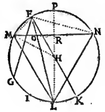
Cùm æquatio diuiſibilis nõ fuerit, vt ſuperiùs dictum fuit.

Ad explicationem ſupra dictorum, proponitur æquatio explicãda.

Quòd ſi æquatio diuiſibilis non fuerit ad eum, quem explicuimus, modum; argumento erit eius tàm veram, quàm falſam radicem, nullo modò exprimi poſſe, vnde tunc præſtat, aliò confugere. Idque, vt clariùs explicemus perpendamus æquationem hanc 1 C — 243 R ⊐ 1215, hæc enim diuiſibilis non eſt per quantitatem incognitam ✠ plus, vel — minus aliquo numero terminum vltimum æquationis diuidente ſine fractione, neque eius radix vllis numeris eſt explicabilis; nec præceptum ſuperiùs traditum ad eius explicationem idoneum eſt, ſiquidem cubus è triente coefficientis plani, ſiue numeri radicum, maior eſt quadrato à dimidio comparationis homogenei, ſeu numeri abſoluti.

Quo pacto propoſita æquationis radix explicetur.

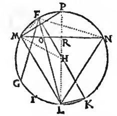
Commodè igitur radix ipſius denotatur per ſectionem anguli in tres partes æquales, in cuius gratiam deſcribunt circulum, cuius radius F H, ſeu H K, ſit q; ſiue ℞ $\frac{1}{3}$ p, in eoque aptando rectam F G, æqualem 15, ſeu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam ſecando arcum G K, ſiue angulum G F K, per rectam F L, quam veram quantitatem ipſius radicis exprimere autumant, vbi prætere a, ſi à puncto L, triangulum æquilaterum L M N, circulo fuerit inſcriptum, rectè quidem F M, & F N, vtramque radicem falſam deſignant; vbi falſæ radices ſimul ſumptæ veram conficiunt.



Speioſa demonſtrantur.

Quandoquidem triangula L N O, & L N F, ſimilia ſunt, cùm habeant angulum ad L, communem, & angulum L N O, ſiue L M N, ipſi L F N, æqualem, atque adeo tertius L O N, æqualem tertio L N F; quamobrem erit vt N O, ad L N, ita F N, ad L F, non ſecus cùm ſimilia ſint triangula L M O, & L F M, erit, vt M O, ad L M, ſeu L N, ita F M, ad L F, ac proinde vt N O, ad M O, ſimul ad L N, ita F N, F M, ſimul ad L F. Sunt autem N O, M O, ſimul ſumptæ æquales ipſi L N, æquales propterea etiam erunt F N, F M, ſimul ſumptæ ipſi L F.

Vel etiam interuallo rectæ F H, vel H K, æqualis q, ſeu ℞ $\frac{1}{3}$ p, circulus deſcribatur, in quo inſcripta recta F G, æqualis 15, ſeu $\frac{3q}{p}$, trifariam ſecetur vterque arcus F M G, & F N G, per rectas F M, & F N, harum enim aggregarum veræ radicis quantitatem eſſe Carteſius dicebat, vtramque verò illarum eſſe falſam.



Hoc autem in idem recidit eum ſuperiori; ſi enim angulus G F K, triplus fuerit anguli L F K, & arcus G K, fuerit triplus ipſius L K, etiam G M F, triplus erit ipſius M F, & G N F, triplus ipſius N F. Huius autem demonſtratio ſic ſe habet.

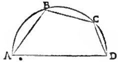
Ducta ſiquidem diameter L H P, ſecabit arcum M F N, biſariam in P. Quoniam autem triangulum L M N, æquilaterum

eſt,

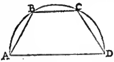
eſt, propterea arcuum quilibet trium, tertia pars erit totius peripheriæ; itaque tota peripheria erit tripla ipſius M P N, atque adeo ſemiperipheria F M K, tripla erit arcus M P, cum igitur eadem ſit ratio arcus F M K, ad arcum M P, nimirum totius ad totum, quæ eſt arcus G L K, ad arcum L K, ſeu E P, ablati ad ablatum, erit itidem reliqui arcus G M F, ad reliquum arcum M F, eadem ratio, quæ totius ad totum. Eſt autem arcus F M K, triplus ipſius M P, ergo etiam arcus G M F, erit triplus ipſius M F. Id autem erat operæ pretium demonſtrare. Non ſecus oſtenditur arcus G N F, triplus ipſius N F.

Hunc ferè in modum ſuprapoſitam veritatem oſtenderunt. Vel denique radicem æquationis explicandam putarunt, dicentes duo eſſe triangula æquicrura concipienda, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin triplus ſit anguli, qui eſt ad baſin primi, & baſim quidem ſecundi eſſe in caſu de quo loquimur $7\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{15}{2}$, crus verò 9, ſiue ℞ $\frac{1}{3}$ p, radicem autem quæſitam eſſe primi trianguli baſim.

Eleganter tamen videtur explicabilis huiuſmodi æquationis radix dicendo eam eſſe ſemicirculi exempli gratia A B D, diametrum A D, ſupra quam deſcripto quadrilatero inæqualium laterum, vt verbi gratia A B C D, tria ſuperiora A B, B C, C D, per inuicem multiplicata faciant 607 $\frac{1}{2}$, dimidium numeri abſoluti 1215, ſeu $\frac{1}{2}$ q, at ſumma quadratorum ex ipſis ſit 243, numerus radicum ſeu p. *Eleganter explicandi ratio.*



Ad hæc illud adijcerem; Nimirum cùm fuerint A B, B C, C D, inter ſe æquales, atque adeo quæuis ipſarum æqualis ſemidiametro, ſi A B, ſupponatur b, & B C, ſupponatur c, denique C D, ſupponatur d, tunc, æquationem eſſe futuram $a^3 - 3\,b^2\,a = 2\,b^3$ eiuſque radicem eſſe 2 b. In huiuſmodi autem caſu cubus è triente coefficientis plani æqualis eſt quadrato à dimidio comparationis homogenei; ſiquidem triens coefficientis plani eſt b^2, cuius cubus eſt b^6; at verò dimidium comparationis homogenei eſt b^3, cuius quadratum eſt b^6. *Cùm ſubtenſæ fuerint inter ſe æquales.*

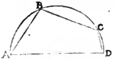


Vides igitur, cubum è triente coefficientis plani eſſe æqualem quadrato à dimidio comparationis homogenei.

Hæc autem vt magis illuſtrentur ſupponamus A D, diametrum eſſe 8. Si igitur A B, B C, C D, fuerint inter ſe æquales ipſarum quælibet erit 4, cubus ex A D, erit 512, aggregatum autem quadratorum ipſarum A B, B C, C D, erit triplum quadratum vnius ex illis, quælibet autem ipſarum eſt 4, cuius quadratum eſt 16, eius triplum eſt 48, eritq; numerus radicum; at verò numerus abſolutus erit productum duplum ſub A B, B C, C D; eſt autem productum 64, cuius duplum eſt 128, & ita quidem 128, erit numerus abſolutus ſiue comparationis homogeneum, quamobrem fiet 1 C − 48 R ≍ 128, cuius æquationis radix eſt 8, nempe A D, ipſius cubus eſt 512, a quo ſi ſubduxeris 384, ſolidum ſub 48, plano, & 8, radicis pretio remanet 128. Manifeſtum eſt autem trientem ipſius 48, eſſe 16, cuius cubus eſt 4096; at verò dimidium ipſius 128, eſt 64, cuius quadratum eſt itidem 4096. *Superiora explicantur.*

Cæterum cum rectæ illæ fuerint inæquales cubus è triente coefficientis plani maior erit quadrato à dimidio comparationis homogenei.

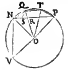
Sit A D, diameter 10, & A B, ℞ 20, inſuper B C, ℞ 50, denique C D, ℞ 10, quadratorum aggregatum erit 80; productum verò ſub ipſis erit ℞ 10000; hoc eſt 100, cuius duplum eſt 200; quamobrem 200, erit comparationis homogeneum; vnde erit æquatio 1 C − 80 R ⫫ 200, cuius æquationis radix eſt 10, cuius cubus eſt 1000, à quo ſi dempſeris 800, numerum factum ex 80, in 10, radicis pretium remanebit 200; itaque conſideremus quod intendimus. Tertia pars numeri radicum eſt 26 $\frac{2}{3}$, huius autem cubus eſt maior, quàm 10000, quadratum a 100, dimidio numeri abſoluti. Hoc autem analyticè ab alijs demonſtratum, nos etiam in Specioſa oſtendemus.



Si igitur æquatio fuerit cubica, vt dictum eſt, modo iam inſinuato poterit explicari.

Carteſiana explicationis ratio, pro ſupra poſita æquatione.

Hic ſolum addam, cùm oblata fuerit æquatio iuxta prędicta, itaut quadratum ſemiſſis vltimi termini, non ſit maius cubo trientis quantitatis cognitę penultimi termini Iuxta Carteſium ſupponitur circulus N Q P V, cuius ſemidiameter N O, ſit ℞ $\frac{1}{3}$ p; hoc eſt media proportionalis inter trientem quantitatis datę p; & vnitatem; itemque ſupponitur linea N P, huic circulo inſcripta, quę ſit $\frac{3q}{p}$, hoc eſt, quę ſit ad alteram quantitatem datam q, vt eſt vnitas ad trientem ipſius p; diuidendus eſt autem vterque arcus N Q P; N V P, in tres partes ęquales; erit enim N Q, ſubtenſa trientis vnius arcus, vna cum N V, ſubtenſa trientis alterius, ęqualis radici de qua queritur.



Exemplo ſuperiora illuſtrantur.

Quę vt melius intelligantur; Eſto ęquatio 1 C — 243 R ⫫ 1215. Supponamus ſemidiametrum N O, eſſe 9; mediam proportionalem inter Vnitatem, & trientem ipſius 243, numeri radicum, cuius triens eſt 81, & 9, eſt medio loco proportionalis inter vnitatem, & 81. Pręterea ſupponamus N P, huiuſmodi circulo inſcriptam eſſe quidem 15, nempe numerum, qui ſit ad 1215, vt eſt vnitas ad 81, trientem cognitę quantitatis 243, & fiet quęſita radix aggregatum ex N Q, ſubtenſa trientis vnius arcus, & N V, ſubtenſa trientis alterius.

Ex hactenus autem ſatis conſtat, ratio explicandi cubicæ ęquationis, in qua nimirum cubus afficitur multa ſolidi ſub latere datoq; coefficiente plano.

Supereſt modo, vt tertium ęquationis genus aggrediamur, cuiuſmodi ęquatio eſt illa, in qua ſolidum ſub latere datoq; coefficiente plano afficitur multa cubi, fatcor tamen hanc eſſe cęteris implicatiorem; in eius igitur explicatione, paubulum, erit immorandum, quamobrem, vt par eſt, à canone ducentes exordium, multa dicemus, vnde nobis illucet ratio enodandi huiuſmodi æquationem; quę amphibola eſt, vtpote illa, cui duplex radix ſatisfacit, vnde, vt antecedens vnicam radicem veram admittebat, duabus falſis exiſtentibus.

Hęc vtique duplicem veram, vnica exiſtente falſa habet. De explicatione proinde huius ęquationis nunc verba facturi ſumus.

De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano afficitur multa cubi.

CANON.

Fiat æquatio directè negata, retentis iiſdem coefficiente plano, & comparationis homogeneo; deinde huius æquationis tranſmutatæ exhibeatur radix iuxta ſuperius tradita

hac

hæc enim inuenta radix fiat coefficiens æquationis quadraticæ auulſæ, cuius comparationis homogeneum conſtituatur differentia inter quadratum iſtius inuenta coefficientis, & coefficientem magnitudinem veteris æquationis; huius enim radix adinuenta erit ſuperioris æquationis radix.

Sit æquatio 147 R — 1 C ⩵ 286, & per metamorphoſin euadat 1 C — 147 R ⩵ 286. Huius æquationis radix reperiatur arte ſuperiùs tradita, & eſt 13, cuius quadratum eſt 169, à quo ſubtracto 147, remanet 22, ac proinde fiet æquatio 13 R — 1 Q ⩵ 22. Huius autem æquationis radix eſt duplex nempe 2, & 11, quanta eſt radix vtraq; initio æquationis propoſitæ. *Exemplum II.*

Rurſus ſit æquatio 39 R − 1 C ⩵ 70, per metamorphoſin fiet 1 C − 39 R ⩵ 70, huius æquationis radix eſt 7; fiat hic numerus coefficiens æquationis quadraticæ auulſæ, deinde à 49, quadrato ex 7, auferatur 39, numerus radicum, vt remaneat 10, pro comparationis homogeneo in æquatione quadratica. Itaque fiet æquatio 7 R — 1 Q ⩵ 10. Huius æquationis radices ſunt 2, & 5. Itaque hæ ſunt radices initio æquationis propoſitæ. *Exemplum III.*

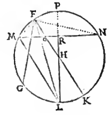
Sit æquatio 8 R — 1 C ⩵ 3, & per metamorphoſin fiet 1 C — 8 R ⩵ 3, cuius radix eſt 3, huius autem quadratum eſt 9, à quo ſi dempſeris 8, numerum radicum remanet 1; itaque fiet æquatio 1 Q — 3 R ⩵ 1 huius porro æquationis radix eſt duplex, quarum vna eſt 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$, alia vero 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$. *Exemplum IV.*

Præterea ſit æquatio 7 R − 1 C ⩵ 6, & per metamorphoſin fiet 1 C − 7 R ⩵ 6, cuius radix eſt 3, huius autem quadratum eſt 9, à quo ſi dempſeris 7, numerum radicum, remanet 2, itaque fiet æquatio 3 R − 1 Q ⩵ 2. Huius porro æquationis radix eſt duplex, quarum vna eſt 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ $\frac{1}{4}$, hoc eſt 1 $\frac{1}{2}$ † $\frac{1}{2}$, hoc eſt 2; alia verò eſt 1 $\frac{1}{2}$ − ℞ $\frac{1}{4}$ hoc eſt 1 $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$, hoc eſt 1. Superiores æquationes ſunt quidem diuiſibiles, ita ut hunc in modum per diuiſionem ad quadraticas reduci poſſint.

Rectè autem præcipi, quæ ſuperiùs diximus hoc pacto planum fiet, de quo infra.

Dato circulo F M G N, in quo aptata ſit recta F G, ſit autem triſariam ſectus vterque arcus F M G, & F N G, in M, & N, ſitque inuinctum reperire F M, ſubtenſam trientis vnius, & F N, ſubtenſam trientis alterius.

Circuli ſemidiameter F H, ſeu H K, eſto b, at verò F G, ſit c, denique F M, eſto a, & ex datis F H, & F M, reperiatur inſcripta F G, 3 a − $\frac{a^3}{b^2}$, cumque hæc ſupponatur c, proinde 3 a − $\frac{a^3}{b^2}$, æquabitur c; quamobrem 3 b^2 a − a^3, æquabitur b^2 c. *Præceptum oſtenditur.*



Non diſſimiliter ſi F N, ſupponatur a, atque ex H F, & F N, inquiramus F G, in eandem æquationem incidemus in qua videlicet 3 b^2 a − a^3, æquabitur b^2 c, ex quo facilè intelliges propoſitæ æquationis radicem eſſe tàm F M, quàm F N, quorum aggregatum oſtenſum eſt ſuperiùs eſſe F L, & hoc erit pretium falſæ radicis, veris exiſtentibus F M, & F N, quemadmodum in æquatione negatè affecta duo erant falſi valores F M, & F N.

Si

Si itaque æquatio hæc, in qua ſolidum ſub latere afficitur multa cubi, tranſmutetur in illam, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, huius autem radice inuenta vera: cognitiſque duabus falſis; hæ quidem huius de qua loquimur æquationis radices erunt.

Supponamus igitur æquationem eſſe $1\ C - 39\ R = 70$, cuius duæ ſunt falſæ radices 2, & 5; vna autem vera aggregatum ex his, nempe 7. Tranſmutetur æquatio, vt fiat $39\ R - 1\ C = 70$, huius autem æquationis radices veræ duæ ſunt, nimirum 2, & 5, vna quidem falſa, puta 7.

Exemplum I. Itaque ſi detur æquatio $39\ R - 1\ C = 70$, tranſmutanda eſt æquatio in directè negatam, vt fiat $1\ C - 39\ R = 70$, huius autem reperta vera radice, cognitiſque falſis, hæ aſſumantur pro veris radicibus æquationis propoſitæ $39\ R - 1\ C = 70$.

Exemplum II. Sit æquatio $63\ R - 1\ C = 162$, hæc tranſmutanda eſt in hanc $1\ C - 63\ R = 162$, cuius vtique æquationis radix eſt 9, & quidem vera; at duæ ſunt falſæ videlicet 3, & 6. Hæ itaque erunt radices æquationis propoſitæ $63\ R - 1\ C = 162$.

Supradictorũ explicatio. Hæc eadem ſuperiori methodo, explicata comperies adeo, vt eadem radix deſumatur; Sit enim eadem æquatio $39\ R - 1\ C = 70$, tranſmutetur in hanc $1\ C - 39\ R = 70$, huius porro æquationis radix reperietur 7. Nunc beneficio radicis inuentæ ex tranſmutata æquatione comperiemus radicem æquationis propoſitæ. Radix igitur illa 7, quadraticè multiplicetur, vt fiat 49, à quo ſubtrahatur radicum numerus 39, vt remanear 10, numerus ſeruandus. Deinde multiplicetur $3\frac{1}{2}$, dimidium inuentæ radicis, multiplicetur inquam in ſe quadraticè vt fiat $12\frac{1}{4}$, à quo ſubtrahatur 10, numerus ſupra ſeruatus, & prouenit $2\frac{1}{4}$, cuius radix quadrata eſt $1\frac{1}{2}$, hoc autem numero addito ad $3\frac{1}{2}$, dimidium iam dictum, fit 5, ab eodem itidem ſubtracto remanet 2, itaque veræ radices æquationis propoſitæ $39\ R - 1\ C = 70$, erunt 5, & 2, at verò falſa radix erit 7.

Exemplum III. Itidem ſit æquatio $63\ R - 1\ C = 162$, tranſmutetur in hanc $1\ C - 63\ R = 162$, huius autem æquationis radix eſt 9, cuius quadratum eſt 81, à quo ſi dempſeris 63, numerum radicum, remanet 18, numerus ſeruandus. Mox autem ſumatur $4\frac{1}{2}$, dimidium radicis ex tranſmutata æquatione, quadraticè verò multiplicetur, vt fiat $20\frac{1}{4}$, a quo ſi ſubtraxeris 18, ſupra ſeruatum, remanet $2\frac{1}{4}$, cuius radix quadrara eſt $1\frac{1}{2}$, at ſi $1\frac{1}{2}$, addatur ad $4\frac{1}{2}$, fit 6, ſi verò ſubtrahatur fit 3, itaque 6, & 3, erunt radices initio æquationis propoſitæ $63 - 1\ C = 172$.

Exemplum IV. Item ſit æquatio $7\ R - 1\ C = 6$, tranſmutetur in hanc $1\ C - 7\ R = 6$. Huius autem æquarionis radix eſt 3.

Cuius quadratum eſt 9, à quo ſi dempſeris 7, numerum radicum, remanet 2, ſeruandum. Deinde dimidium inuentæ radicis ex æquatione transformata eſt $1\frac{1}{2}$, cuius quadratum eſt $2\frac{1}{4}$, à quo ſi ſubtraharur 2, ſupra ſeruatus numerus remanet $\frac{1}{4}$, cuius radix quadrata eſt $\frac{1}{2}$, quo addito ad $1\frac{1}{2}$, dimidium inuentæ radicis, fir 2, & ab eodem ſi fuerit ſubtractum $\frac{1}{2}$, remanet 1.

Itaque propoſitæ æquationis duæ ſunt radices 1, & 2, quarum ſumma eſt 3, atque adeo 1, & 2, ſunr radices veræ; Sed 3, eſt radix falſa.

Aduerte autem per diuiſionem has æquariones ad quadraticas reuocari, quod euidenter comperiemus inſtitura diuiſione.

Exemplum V. Si ſit æquatio $39\ R - 1\ C = 70$, ſeu $39\ R - 1\ C - 70 = 0$, per diuiſionem ad quadraticam redigetur. Si itaque diuidarur per $1\ R + 7$, proueniet $1\ Q - 7\ R + 10 = 0$, ſeu $7\ R - 1\ Q = 10$, cuius æquationis radix eſt duplex, nempe 2, & 5, & quidem ſi $1\ R - 2$, ducatur in $1\ R - 5$, fiet $1\ Q - 7\ R + 10 = 0$.

Exemplum VI. Cæterum ſi propoſita æquatio $1\ C - 39\ R + 70 = 0$, diuideretur per $1\ R - 5$, fieret quotiens $1\ Q + 5\ R - 14 = 0$, & ſi eadem diuideretur per $1\ R - 2$, fieret quotiens $1\ Q + 2\ R - 35 = 0$.

Prioris

Prioris æquationis 1 Q † 5 R — 14 = 0, eſt 2, at verò poſterioris 1 Q † 2 R — 35 = 0. Radix eſt 5.

Prẹterea ſit æquatio 63 R — 1 C = 162, ſeu 1 C — 63 R † 162 = 0, per diuiſionem ad quadraticam redigetur, ſi igitur diuidatur per 1 R † 9, proueniet quotiens 1 Q - 9 R † 18 = 0, ſeu 9 R - 1 Q = 18; huius æquationis radix eſt duplex, & quidem ſi 1 R — 3, ducatur in 1 R - 6, fit 1 Q — 9 R † 18 = 0.

Cæterum ſi æquatio illa diuiſa fuiſſet per 1 R — 6, prouenisſet 1 Q † 6 R — 27 = 0, cuius radix eſt 3, & ſi diuiſa fuiſſet ſuperior eadem æquatio cubica per 1 R — 3, prouenisſet 1 Q † 3 R — 54 = 0, cuius æquationis radix eſt 6.

Ad explicandam autem huius æquationis naturam ab alijs tradita hic afferemus.

PROBLEMA.

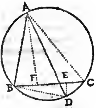
IN circulo cuius diameter eſt A D, inſcriptis tribus inæqualibus lineis rectis A B, B C, C D, ſibi inuicem contiguis, quarum extrema proueniant ex diametri terminis A, & D. Oportet ijs datis diametrum A D, reperire.

Supponamus A B, æqualem b, & B C, æqualem c, denique C D, æqualem d; at verò A D, ſupponatur a, iunctiſque A C, B D, & in B C, protractam, perpendicularis dimittatur D E. *Duplex eſt caſus.*

Duplex autem eſt caſus, cum etiam dupliciter ſe habere poſſit inſcriptarum poſitio. Vel enim A B, & C D è diametri terminis ſunt prodeuntes, vt non ſe mutuò ſecent, vel mutuò ſe ſecant.

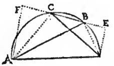
Ad primum caſum quod attinet Subtrahatur quadratum B D, $a^2 - b^2$, ex aggregato quadratorum B C, C D, nimirum $c^2 + d^2$, remanebit duplum rectangulum B C D, nimirum $c^2 + d^2 - a^2 + b^2$. *Caſus primus.*

Quoniam autem triangula B A D, & C E D, ſimilia ſunt ſiquidem anguli B, & E, ſunt recti, & B E D, atque E C D, inter ſe æquales vtpote illi qui eidem inſiſtunt peripheriæ B D: erit quidem vt D A, nempe a, ad A B, nimirum b, ita D C, ſcilicet d, ad C E, nempe $\frac{bd}{a}$, quæ ſi ducatur in duplam B C, nimirum 2 c, fiet duplum rectangulum B C E, hoc eſt $\frac{2bcd}{a}$, & æquandum ipſi $c^2 + d^2 - a^2 + b^2$, hoc eſt duplo rectangulo B C E, iam inuento; atque adeo fiet æquatio, $\left.\begin{matrix}+bb\\+cc\\+dd\end{matrix}\right\} a - a^3 = 2bcd$.



In hac autem æquatione quadratum ſemiſſis vltimi termini minus eſt cubo è triente quantitatis cognitæ penultimi termini.

Ad ſecundum caſum quod attinet à quadrato D C, ſeu d^2 auferantur quadrata D B, B C, ſeu $a^2 - b^2 + c^2$, vt remaneat duplum rectangulum B C E, ſiue $b^2 + c^2 - b^2 - c^2$. *Caſus ſecundus.*



Et quoniam propter ſimilitudinem triangulorum A B D, & C E D, vt eſt A D, ſeu a, ad A B, ſiue b, ita D C, nempe d, ad C E, hoc eſt $\frac{bd}{a}$, ſi ex hoc ſubtrahatur C B, ſeu c, remanebit B E, hoc eſt $\frac{bd}{a} - c$, quę ſi multiplicetur per duplum C B, orietur du-

plum

plum rectangulum C B E, hoc eſt $\frac{2bcd}{a}$ $- 2c^2$, æquale ipſi rectangulo C B E, ſuperiùs inuento, videlicet $d^2 - a^2 \dagger b^2 - c^2$, vtrinque igitur ablato e^2, fiet æquatio,

$$\left.\begin{matrix}\dagger b^2\\ \dagger c^2\\ \dagger d^2\end{matrix}\right\} a - a^3 = 2\,b\,c\,d.$$

In vtroque igitur caſu eadem occurrit æquatio, cuius radix refert diametrum A D, propterea ſequitur, eam differentiam ſortiri quantitatem, atque ex eiſdem datis inſcriptis biſariam inueniri pro earum poſitione diuerſa.

[Quando Problema ſolidũ eſt.] Aduerte autem Problema tunc eſſe ſolidum cum tres inſcriptæ A B, B C, C D, fuerint inter ſe inæquales, ſiquidem ad æquationem cubicam aſcendit, quæ diuiſionis beneficio ad quadraticam reduci nequit.

[Quãdo æquatio ad quadraticam reduci poſſit.] At verò cum duæ quælibet ex inſcriptis fuerint æquales inuenta æquatio ad quadraticam reducetur, atque adeo Problema planum fiet.

Si igitur ſtatuamus e, & d, æqualia; fiet æquatio huiuſmodi $a^3 \left.\begin{matrix}-b^2\\ -c^2\end{matrix}\right\} a \dagger 2\,b\,c^2 = 0$, quæ quidem diuidi poteſt per $a - b = 0$, proueniet enim æquatio quadratica $a^2 \dagger b\,a - 2\,c^2 = 0$, hæc autem alterius diuiſionem non ſubit.

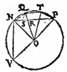
[Quando tres illæ lineæ fuerint æquales.] Quod ſi omnes tres iuxta alterutram hypotheſin æquales ſupponantur, ita vt inde proueniat æquatio $a^3 - 3\,b^2\,a \dagger 2\,b^3 = 0$, ipſa quidem diuidi poterit per $a \dagger 2\,b = 0$, præueniet enim æquatio $a^2 - 2\,b\,a \dagger b^2 = 0$, quæ diuiſibilis eſt per $a - b = 0$, ſiquidem oritur $a - b = 0$. In hoc autem caſu intelligendæ ſunt inſcriptæ coincidere cum ipſa diametro, eidemque æquales eſſe; tunc enim radicis valor, ſeu diameter A D, duos admittit valores inuicem æquales, qui quidem ſinguli vnicuique ipſarum inſcriptarum æquales erunt; ac inſuper falſum alterutrius illius duplum.

[Numeris eadem perficiũtur.] Hæc eadem numeris perficientur; Supponamus A B, eſſe 24 B C, autem 20, & C D 15, & A D, quæratur, quæ ſupponatur 1 R, cum igitur $b^2 \dagger c^2 \dagger d^2$, diceretur 1201, & 2 b c d, ſupponeretur 14400, proueniet æquatio $1201\,R - 1\,C = 14400$, ſeu $1\,C - 1201\,R \dagger 14400 = 0$, hæc autem diuidi poteſt per $1\,R - 25 = 0$, & fit quotiens $1\,Q \dagger 25\,R - 576 = 0$, ſeu $1\,Q = -25\,R \dagger 576$, quæ radicem vnam habet veram, nimirum ℞ $732\frac{1}{4} - 12\frac{1}{2}$, & falſam vt $-$ ℞ $732\frac{1}{4} - 12\frac{1}{2}$, adeo vt radix æquationis prædictæ $1\,C = 1201\,R - 14400$, ſiue quæſita diameter A D, tres differentes valores admittat, duos veros, ſiue † quam 0, vt † 25, maiorem, & ℞ $732\frac{1}{4} - 12\frac{1}{2}$, minorem; falſum verò ſiue − quam 0, $-$ ℞ $732\frac{1}{4} - 12\frac{1}{2}$, æqualem veris illis ſimul ſumptis quamobrem cum ſuperioris æquationis $1\,C = 1201\,R \dagger 14400$. Radices inuentæ ſint 25, $12\frac{1}{2} -$ ℞ $732\frac{1}{4}$, & $12\frac{1}{2} \dagger$ ℞ $732\frac{1}{4}$, oportet eas tantum auferre ex 0, vel earum immutare ſigna, vt huius poſterioris æquationis radices habeantur.

[Quãdo æquatio cubica non patitur diuiſionẽ per R † vel − &c.] Verum enim verò ſi æquatio iam dicta diuidi non potuiſſet per 1 R † vel −, aliquo numero vltimum terminum æquationis diuidente, id argumento fuiſſet eius radicem neque veram, neque falſam vllo modo numero explicabilem eſſe, ſed eam exponendam eſſe vt paulo infra dicetur, nimirum per rectam, datum angulum vel arcum in tres æquales partes diuidentem, vel alio modo paulo infra referendo.

Sit igitur æquatio $1\,C$ ♀ $0\,R - 2700\,R \dagger 32400 = 0$, hæc diuidi non poteſt ad eum modum, vt ſuperius diximus; propterea radicis valor expreſſibilis non erit ſiue ſermo ſit de vera, ſiue de falſa radice. Aliò igitur eſt confugiendum, quando cubus trientis numeri radicum excedit quadratum ſemiſſis numeri abſoluti.

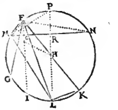
[Æquationis prima explicatio.] Tunc autem per rectas ſubtendentes trientem anguli, vel arcus commodè denotari poſſunt, & quidem vt ait Carteſius deſcribendo circulum N Q P V, cuius radius N O, ſit ℞ $\frac{1}{3}$ p, in quo inſcripta N P, ſit $\frac{19}{p}$ erit quidem N Q, ſubtendens trientem arcus N Q P, vna ex radicibus quæſitis, & N V, ſubtendens trientem arcus N V P, radix altera ſaltem cum quadratum ſemiſſis vltimi termini, non excedit cubum quantitatis cognitæ penultimi termini, ſi maius enim foret linea N P, huic circulo inſcribi non poſſet.



[Secundò aliter idem perficitur.] Vel deſcribendo itidem circulum, cuius radius F H, ſeu H K, ſit 30, ſiue ℞ $\frac{1}{3}$ p, & in eo accomo-

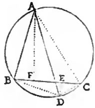
dando

dando rectam F G, quæ ſit æqualis 36, ſiue $\frac{18}{p}$, trifariam vero ſecando vtrumque arcum F M G, & F M L, per rectas F M, & F N, vt enim circulus, cuius radius 30, per inſcriptam 36, in duo æquales arcus diuiditur, ſic etiam ignota quantitas a duplicem valorem obtinet, fitque alterutra è ſubtenſis F M, vel F N, tam trientis F M, minoris arcus F M G, quam trientis F N, maioris F N G, radicis autem valor falſus, æqualis eſt veris ſimul ſumptis, vel cum Vieta.



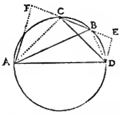
Vieta methodus.

Duo triangula intelligantur æquicruracruribus alterum alteri æqualia, quorum quidem ſecundi angulus qui eſt ad baſim triplus ſit ad angulum qui eſt ad baſin primi, & baſis ſecundi intelligatur eſſe 18, ſiue $\frac{18}{3p}$. At verò eius 30, ſiue ℞ $\frac{1}{3}$ p, denique 1 R, de qua quæritur eſſe dimidiam baſim primi, multatam continuatamue longitudinem eius, cuius quadratum eſt æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Alia explicationis ratio.

Denique dicere etiam licebit radicem eſſe diametrum circuli A D, in quo ſi inſcribantur tres inæquales rectæ lineæ A B, B C, & C D, ſibi inuicem contiguę, quarum extremę proueniunt ex diametri terminis A, & D, ſolidum autem ex ipſis tribus ſit $\frac{1}{\ }$ q, hoc eſt in ſuperiori exemplo 16200, ſumma autem quadratorum earundem ſit F, hoc eſt in ſuperiori exemplo 2700.



Quid in primis curandū.

Curandum igitur eſt in primis, vt planè conſtet, num æquatio propoſita, diuiſibilis ſit per 1 R † vel – numero diuidente numerum abſolutum æquationis tranſmutatæ; ſic enim eius innoteſcet radix; cuius beneficio propoſitæ æquationis radicem aſſequemur.

Vt ſi propoſita ſit æquatio 7 R — 1 C ⊐ 6, ſeu 7 R – 1 C – 6 ⊐ o. Hac tranſmutata fiet 1 C – 7 R ⊐ 6, ſeu 1 C — 7 R — 6 ⊐ o. Hæc quidem diuiſibilis eſt per 1 R – 3; ſit autem quotiens 1 Q ✠ 3 R ✠ 2 ⊐ o. Et radix quidem erit 3.

Vel etiam eadem æquatio diuidi poteſt per 1 R ✠ 2; ſit autem quotiens 1 Q – 2 R — 3 ⊐ o. Seu 1 Q — 2 R ⊐ 3. Cuius æquationis radix eſt 3.

Vel diuidi poteſt eadem æquatio per 1 R ✠ 1, fiet autem quotiens 1 Q — 1 R — 6 ⊐ o; ſeu 1 Q — 1 R ⊐ 6. Cuius æquationis radix eſt 3; hac autem habita procedendum erit vt ſupra; Quadratum inuentæ radicis eſt 9, a quo ſubtracto 7, numero radicum; remanet 2, ſeruandum; deindè dimidium inuentæ radicis eſt 1 $\frac{1}{2}$, huius quadratum eſt 2 $\frac{1}{4}$; a quo ſi dempſeris 2; ſeruatum, remanet $\frac{1}{4}$; cuius radix quadrata eſt $\frac{1}{2}$; at verò ſi $\frac{1}{2}$, addatur ad 2 $\frac{1}{2}$, dimidium ſupradictæ radicis fit 2; ſi vero ſubtrahatur ab eodem remanebit 1. Itaque initio propoſitæ æquationis 7 R — 1 C ⊐ 6; veræ radices ſunt 2, & 1, falſa autem 3.

Quod ſi reuocari non poteſt ad æquationem directè negatam, præſtabit illam explicare vt ſuperiùs innuimus.

Quomodo æquationis explicatio ſine reductione perficiatur. [illegible]

Quod ſi etiam id ſine reductione ad æquationem directè negatam præſtare velimus, ita procedendum erit.

Propoſita ſit æquatio 7 R — 1 C ⊐ 6; ſeu 7 R – 1 C — 6 ⊐ o; hæc diuidi quidem

dem poterit per 1 R † 3 = 0; fit autem quotiens 1 Q − 3 R † 2 = 0; cuius radix eſt 1; item per 1 R − 1, & fit quotiens 1 Q ✠ 1 R − 6 = 0; Cuius radix eſt 2; inſuper diuidi poterit per 1 R − 2 = 0; & fit quotiens 1 Q ✠ 2 R − 3 = 0; cuius radix eſt 3. Itaque abſque reductione iam dicta propoſita cubica æquatio diuiſionis beneficio poteſt explicari.

Aliter etiam licet hoc æquationis genus explicare.

Sit æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$.

Propoſitio. *Quoniam ſi ſint quatuor quantitates continuè proportionales, ſolidum à quadrato primæ maioris inter extremas in ſecundam, minus cubo ſecundæ, æquale eſt ſolido à quadrato eiuſdem primæ maioris inter extremas in differentiam ſecundæ, & quartæ.*

Propterea in ęquatione propoſita coefficiens planum eſt quadratum primæ maioris inter extremas, ſeu latus, quod poteſt planum coefficiens eſt prima maior inter extremas, differentia verò ſecundæ, & quartæ eſt quantitas ortiua ex applicatione comparationis homogenei ad planum coefficiens. Eò igitur res deducitur, vt ſi ſit æquatio huiuſmodi $b^2 a - a^3 = b^2 d$.

Vt b ſit prima maior, è quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, at d, ſit differentia ſecundę, & quartę, vnde fit vt a, radix ſit ſecunda; quare oportet.

Zeteticum. *Data prima maiori inter extremas, & differentia ſecundæ, & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium inuenire ſecundam.*

Secunda è quatuor prędictis continuè proportionalibus eſt radix ęquationis cubicę propoſitę.

At verò propoſitio illa ſuperior.

Si ſint quatuor quantitates continuè proportionales, ſolidum à quadrato primæ maioris inter extremas in ſecundam &c. Analyticè hunc in modum licebit oſtendere.

Propoſitionis demonſtratio. Sint continuè proportionales b, a, c, f. Quandoquidem b, a, c, f, ſunt continuè proportionales, erit vt b^2 ad a^2, ita a ad f, & diuidendo vt $b^2 - a^2$ ad a^2, ita $a - f$, quod dicatur d, ad f; & conuertendo vt a^2 ad $b^2 - a^2$, ita f, ad d, quoniam verò eſt vt a^2 ad $b^2 - a^2$, ita f ad d, erit etiam vt b^2 ad $b^2 - a^2$, vt a ad d; quamobrem productum ſub medijs, æquabitur producto ſub extremis; itaque $b^2 a - a^3$, æquabitur $b^2 d$, eſt autem b maior prima inter extremas, a verò ſecunda d, autem differentia inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium. Itaque ſi ſint quatuor quantitates continuè proportionales, ſolidum à quadrato primæ maioris inter extremas in ſecundam minus cubo ſecundæ, æquale eſt ſolido à quadrato eiuſdem primæ maioris inter extremas in differentiam ſecundæ, & quartę.

Quod ſi ſit vt a^2 ad $b^2 - a^2$, ita f ad d, debeat etiam eſſe vt b^2 ad $b^2 - a^2$, ita a ad d, ex eo patet, quia ſi fuerit vt a^2 ad $b^2 - a^2$ ita f ad d, ſeu ad $a - f$, erit etiam componendo vt b^2 ad $b^2 - a^2$, ita a ad $a - f$, ſupponitur autem $a - f$, exprimi per d; propterea erit, vt b^2 ad $b^2 - a^2$, ita a ad d. Quod oportebat oſtendere.

Hunc itaque in modum nos poſſumus has æquationes explicare; Quod ſi demum

pro

pro earum explicatione confugimus ad ſubtenſas arcuum per anguli partitionem, neminem admiratio ſubeat; quandoquidem id res ipſa exigit; iniquum eſt enim plus ab Arte requirere, quàm rei natura patitur; quamobrem huiuſmodi artificio debemus eſſe contenti eo, vel maximè quòd ſatis perſpicuè tradi videtur; hoc pacto radicis æſtimatio, adeo vt quidquid aliud deſideretur, omnino ſuperuacaneum videatur, idque ſatis exploratum cuique eſſe poteſt, ſi rem paulò diligentiùs introſpexerit. *Docet confugere ad arcuum partitionem.*

Hæc æquatio tres admittit valores, duos quidem veros, alterum autem falſum, ita vt falſus æqualis ſit duobus veris, vt antecedens admittebat duos falſos, & vnum verum duobus falſis æqualem, vt autem æquatio præſens tres commemoratos valores recipiat, neceſſe eſt, cubum è triente plani, ſub quo, & ſub radicis pretio continetur ſolidum affectum multa cubi, neceſſe eſt inquam eſſe minorem quadrato à dimidio numeri abſoluti. *Hæc æquatio tres admittit valores.*

Ex hactenus traditis, neminem præteribit, ne dum ſuperiùs quadraticas æquationes explicatas fuiſſe, ſed etiam cubicas, in quarum tractatione, etſi Veteres multum laboris impenderint, ſuſceptum opus abſoluere minimè potuerunt. Multa nos autem in harum æquationum Arithmetica tractatione congeſſimus, id enim operæ pretium videbatur; argumenti ſiquidem præſtantia non permittebat, vt paucis rem ipſam perſtringeremus, cùm potius exigeret, vt fuſiori calamo illud perſequeremur. *Superiorum commemoratio.*

Et quidem plura adhuc de his in Specioſa, præſertim agentes de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica, nos afferemus in medium; ſiquidem huiuſmodi æquationum explicatio magnum in rebus Geometricis momentum habet. Ex his quandoquidem Artifex difficillimorum Problematum effectiones Geometricas deducit, ita vt mirum ſit quantum hinc Geometria ipſa ſuſceperit incrementum, quantum etiam vniuerſæ Matheſi ſplendor affulſerit, cum alioquin è Veteribus etiam peritiores Artifices, vtpote penitiora Artis minime aſſecuti, difficiliora ſectari, & abſtruſiora perquirere non potuerint. *De æquationũ cubicarũ explicatione multa in 2. huius parte dicenda ſuperſunt quatenus præſertim ipſa ad Geometriam conducunt.*

De ijs quæ ſuperiùs allata fuerunt circa præceptorum demonſtrationes.

CAPVT XXII.

PROXIMVM eſt, vt hic aperiamus in quo poſita ſit vis demonſtrationis, quam ſuperiùs adhibuimus in oſtendenda methodo explicandi cubicas æquationes, quod vt meliùs aſſequi poſſimus, iuuabit rem altiùs repetere; atque adeò demonſtrare methodum explicandæ quadraticæ æquationis: inde enim haud erit difficile intelligere vim cuiuſcumque demonſtrationis ad huiuſmodi genus pertinentis.

Cum autem æquatio fuerit, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine Præceptum erat huiuſmodi.

Præceptum. *Ad quadratum è dimidio coefficientis addatur comparationis homogeneum, ex aggregati autem latere, ſubtrahatur idem coefficientis dimidium: quod enim ſupereſt æquabitur quæſitæ radici.*

Propoſita igitur æquatio ſi fuerit $a^2 - b\,a = z$ pl. cuius æquationis radix iuxta præceptum erit ℞$(\frac{1}{4}b^2 + z$ pl.$) - \frac{1}{2}b$; huiuſmodi æquatio induat hanc formam $a^2 + p\,a = q$, vel $a^2 + p\,a - q = 0$.

Oſtendendum eſt igitur, ſi ad quadratum ex dimidio p, addatur q, & ex aggregato ſumatur latus, ex quo ſubtrahatur idem dimidium, quod ſupereſt æquale eſſe a.

Demonſtratio Sumatur quadratum è dimidio ipſius p, cuiuſmodi eſt $\frac{1}{4}p^2$, cui addatur q, & fiet $\frac{1}{4}p^2 + q$, cuius latus quadratum eſt ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q)$, ex quo ſubtrahatur $\frac{1}{2}p$, vt remaneat ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p$; hoc autem in ſe ductum facit $\frac{1}{2}p^2 + q -$ ℞$(\frac{1}{4}p^4 + p^2 q)$, & hoc erit quadratum ipſius ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p$. Deinde hoc idem ducatur in $+\,p$, vt fiat ℞$(\frac{1}{4}p^4 + p^2 q) - \frac{1}{2}p^2$; quo addito ad quadratum ſuperiùs habitum fiet q.

$$
\begin{array}{r}
℞(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p \\
℞(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p \\
\hline
- ℞(\frac{1}{16}p^4 + \frac{1}{4}p^2 q) + \frac{1}{4}p^2 \\
\frac{1}{4}p^2 + q - ℞(\frac{1}{16}p^4 + \frac{1}{4}p^2 q) \\
\hline
\frac{1}{2}p^2 + q - ℞(\frac{1}{4}p^4 + p^2 q) \\
℞(\frac{1}{4}p^4 + p^2 q) - \frac{1}{2}p^2 \\
\hline
q
\end{array}
$$

Itaque ſi ad quadratum è dimidio ipſius p, addatur q, fiet aggregatum $\frac{1}{4}p^2 + q$, cuius radix quadrata eſt ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q)$ ex qua ſi ſubduxeris dimidium coefficientis nempe $\frac{1}{2}p$, fit reſiduum, nempe ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p$, cuius quadratum aſcito plano, quod fit ex p, in ℞$(\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{1}{2}p$, facit q. Huiuſmodi

di autem intelligitur a, ita vt ſit id, cuius quadratum ad ſcito eo, quod ſit ex ipſo in p, æquale ſit q. Vel etiam.

Quoniam ſi recta fuerit vtcumque diuiſa, quadratum totius, minus rectangulo ſub eadem, & vno ſegmentorum, æquale eſt quadrato alterius ſegmenti, plus rectangulo ſub ipſis ſegmentis; propterea quadratum totius minus rectangulo ſub tota, & vno ſegmentorum æquabitur q. *Propoſitio.*

Tota linea intelligatur $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) \dagger \frac{1}{2}p$, huius quadratum eſt $q \dagger \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) \dagger \frac{1}{2}p^2$. Segmentum autem, quod ductum in totam lineam facit rectangulum, intelligatur p, rectangulum verò erit $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) \dagger \frac{1}{2}p^2$, quo ſubtracto ex quadrato iam dicto, remanet q, cui erat æquale quadratum radicis quæſitæ, plus rectangulo ſub ipſa, & coefficiente data.

Quadratum autem prædictæ totius lineæ, minus rectangulo, ſub tota, & ſub vno ſegmentorum æquale eſt quadrato alterius ſegmenti, plus rectangulo ſub ipſis ſegmentis.

Intelligatur expoſita A B, quæ bifariam in C, diuiſa ſit, & addita ſit B D; ita vt recta C D, poſſit aggregatum quadratorum ex C B, & q. Intelligatur A B, eſſe p, ita vt tam A C, quam C B, ſit $\frac{1}{2}p$; & B D, quidem a intelligatur eſſe $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) - \frac{1}{2}p$; ac proinde C D, erit $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right)$; ducta autem $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) - \frac{1}{2}p$, in p, facit $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \frac{1}{2}p^2$, quo ſubtracto abs q, remanet $q - \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \frac{1}{2}p^2$, quod æquabitur a^2 quadrato ex B D, nempe $\frac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger \frac{1}{4}p^2 q\right)$; ergo cum ſit æquatio $a^2 \dagger p\,a \sqsupset q$, ſi ad $\frac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger \frac{1}{4}p^2 q\right)$ additum fuerit $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \frac{1}{2}p^2$, fiet q; ergo ipſius a radicis valor eſt, vt ſupra enunciauimus $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) - \frac{1}{2}p$; cum huius quadratum $\frac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right)$, auctum rectangulo $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \frac{1}{2}p^2$, repræſentato per $p\,a$, æquale ſit q. *Demonſtratio*



Si autem fuerit æquatio, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, præceptum erat huiuſmodi.

Ad quadratum è dimidio coefficientis longitudinis addatur comparationis homogeneum, aggregati autem lateri addatur idem dimidium, quod enim fit aggregatum æquabitur æquationis propoſitæ quæſitæ radici. *Præceptum.*

Propoſita igitur æquatio ſit $a^2 - b\,a \sqsupset z$ pl. cuius radix iuxta præceptum eſt $\text{℞}\left(\frac{1}{4}b^2 \dagger z\,pl.\right) \dagger \frac{1}{2}b$, huiuſmodi autem æquatio induat hanc formam $a^2 - p\,a \sqsupset q$, ſeu $a^2 - p\,a - q \sqsupset 0$.

Oſtendendum eſt igitur ſi ad quadratum è dimidio p, addatur q, & aggregati lateri addatur idem dimidium ipſius p, quod prouenit æquale eſſe a.

Sumatur quadatum è dimidio ipſius p, cuiuſmodi eſt $\frac{1}{4}p$, & huic addatur q, aggregati autem latus eſt $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right)$, huic ſi additum fuerit $\frac{1}{2}p$, proueniet $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) \dagger \frac{1}{2}p$, cuius quadratum eſt $\frac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger \text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right)$; intelligatur autem duci $\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^2 \dagger q\right) \dagger \frac{1}{2}p$ in $-p$, & proueniet $-\text{℞}\left(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \frac{1}{2}p^2$. Hoc autem addito ad quadratum ſuperiùs habitum, proueniet q.

Itaque

$$
\begin{array}{r}
℞\left(\tfrac{1}{4}p^2 \dagger q\right) \dagger \tfrac{1}{2}p \\
℞\left(\tfrac{1}{4}p^2 \dagger q\right) \dagger \tfrac{1}{2}p \\
\hline
℞\left(\tfrac{1}{16}p^4 \dagger \tfrac{1}{4}p^2 q\right) \dagger \tfrac{1}{4}p^2 \\
\tfrac{1}{4}p^2 q \dagger ℞\left(\tfrac{1}{16}p^4 \dagger \tfrac{1}{4}p^2 q\right) \\
\hline
\tfrac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger ℞\left(\tfrac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) \\
℞\left(\tfrac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q\right) - \tfrac{1}{2}p^2 \\
\hline
q
\end{array}
$$

Itaque ſi ad quadratum è dimidio ipſius p addatur q, fiet aggregatum, nempe ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q)$ cui ſi addideris dimidium coefficientis nempe $\frac{1}{2}p$, fiet aggregatum, nempe ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q) \dagger \frac{1}{2}p$, cuius quadratum multatum plano, quod fit ex p, in ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q) \dagger \frac{1}{2}p$, facit q. Huiuſmodi autem intelligitur a, ita vt ſit id, cuius quadratum multatum plano, quod fit ex ipſo in p, æquale ſit q.

Demonſtratio. Intelligatur expoſita A B, bifariam in C, diuiſa, & ei addita ſit B D, ita vt C D, poſſit aggregatum quadratorum ex C D, & q. Intelligatur A B, eſſe p, itaut tam A C, quàm C B, ſit $\frac{1}{2}p$; at vero A D, quidem a, ſit ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q) \dagger \frac{1}{2}p$;



Quadratum verò ex A D, nempe ex ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q) \dagger \frac{1}{2}p$, eſt $\frac{1}{2}p^2 q \dagger q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q)$, quod æquabitur rectangulo D A B, nempe ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q) \dagger \frac{1}{2}p^2$, repræſentato per $p\,a$, vna cum q; eſt autem æquatio $a^2 - p\,a = q$; quamobrem ex $\frac{1}{2}p^2 q \dagger q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q)$, ſubtrahatur ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q) - \frac{1}{2}p^2$, & remanebit q, radicis igitur a, valor eſt ℞ $(\frac{1}{4}p^2 \dagger q) \dagger \frac{1}{2}p$, ſiquidem cum ex eius quadrato $\frac{1}{2}p^2 \dagger q \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q)$, ſi dempſeris ℞ $(\frac{1}{4}p^4 \dagger p^2 q) - \frac{1}{2}p^2$, repræſentatum per $p\,a$, remanet q.

Quod ſi æquatio fuerit, in qua planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati; præceptum erat huiuſmodi.

Præceptum. *A quadrato è dimidio coefficientis longitudinis auferatur comparationis homogeneum, reſidui autem latus additum, vel ſubductum eidem dimidio propoſitæ æquationis radicem exhibet.*

Propoſita igitur æquatio ſi fuerit $b\,a - a^2 = z\,pl.$ cuius æquationis radix iuxta præceptum erit $\frac{1}{2}b \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}b^2 - z\,pl.)$ vel $\frac{1}{2}b -$ ℞ $(\frac{1}{4}b^2 - z\,pl.)$; huiuſmodi æquatio induat hanc aliam formam $p\,a - a^2 = q$, vel $p\,a - a^2 - q = 0$.

Oſtendendum eſt igitur ſi ex quadrato è dimidio p, ſubtrahatur q, reſidui autem latus addatur eidem dimidio, vel ex eodem ſubtrahatur, aggregatum, vel reſiduum æquari a.

Demonſtratio. Sumatur quadratum è dimidio ipſius p, cuiuſmodi eſt $\frac{1}{4}p^2$, ex quo ſubtrahatur q, & fiet $\frac{1}{4}p^2 - q$, cuius latus eſt ℞ $(\frac{1}{4}p^2 - q)$ quod addatur ad $\frac{1}{2}p$, & fiet $\frac{1}{2}p \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}p^2 - q)$, vel ab eodem $\frac{1}{2}p$, ſubtrahatur, & remanebit $\frac{1}{2}p -$ ℞ $(\frac{1}{4}p^2 - q)$.

Si autem $\frac{1}{2}p \dagger$ ℞ $(\frac{1}{4}p^2 - q)$ ducatur in ſe quadraticè, proueniet.

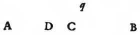
$$\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$$
$$\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$$
$$\text{℞}\,(\tfrac{1}{16}\,p^4 - \tfrac{1}{4}\,p^2 q) \dagger \tfrac{1}{4}\,p^2 - q$$
$$\tfrac{1}{4}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{16}\,p^4 - \tfrac{1}{4}\,p^2 q)$$
$$\tfrac{1}{4}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q) \dagger \tfrac{1}{4}\,p^2 - q$$
$$\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q) - q.$$

Itaque quadratum ex $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$ erit $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q) - q$, quod eſt ſubtrahendum ex $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, quod eſt productum ex $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$ radicis pretio, in p, factaque ſubtractione, habito reſpectu ſignorum †, & —; remanet q. Eſt igitur $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$, radicis pretium æquationis propoſitæ; quandoquidem ſi ducatur in p, datam quantitatem, fit planum, ex quo ſi ſubtrahatur eiuſdem quadratum, remanet q, quantitas data.

Nec diſſimiliter demonſtrationem contexemus, ſi ſit radix altera; puta minor, quemadmodum eſt $\tfrac{1}{2}\,p - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$, etenim huius quadratum eſt $\tfrac{1}{2}\,p^2 - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q) - q$, ſubtrahendum ex $\tfrac{1}{2}\,p^2 - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, productum ex $\tfrac{1}{2}\,p - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$, in p, datam quantitatem; factaque ſubtractione remanet q. Itaque radicis pretium erit $\tfrac{1}{2}\,p - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$, ſiquidem eius quadratum, ſi ſubtrahatur ex $\tfrac{1}{2}\,p^2 - \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, remanet q. *Cum radix minor fuerit.*

Demonſtratio

Intelligatur expoſita A B, bifariam in C, diuiſa, & non bifariam in D; itaut D C, poſſit differentiam inter quadratum C B, & q. Intelligatur autem A B, eſſe p; itaut tàm A C, quàm C B, ſit $\tfrac{1}{2}\,p$; at verò D B, quidem a; ſit $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$ quadratum autem ex D B, nempe ex $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^2 - q)$ eſt $\tfrac{1}{4}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q) \dagger \tfrac{1}{4}\,p^2 - q$, ſeu $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, nempe $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, repræſentato per $p\,a$, minus tamen q; eſt autem æquatio $p\,a - a^2 = q$, proinde ex $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,(\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q)$, ſubtrahatur $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q] - q$, ſcilicet quadratum ex $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,p^2 - q]$, & remanebit q. Radicis igitur a, valor eſt $\tfrac{1}{2}\,p \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,p^2 \dagger q]$, ſiquidem eius quadratum, puta $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q] - q$, ſi ſubducatur ex $\tfrac{1}{2}\,p^2 \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,p^4 - p^2 q]$, repræſentato per $p\,a$, remanet q.



Non diſſimili artificio procedendum erit in demonſtrandis ijſdem rebus, cùm radix minor extiterit. In hoc igitur non amplius immorabimur.

Accedamus nunc ad æquationes cubicas. Cum igitur fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano præceptum erat huiuſmodi. *Cubicarum æquationum demonſtrationes.*

Sumatur cubus tertiæ partis coefficientis plani, ſiue numeri Radicum iſque addatur quadrato è dimidio comparationis homogenei, ſiue numeri abſoluti, ex aggregato autem ſumatur latus, cui additum vel ſubtractum, prædictum dimidium, gignit Binomium, & Apotomen; ſi itaque latus cubicum Apotomes ſubtrahatur ex latere cubico Binomij, reſiduum repræſentabit lateris, ſiue radicis pretium. *Præceptum.*

Propoſita igitur æquatio ſi fuerit $a^3 \dagger b^2 a = b^2 d$, ita vt tranſmutata induat hanc formam $a^3 = * - p\,a \dagger q$, eius radix dicebatur $\text{℞}\,C\,(\dagger \tfrac{1}{2}\,q \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,q^2 \dagger \tfrac{1}{27}\,p^3]$ $- \text{℞}\,C\,[-\tfrac{1}{2}\,q \dagger \text{℞}\,[\tfrac{1}{4}\,q^2 \dagger \tfrac{1}{27}\,p^3]$.

Oſtendendum eſt igitur, quod ſuperiùs præcepimus.



Expoſita ſit A C, quæ intelligatur valere $\text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$; at verò diuiſa cum ipſa ſit A C, in B, intelligatur B C, valere $\text{℞}\, C\,[- \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$. Huius autem ex illa facta ſubtractione remanebit A B, nempe $\text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3] - \text{℞}\, C\,[- \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$.

Demonſtratio Quoniam igitur ſi à cubo ex A C, auferatur cubus ex B C, vnà cum triplo producto rectarum A C, B C, A B, remanet cubus ex A B, cubus ex A C eſt $\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$; at verò cubus ex B C, eſt $- \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, ſubtractione autem facta remanebit pro ipſorum differentia q, à quo ſubducendum eſt triplum productum ipſarum A C, B C, A B, vt remaneat cubus ex A B. Triplum autem productum illud ſic habetur. Ducatur A B, nempe $\text{℞}\, C\,[\frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, ducatur inquam in B C, nimirum $\text{℞}\, C\,[- \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, & fiet productum $\frac{1}{3} p$, cuius triplum erit p, quo ducto in A B, ſcilicet $\text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3] - \text{℞}\, C - \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, fiet productum $\text{℞}\, C\,[\dagger p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3] - \text{℞}\, C\,[- p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$ quo ſubtracto ex q, remanebit $q - \text{℞}\, C\,[\dagger p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3] - \text{℞}\, C\,[- p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, quod æquabitur cubo ex A B, cui ſi addatur triplum productum rectarum A C, B C, A B, nempe $\text{℞}\, C\,[\dagger p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3] - \text{℞}\, C\,[- p^3 \frac{1}{2} q \dagger p^3 \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, fiet ſumma, ſiue aggregatum q; æquationis igitur propoſitæ $a^3 = * - p\,a \dagger q$, radix a, eſt ſuperiùs dicta, nempe $\text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3 - \text{℞}\, C\,[- \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3]$, ſiquidem eius cubus affectus adiunctione ſolidi ſub latere iamdicto, & coefficiente plano p, hoc eſt affectus adiunctione tripli producti rectarum A C, B C, A B, quod quidem triplum productum repræſentatur per $p\,a$, æqualis eſt q. Id autem oportebat oſtendere.

Cum autem æquatio fuerit, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano. Præceptum erat huiuſmodi.

Præceptum. *Sumatur cubus tertiæ partis numeri radicum, iſque ſubtrahatur à quadrato numeri abſoluti, & ex reſiduo ſumatur latus, quod additum, vel ſubtractum à dimidio numeri abſoluti Binomium gignit, & Apotomen, horum autem latera cubica inuicem coniungantur, ſumma enim lateris valorem repræſentabit.*

Propoſita igitur æquatio ſi fuerit $a^3 - b^2 a = b^2 d$, tranſmutata verò induat hanc formam $a^3 = * \dagger p\,a \dagger q$, eius radix dicebatur $\text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3] \dagger \text{℞}\, C\,[\dagger \frac{1}{2} q - \text{℞}\,[\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$.

Oſtendendum eſt igitur, quod ſuperiùs præcepimus.



Expoſita ſit A C, cuius pars A B, intelligatur valere $\text{℞}\, C\,(\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\, C\,(\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{27} p^3)$. At verò pars altera B C, intelligatur eſſe $\text{℞}\, C\,(\dagger \frac{1}{2} q - \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$.

Demonſtratio Quoniam igitur A C, conſtat ex partibus A B, B C, hæ verò ſunt $\text{℞}\, C\,(\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$, & $\text{℞}\, C\,(\dagger \frac{1}{2} q - \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$, ipſa quidem A C, erit $\text{℞}\, C\,(\dagger \frac{1}{2} q \dagger \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3) \dagger \text{℞}\, C\,(\frac{1}{2} q - \text{℞}\,(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)$, nempe æquationis radix, videlicet, a; quamobrem A C, æquatur, a, cuius cubus eſt a^3, à quo ſi auferatur triplum productum linearum A B, B C, & a, remanebunt cubi linearum A B, B C, qui ſimul ſumpti æquantur q. Triplum enim productum rectarum A B, B C, & A C, ſiue, a, plus cubis rectarum A B, B C, æquatur cubo ex A C, ſeu, a; quare ſi à cubo ex A C, ſiue, a, nempe ab a^3 auferamus triplum pruductum ipſarum A B, B C, &, a, remanebunt cubi linearum A B, B C, qui ſimul ſumpti ſunt æquales q. At verò productum ex A B, in B C, eſt $\text{℞}\, C\,(\frac{1}{27} p^3)$, ſiue $\frac{1}{3} p$, vt patet ex opere multiplicationis. Si enim $\dagger \text{℞}\,(\frac{1}{4}$

$q^2 -$

$q^2 - \frac{1}{27}p^3$), ducatur in − ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$), ob ſigna ✱, & −, fiet productum $-\frac{1}{4}q^2$ † $\frac{1}{27}p^3$; multiplicata verò vtraque radice per † $\frac{1}{2}q$, euaneſcent producta ob ſigna ✱, & −, & remanet † $\frac{1}{2}q$, in ſe ducendum, vt fiat $\frac{1}{4}q^2$, quo addito ad $-\frac{1}{4}q^2$ † $\frac{1}{27}p^3$, fiet ſumma ℞ C ($\frac{1}{27}p^3$), atque hoc erit totum productum ex iam dicta multiplicatione, ſeu quod idem eſt $\frac{1}{3}p$, cuius triplum eſt p, quo ducto in a.

Hoc eſt in ℞ C († $\frac{1}{2}q$ † ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$) † ℞ C († $\frac{1}{2}q$ − ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$), fit ℞ C († p^3 $\frac{1}{2}q$ † p^3 ℞ ($\frac{1}{4}q^2$ † $\frac{1}{27}p^3$) − ℞ C († p^3 $\frac{1}{2}q$ − p^3 ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$), æquale quidem triplo producto ipſarum A B, B C, A C; quia verò ſupponitur a^3, minus huiuſmodi triplo producto æqualis cubis ipſarum A B, B C, ſiquidem hi æquales erant q; propterea a^3 æquabitur triplo producto iam dicto vnà cum q, nempe ℞ C († $\frac{1}{2}q$ † ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$) † ℞ C († $\frac{1}{2}q$ − ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$) † q. At ſi ex hoc abſtuleris ℞ C († $\frac{1}{2}q$ † ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$) † ℞ ($\frac{1}{2}q$ − ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$), remanet q. Æquationis igitur propoſitæ a^3 = ✱ † $p\,a$ † q, radix a, eſt ſupradicta, nimirum ℞ C († $\frac{1}{2}q$ † ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$) † ℞ C († $\frac{1}{2}q$ − ℞ ($\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$;) ſiquidem eius cubus affectus multa ſolidi ſub latere iam dicto, & plano p, coefficiente, hoc eſt triplo producto ipſarum A B, B C, A C, (quod quidem triplum productum repræſentatur per $p\,a$) æqualis eſt q.

Si denique fuerit æquatio, in qua Solidum ſub latere, datoque coefficiente plano afficitur multa cubi. Præceptum erat huiuſmodi.

Primò numerus abſolutus ſigno − abiecto, aſſumat ſignum ✱, ita enim proueniet æquatio, in qua cubus æqualis eſt R ✱ numero, ſeu quod idem eſt cubus minus R, æqualis numero, iuxta hanc autem æquationem tranſmutatam reperiatur radicis valor. Præceptum.

Secundò à quadrato lateris inuenti per æquationem tranſmutatam ſubtrahatur numerus radicum; reſiduum verò ſeruetur.

Tertiò à quadrato dimidij lateris inuenti per tranſmutatam æquationem ſubtrahatur reſiduum ſeruatum. Si enim huius vltimi reſidui latus addatur, vel ſubtrahatur à dimidio lateris inuenti per tranſmutatam æquationem ſumma, vel reſiduum repræſentabit valorem lateris vtriuſque nempe lateris maioris, & minoris. Huius enim vtpotè ambiguæ æquationis duplex eſt latus, nimirum maius, & minus.

Hæc autem vt oſtendantur, ſupponendum eſt illud, nimirum æquationem cubicam inuerſè negatam in negatam directè tranſmutari poſſe, quandocumque æquatio ipſa propoſita diuiſionis beneficiò ad quadraticam reduci queat; itaque ſi fuerit E. G, 109 R − 1 C = 420, ſeu 109 R − 1 C − 420 = 0; quæ diuiſibilis eſt per 1 R − 5, per 1 R − 7, & per 1 R † 12, huius æquationis radices veræ ſunt 5, & 7, falſa autem eſt 12, aggregatum ex 5, & 7, hæc vero æquatio, quæ eſt indirectè, negata transformatur in aliam, quæ eſt negata directè, cuiuſmodi eſt 1 C − 109 R = 420, ſeu 1 C − 109 R − 420 = 0, huius autem æquationis radices ſunt falſæ 5, & 7, vera autem eſt 12, quod etiam licebit obſeruare in alijs omnibus ſimilibus æquationibus, idq; facilè etiam demonſtrari poterit. Explicatio.

Cum igitur æquatio illa 1 C − 109 R ✱ 420 = 0, ad hanc fuerit reuocata 1 C − 109 R − 420 = 0. Ex hac extrahenda eſt radix diuiſionis præſidio; ſi enim diuidatur per 1 R ✱ 7, proueniet 1 Q − 7 R − 60 = 0; huius porro æquationis radix eſt 12; itaque cubicæ æquationis 1 C − 109 R − 420 = 0, radix erit 12, cuius quadratum eſt 144, à quo ſi dempſeris radicum numerum 109, remanebit 35, quem ſi ſubduxeris ex 36, quadrato dimidij radicis inuentæ ex tranſmutata æquatione, remanebit 1, cuius radix quadrata eſt 1, hac autem addita ad 6, dimidium prædictum, fit 7, & ex eodem dimidio ſubtracto itidem 1, remanebit 5: itaque 5, & 7, erunt radices æquationis initio propoſitæ 1 C − 109 R ✱ 420 = 0.

His animaduerſis; Hoc pacto nos oſtendemus intentum.

Sit

Demonſtratio

Sit numerus A, minus B, minus C, æqualis o; qui ductus in D, plus E, producat F, minus G, minus H, æqualem o; etiam diuiſo F, minus G, minus H, per D, plus E, orietur A, minus B, minus C, æqualis o.

$$\begin{array}{c} A \quad\quad B \quad\quad C \\ 144 - 84 - 60 = 0 \\ D \text{ plus } E \\ 5 + 7 \\ F \quad\quad\quad G \quad\quad\quad H \\ 1728 - 1308 - 420 = 0. \end{array}$$

Quod ſi A, eſt quadratum ipſius D, plus E, certè, & F, erit cubus eiuſdem; & ſi D, plns E, ductus in E, numerum producit B; profecto G, proueniet ex multiplicatione numeri orientis ex additione C, ad quadratum ex E, in D, plus E.

Quod ſi denique C, eſt differentia inter A, & B, ducto E, in C, fiet differentia inter F, & G. Quamobrem diuiſa æquatione, in qua poteſtas eſt cubus, prou enit æquatio, in qua poteſtas eſt quadratum; & vt erat cubus affectus negatè ſub latere; ita fit cnbus negatè affectus ſub eodem gradu. Et vtriuſque æquationis eadem eſt radix vera. Quapropter cubica æquatione diuiſa per 1 R, cuius valor eſt vna ex radicibus falſis cubicæ æquationis, plus numero, qui eſt altera itidem falſa radix, fit æquatio quadratica, cuius radix inuenta propoſitę cubicæ æquationis ſatisfacit.

Hoc igitur pacto licet oſtendere præceptum, quo propoſita, de qua diſſeritur ę quatio cubica explicatur. Neque eſt, cur hìc nos amplius perſiſtamus. Supereſt, vt gradum faciamus ad alia, quæ ſequuntur.

Rurſus demonſtrantur, quæ ſuperiús allata fuerunt.

CAPVT XXIII.

Operæ pretiũ eſt inire quãdam generalẽ rationem demonſtrandi præcepta æquationum explicandarum.

HVCVSQVE præcepta ad æquationes explicandas à nemine generaliter demonſtrata fuerunt. Siquidem ea, quibus docemur quadraticas æquationes explicare Geometricè fuerunt oſtenſa, quod etiam nos pluribus modis præſtitimus; Sed Canones explicandarum æquationum altioris ordinis, cuiuſmodi ſunt cubicæ, tùm affectæ ſub latere tantùm, cùm, & ſub latere, & quadrato, ita etiam, & aliæ, vel ſine demonſtratione traditæ ſunt, vel infeliciter oſtenſæ, vnde videbatur operæ pretium rationem quandam nouam demonſtrationis inire, ſatis conſentaneam argumento, de quo diſſeritur; huiuſmodi porrò viſum eſt Arithmeticæ demonſtrationis genus, cùm hæc prima pars Analytices in numerorum contemplatione verſetur.

Quamuis autem ad quadraticas æquationes quod attinet, quiſque iure poſſit eſſe contentus, ijs, quibus ſupra in oſtendenda veritate vſi ſumus, tamen vt idem demonſtrationis genus ijs accommodemus, quo vtimur in alijs altioris ordinis æquationibus, non alienum hìc ab inſtituto nos duximus eodem modo Arithmeticè nimirum Canones explicandarum æquationum quadraticarum oſtendere.

Cum autem æquatio huiuſmodi eſt, vt in ea quadratum afficiatur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, communis Antiquorum methodus erat huiuſmodi.

Præceptum.

Quadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus, ſeu comparationis homogeneum, ex huius aggregati latere ſubtrahatur dimidium numeri radicum, etenim reſiduum erit lateris, ſeu radicis pretium.

Id autem adiuncto Theoremate demonſtrare licebit.

THEOREMA.

SINT numeri A, B; & quidem ipſius A, latus quadratum ſit C, in quem ductus B, faciat D, quo addito ad A, faciat E; deinde ad E, addatur F, quadratum ex I, dimidio ipſius B, & aggregatum ſit G, cuius latus quadratum ſit H, ex quo detractum I, dimidium ipſius B, relinquat K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe C.

Intelligatur B, diuiſo bifariam, additus C.

A	B	E	G
16	10	56	81
C	D	F	H
4	40	25	9
	I		
	5		
	K		
	4		

Quandoquidem B, diuiſus eſt bifariam, & ei additus eſt C, erit [a] planum ſub B, plus C, in C, vnà cum quadrato I, dimidij B, æquale quadrato, quod fit ex I, plus C; productum autem à B, plus C, in C, æquale eſt [b] aggregato ex D, & A, [planum enim ex C, in B, æquale eſt D, vt ſupponimus, quemadmodum C, qui ſupponitur additus ad B, eſt latus quadratum ipſius A,] ergo quadratum ex I, dimidio B, nimirum F, plus aggregato ex A, & D, æquale erit quadrato ex I, dimidio B, vna cum C, hoc eſt ex aggregato quod fit ab I, dimidio B, & C; ſed E, eſt æqualis A, plus D, ergo quadratum aggregati quod fit ex I, & C, æquabitur E, plus F, quadrato dimidij B; quare quadratum aggregati ex I, & C, æquale erit E, plus F; hoc eſt æquale erit G; quamobrē eorum latera erunt inter ſe æqualia; ob id I, dimidium ipſius B, plus C ęquabitur H. Si autem vtrinque auferatur dimidium B, cuiuſmodi eſt I, remanebunt æquales C, & K. Quod erat operæ pretium oſtendere.

a Per ea, quæ oſtenduntur ad Schol. 14. 9. Elemen.

b Per ea, quæ oſtenduntur ad Schol. 14. 9. Elemen.

Cum autem æquatio eſt, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine iuxta communem Antiquorum methodum præceptum erat huiuſmodi.

Præceptum.

Quadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus ſeu comparationis homogeneum; nam ſi aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, ſumma lateris valorem exhibebit.

Id autem adiuncto Theoramate demonſtrabitur.

THEOREMA.

SINT numeri A, B, & quidem ipſius A, latus quadratum ſit C; at verò ex C, in B, fiat D; differentia autem inter A, & D, ſit E; quadratum verò ex I, dimidio B, ſit F, quo addito ad E, fiat G, cuius latus quadratum ſit H, cui addito I, dimidio ipſius B, fiat K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe C.

A	B	E	G
64	6	16	25
C	D	F	H
8	48	9	5
	I		
	3		
	K		
	8		

Quandoquidem C, eſt latus quadratum numeri A, & ex B, in C, fit D; eſtq; E, differentia inter A, & D; ergo planum ſub C, & exceſſu, quo C, ſuperat B, æquabitur [a], E; Quia verò B, ſupponitur bifariam diuiſus; ſi ei intelligatur additus exceſſus, quo C, ſuperat B; planum ſub C, & prædicto exceſſu, plus quadrato ex I, dimidio ipſius B, erit [b], æquale quadrato aggregati ex I, dimidio B, & prædicto exceſſu; eſt autem F, quadratum ab I, dimidio B, quo addito ad E, prouenit G; ergo planum ſub C, & exceſſu prædicto, vnà cum F, quadrato ab I, dimidio B, æquale erit G; quare, & eorū latera æqualia erunt: eſt autē ipſius G, latus quadratum H; ergo I, dimidiū ipſius

a Per ea, quæ oſtenduntur ad Schol. 14. 9. Elemen.

b Per ea, quæ oſtenduntur ad Schol. 14. 9. Elemen.

B, plus

B, plus exceſſu, quo C, ſuperat B, æquabitur H; Vtriq; addito I; nempe dimidio B, fiet dimidium B, bis, hoc eſt integrum B, plus exceſſu, quo C, ſuperat B, hoc eſt fiet C, æqualis H, plus I. Sed H, plus I, eſt K, ergo C, æquabitur K. Quod oportebat oſtendere.

Cum autem æquatio fuerit, in qua quadratum negatur, de plano ſub latere, dataque coefficiente longitudine, præceptum iuxta communem Antiquorum methodum erat huiuſmodi.

A quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus abſolutus; etenim ſi radix quadrata reſidui addatur dimidio numeri radicum, vel ex hoc dimidio ſubtrahatur radix ipſa; duplex ſe offerre latus comperiemus; Præceptum.

Idem autem adiuncto Theoremate demonſtrabimus.

THEOREMA.

SINT numeri A, B, & quidem ipſius A, latus quadratum ſit C, maius dimidio ipſius B; at verò ex C, in B, fiat D, differentia autem inter D, & A, ſit E; quadratum ex I, dimidio B, ſit F; à quo ſubtracto E, remaneat G; cuius latus quadrutum ſit H; quo addito ad I, dimidium ipſius B, fiat K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe C.

Demonſtratio

A		B		E		F		G
64		12		32		36		4
	C		D		E		H	
	8		96		32		2	
				I				
				6				
				K				
				8				

Quandoquidem C, eſt latus quadratum numeti A, atque ductus in B, producit D, ex hypotheſi; ergo D, minus A, æquabitur plano abs B, minus C, in C. Sed eſt E, æqualis D, minus A, ex hypotheſi; ergo planum abs B, minus C, in C, æquabitur E; at verò ſi E, ſubducatut F, quadrato I, dimidij B, remanet G; ergo ſi ex F, ſubtrahatur planum abs B, minus C, in C, reſiduum æquabitur G. Sed ſubtracto plano abs B, minus C, in C, ex quadrato I, dimidij B; remanet quadratum intermediæ ſectionis; cum B, ſit per æqualia diuiſus, & per inæqualia, vt 2. Per ea, quæ oſtenduntur in Scholio ad 14. 9. Elem.
vna, nempe maior ex partibus inæqualibus ſit C; ergo quadratum intermediæ ſectionis iam dictæ æquabitur G; quamobrem eorum latera æqualia erunt; vnde H, latus quadratum ipſius G, æquabitur intermediæ ſectioni iam dictæ, ſed intermedia ſectio addita ad I, dimidium B, facit C, eſt enim C, maior pars è duabus inæqualibus ex hypotheſi, & H, additus ad idem dimidium facit K; ergo C, & K, erunt inter ſe æquales; Quod etat operæ pretium oſtendere.

Non diſſimiliter procedendum erit in demonſtratione contexenda pro radice minori, hactenus enim de maiori locuti ſumus.

Nunc autem ad æquationes cubicas faciemus gradum.

Cum fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano. Præceptum erat huiuſmodi.

Cubus tertiæ partis numeri radicum addatur quadrato dimidij numeri abſoluti, aggregati autem ſumatur latus, cui additum, vel ſubtractum dimidium numeri abſoluti, gignit Binomium, & Apotomen. Si itaque latus cubicum ipſius Apotomes ſubtrahatur a latere cubico Binomij, reſiduum erit quæſita radicis pretium. Præceptum.

Id autem ex adiuncto Theoremate perſpicuum fiet.

THEOREMA.

SINT numeri A, B, & quidem ipſius A, latus cubicum ſit C; at verò ex C, in B, fiat D; aggregatum autem ex A, & D, ſit E, cubus ex S, tertia parte ipſius B, ſit F, & quadratum ex dimidio E, nempe L, ſit R; ex vtroque verò aggregatum ſit G, cuius latus quadratum ſit H; aggregatum ex L, & H, ſit M, cuius latus cubicum ſit N; differentia verò inter H, & L, ſit O, cuius latus cubicum ſit P; differentia autem inter N, & P, ſit K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe C.

A	D	E	L	R	
1000	720	1720	860	739600	
C	B	S	F	G	
10	72	24	13824	753424	
M	O	H	N	P	K
1728	8	868	12	2	10

Præmittendũ primò. Præmittendum eſt primò.

Cubus differentiæ laterum plus triplo producto ſub ipſis lateribus, æqualis eſt differentię cuborum à lateribus.

Præmittendum ſecundò.

Præmittendũ ſecundò. Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano; huius æquationis radix eſt differentia duorum laterum, è quibus qui fiunt cubi, differunt per comparationis homogeneum. At verò ſub illis productum tertia pars eſt coefficientis plani.

Præmittendũ tertiò. Præmittendum tertiò.

Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, cubus autem è triente plani coefficientis addatur ad quadratum è dimidio comparationis homogenei, fit id, cuius latus quadratum additum, & ſubtractum à prædicto dimidio, facit ea, quorum latera cubica ſunt illa ſub quibus tertia pars coefficientis plani continetur.

Explicatio prima. Vt ſi ſit 1 C ✠ 62 R ⊐ 1720. Cubus è 24, triente ipſius coefficientis plani 72, eſt 13824, qui additus ad 860, dimidium 1720, comparationis homogenei, facit 754424, cuius radix quadrata eſt 868, quæ addita ad 860, dimidium prædictum facit 1728, cuius latus cubicum eſt 12, latus nempe maius, è duobus, ſub quibus continetur 24, triens plani coefficientis; aliud antem eſt 2, latus 8, reſidui.

Explicatio ſecunda. Item ſit 1 C ✠ 12 R ⊐ 112. Cubus è 4, trientis coefficientis plani eſt 64, qui additus ad 56, dimidium ipſius 112, comparationis homogenei facit 3200, cuius radix quadrata eſt ℞ 3200, cui ſi addideris 56, dimidium prædictum, fit ℞ 3200 ✠ 56, cuius radix cubica eſt ℞ C (℞ 3200 ✠ 56), reſidui radix cubica erit ℞ C (℞ 3200 — 56), qua ſubtracta ex illa, remanet ℞ C (℞ 3200 ✠ 56) — ℞ C (℞ 3200 — 56), pro radice ipſius æquationis.

Sed Binomij radix expreſſibilis eſt, vt, & Reſidui; etenim cubus contentus in 56, ita vt ſubtractus relinquat numerum diuiſibilem in tres partes ſine fractione, ac idoneus ad id, de quo agimus, erit 8, qui ſubtractus relinquit 48, cuius tertia

pars

pars eſt 16, hoc autem diuiſo per 2, latus cubicum ipſius 8, fit 8, cuius latus quadratum eſt ℞ 8, cui addito 2, iam dicto fit ℞ 8 † 2, Binomij latus cubicum, vt, & Reſidui eſt ℞ 8 — 2. Horum autem differentia erit 4. Itaque propoſitæ æquationis radix eſt 4. Eſt autem idem 4, tertia pars ipſius plani coefficientis; quæ fit ex multiplicatione ℞ 8 † 2, in ℞ 8 — 2, ex hac enim multiplicatione fit 4, & horum laterum differentia eſt etiam 4.

Cæterùm cubus è ℞ 8 † 2, eſt ℞ 3200 † 56, & è ℞ 8 — 2, eſt ℞ 3200 — 56, horum autem differentia eſt 112, nempe comparationis homogeneum æquationis propoſitæ.

Item ſit æquatio 1 C † 18 R = 324; cuius radix eſt 6. Quandoquidem triens coefficientis plani eſt 6, cuius cubus eſt 216, qui additus ad 26244, quadratum ex 162, dimidio ipſius comparationis homogenei 324, facit 26460, cuius radix quadrata eſt ℞ 26460, cui ſi addideris 162, dimidium prædictum, fit ℞ 26460 † 162, cuius radix cubica eſt ℞ C (℞ 26460 † 162), Reſidui radix cubica ex ℞ C (℞ 26460 — 162), qua ſubtracta ex ipſa Binomij radice cubica, remanet ℞ C (℞ 26460 † 162) — ℞ C (℞ 26460 — 162), Sed tam Binomij, quàm Reſidui radix cubica expreſſibilis eſt; cubus enim contentus in 162, eſt 27, qui ſubtractus ex 162, relinquit 135, cuius tertia pars eſt 45, qua diuiſa per 3, radicem cubicam ipſius 27, fit 15, cnius radix quadrata eſt ℞ 15, cui ſi addideris 3, fit ℞ 15 † 3, radix Binomij, propoſiti vt ℞ 15 — 3, radix Apotomes, horum autem radicum differentia eſt 6, radix æquationis propoſitæ. Si verò ℞ 15 † 3, ducatur in ℞ 15 — 3, fit productum 6, nempe tertia pars coefficientis plani.

Cæterùm cubus è ℞ 15 † 3, eſt ℞ 26460 † 162; & è ℞ 15 — 3, eſt ℞ 26460 — 162. Horum autem differentia eſt 1324, comparationis homogeneum æquationis propoſitæ.

Vt autem hæc oſtenderemus multa ſuperiùs attulimus. At verò, cum ferax ſit campus, non pigebit alia multa ſubijcere; quamobrem proximum eſt vt explicemus, qua Arte idem præceptum oſtendi poſſit, quod Analyticè primùm; deinde Arithmeticè præſtare tentabimus, in cuius gratiam ſubſequentia hæc præmittuntur Lemmata, è quibus demonſtratio ipſa deriuatur.

Illud porrò ſilentio præterire non licet hæc eadem oſtendi poſſe, quod ſuperiùs tetigimus Geometrica ratione; ſi tamen in ipſa Geometria vnitatis vſus permittatur. Hæc tamen iuuabit in ſecundam huius operis partem differre, vbi opportuna ſe ſe offeret occaſio, cùm aggreſſi erimus argumentum non ignobile dè Reſolutione, & Compoſitione, ab his igitur hoc in loco abſtinendum, cum in Arithmeticis verſemur, quorum conſideratio, & ſi plurimum è Geometricis illuſtretur, tamen cum alibi, vt dicebamns hac de re ſermo ſit rediturus, propterea ſilentio hæc in preſentiarum iuuabit inuoluere.

Geometricè etiā hæc oſtendi poſſunt vnitatis vſu.

LEMMA. I.

Qvod aſſumpſimus primò illud erat.

Cubus differentia laterum plus triplo producto ſub ipſis lateribus, æqualis eſt differentia cuborum à lateribus.

Id autem ſic oſtenditur.

Latus

Digitized by Google

Demonſtratio Latus maius ſit b, & minus ſit d, ita vt differentia ipſorum ſit $b - d$, cubus ex differentia eſt $b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - d^3$. At verò ſolidum triplum ſub plano b d, & differentia $b - d$, eſt $3 b^2 d - 3 b d^2$, quo addito ad cubum prædictum, fiet $b^3 - d^3$, ergo cubus differentiæ laterum, plus triplo producto ſub lateribus, æqualis eſt differentię cuborum à lateribus.

$$\begin{array}{r} b - d \\ b - d \\ \hline b^2 - 2 b d + d^2 \\ b - d \\ \hline - b^2 d + 2 b d^2 - d^3 \\ b^3 - 2 b^2 d + b d^2 \quad\quad \\ \hline b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - d^3 \end{array}$$

LEMMA II.

Quod ſecundo loco aſſumpſimus illud erat.

In æquatione, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, radix eſt differentia duorum laterum, ſub quibus continetur triens plani coefficientis, & qui ab ipſis fiunt cubi, differunt per comparationis homogeneum.

Id autem ſic oſtenditur.

Sit æquatio $a^3 + 3 b d a = z$ ſol.

Ex Lemmate antecedenti. Sit a, æqualis quidem $b - d$, cubus ex $b - d$, eſt $b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - b^3$, cui ſi addideris $+ 3 b^2 d - 3 b d^2$, nempe triplum ſolidum factum ex b d, in $b - d$, proueniet $b^3 - d^3$, quod æquabitur z ſol. itaque æquatio illa $a^3 + 3 b d a = z$ ſol. reuocatur ad hanc $a^3 + 3 b d a = b^3 - d^3$.

LEMMA III.

Quod aſſumpſimus tertiò illud erat.

Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, cubus è triente plani coefficientis additus quadrato è dimidio comparationis homogenei facit id, cuius latus quadratum additum, & ſubtractum ex prædicto dimidio facit ea, quorum latera cubica ſunt illa, ſub quibus triens plani coefficientis continetur.

Id autem ſic oſtenditur,

Demonſtratio Quod autem tertio Lemmatis loco aſſumebatur ſic oſtenditur. Ex præmiſſo Lemmate dum eſt $a^3 + 3 b d a = z$ ſol. erit æquatio $a^3 + 3 b d a = b^3 - d^3$.

Cubus è b d, triente coefficientis plani eſt $b^3 d^3$, quo addito ad $\frac{b^6 - 2 b^3 d^3 + d^6}{4}$ quadratum è dimidio ipſius $b^3 - d^3$, fiet ſumma $\frac{b^6 - 2 b^3 d^3 + d^6}{4} + b^3 d^3$, ſeu quod idem eſt $\frac{b^6 + 2 b^3 d^3 + d^6}{4}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{b^3 + d^3}{2}$, quæ addita ad $\frac{b^3 - d^3}{2}$, dimidium prædictum, facit b^3, cuius latus cubicum eſt b. Vides ergo &c.

Si ſubtrahatur fit d^3, cuius latus cubicum eſt d. Rectè igitur dicebatur &c.

Ex his porrò facillimum erit oſtendere, quod principaliter intendimus.

Demõſtratur principale intentum. Quoniam enim C, cubus plus C, in B, æqualis eſt E, vt ex hypotheſi conſtat erunt ex tertio, quod præmiſimus Lemmate N, P, latera, ſub quibus triens coefficientis plani continetur; eſt autem eorum differentia K, radix æquationis eiuſdem, vt patet ex ſecundo, quod præmiſſum eſt Lemmate, & C, eſt itidem eiuſdem æquationis radix, ergo K æquabitur C. Quod oportebat oſtendere.

Alia

Alia autem Arithmetica demonſtratio, ſic ſe habet.

QVandoquidem K, eſt differentia ipſorum N, & P, proinde † cubus ex K, plus triplo producto ipſorum N, P, K, vnà cum cubo ipſius P, æquabitur M, cubo ex N, hoc eſt æquabitur compoſito ex H, & L, vtrinque ſublato O, cubo ſcilicet ex P, & differentia inter H, & L, cubus ex K, plus triplo producto ipſorum N, P, K, æquabitur duplo L, hoc eſt E. † Ex Elementis

Quoniam autem cubus ex C, plus triplo producto ex C, in S, ſupponitur ęquari E, erit a tam C, differentia duorum laterum, quorum cubi differunt per E, quàm K, differentia itidem duorum laterum, quorum cubi differunt per E. a. Ex Lemmate 2.

A	D	E	L	R
1000	720	1720	860	739600
C	B	S		
10	72	24		
F	G	M	O	
13824	753424	1728	8	
	H	N	P	
	868	12	2	
			K	
			10	

Et quoniam ęquatio cubica eſt affirmatè affecta; ſi F, cubus ex S, triente coefficientis plani B, addatur ad R, quadratum ex L, dimidio comparationis homogenei, fit G, cuius latus quadratum eſt H, quo addito, & ſubtracto ex L, fiunt M, & O, quorum latera cubica N, & P, ſunt ea, ſub quibus b continetur S; propterea cubus ex K, plus triplo producto ex K, in S, æquabitur E, (eſt enim S, quod fit ex N, in P). At cubus ex C, ex hypotheſi plus triplo producto ex C, in S, æqualis eſt E; ergo cubus ex K, plus triplo producto ex K, in S, æquabitur cubo ex C, plus triplo producto ex C, in S, ergo cubus ex K, æquabitur c cubo ex C, quamobrem, & K, æquabitur C. Quod erat operæ pretium demonſtrare. b. Ex Lemmate 3. c. Ex Elementis.

Quod ſi fuerit æquatio, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere datoque coefficiente plano, ſic inſtituetur demonſtratio. Præceptum erat huiuſmodi.

Cubus tertiæ partis plani coefficientis, ſiue numeri radicum ſubtrahatur à quadrato comparationis homogenei ſiue numeri abſoluti; ex reſiduo autem ſumatur latus, quod additum, vel ſubtractum à dimidio numeri abſoluti, gignit Binomium, & Apotomen, quorum latera cubica coniungantur ad inuicem, aggregatum enim vnius radicis pretium repræſentabit.

Id autem ex adiuncto Theoremate perſpicuum fiet.

THEOREMA.

SINT duo numeri A, B, & illius quidem latus cubicum ſit C, quod ductum in B, producat D, differentia autem inter A, & D, eſto E, cuius dimidium ſit L, cuius quadratum ſit R, tertia autem pars ipſius B, ſit S, cuius cubus ſit F, qui ſubtractus ex R, relinquat G, cuius latus quadratum ſit H, quod additum, & ſubtractum ex L; faciat M, & O, quorum latera cubica ſint N, & P, quorum aggregatum ſit K.

Oſtendendum eſt K, æqualem eſſe C.

Hęc

Hæc autem vt oſtendamus præmittendum eſt illud.

Præmittendū primò. Primò. Cubus aggregati laterum, minus triplo ſolido à plano ſub lateribus in aggregatum eorundem æqualis eſt aggregato cuborum à lateribus.

Præmittendū ſecundò. Secundò. Si fuerit ęquatio, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano.

A	D	E	L	R
1000	720	280	140	19600
C	B	S		
10	72	24		

F	G	M	O
13824	5776	216	64
	H	N	P
	76	6	4
		K	
		10	

Huius æquationis radix eſt aggregatum è duobus lateribus è quibus, qui fiunt cubi componunt comparationis homogeneum; at verò productum ſub illis, eſt triens plani coefficientis.

Vt ſi ſit æquatio 1 C — 72 R ⊏⊐ 280; plani coefficientis triens eſt 24, cuius cubus ſubtractus ex 19600, quadrato ex 140, dimidio comparationis homogenei relinquit 5776, cuius latus quadratum additum, & ſubtractum ex 140, dimidio prædicto, facit 216, & 64, quorum latera cubica 6, & 4, ſunt illa, ſub quibus continetur 24, triens plani coefficientis 72.

Præmittendū tertiò. Præmittendum deniq; tertiò.

Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano.

Cubus autem è triente coefficientis, ſubtrahatur à quadrato è dimidio comparationis homogenei, fit reſiduum, cuius latus quadratum additum, & ſubtractum à prædicto dimidio facit ea, quorum latera cubica ſunt, illa ſub quibus continetur triens coefficientis plani, & è quibus, qui fiunt cubi componunt comparationis homogeneum.

LEMMA I.

QVod ſuperiùs primo loco fuit aſſumptum illud erat. *Cubus aggregati laterum, minus triplo ſolido à plano ſub lateribus in aggregatum eorundem æqualis eſt aggregato cuborum à lateribus.*

Id autem ſic oſtenditur.

Demonſtratio. Latus vnum ſit b, alterum verò d, ita vt ipſorum aggregatum ſit $b \dagger d$, huius cubus eſt $b^3 \dagger 3\,b^2 d \dagger 3\,b d^2 \dagger d^3$, à quo ſi dempſeris $3\,b^2 d \dagger 3\,b d^2$, triplum ſolidum à plano ſub lateribus in eorundem aggregatum remanebit $b^3 \dagger d^3$, ergo cubus aggregati laterum minus triplo ſolido à plano ſub lateribus in aggregatum eorundem, æqualis eſt aggregato cuborum à lateribus.

$$
\begin{array}{r}
b \dagger d \\
b \dagger d \\
\hline
b^2 \dagger 2\,b\,d \dagger d^2 \\
b \dagger d \\
\hline
b^2 d \dagger 2\,b\,d^2 \dagger d^3 \\
b^3 \dagger 2\,b^2 d \dagger \quad b\,d^2 \qquad\quad \\
\hline
b^3 \dagger 3\,b^2 d \dagger 3\,b\,d^2 \dagger d^3
\end{array}
$$

Digitized by Google

LEMMA II.

Vod ſecundo loco aſſumpſimus illud erat.

In æquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, radix eſt ſumma duorum laterum, ſub quibus triens plani coefficientis continetur, & qui ab ipſis fiunt cubi, conficiunt comparationis homogeneum.

Id autem ſic oſtenditur.

Sit æquatio $a^3 - 3\,b\,d\,a = z$ ſol.

Sit $b + d$, æqualis a, cubus quidem ex $b + d$, eſt $b^3 + 3\,b^2 d + 3\,b\,d^2 + d^3$, ex quo ſi dempſeris $3\,b^2 d + 3\,b\,d^2$, nempe triplum ſolidum factum à $b\,d$, plano ſub lateribus in $b + d$, laterum eorundem aggregatum, fiet $b^3 + d^3$, quod æquabitur z ſol. Itaque æquatio illa $a^3 - 3\,b\,d\,a = z$ ſol. reuocatur ad hanc $a^3 - 3\,b\,d\,a = b^3 + d^3$. *Ex Lemmate antecedenti.*

LEMMA III.

Vod autem tertio loco aſſumebatur illud erat.

Si fuerit æquatio, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, cubus autem è triente plani coefficientis ſubtractus ſit è quadrato dimidij comparationis homogenei, reſidui latus quadratum additum, & ſubtractum à prædicto dimidio facit ea, quorum latera cubica ſunt illa, ſub quibus triens plani coefficientis continetur.

Id autem ſic oſtenditur,

Ex eo, quod ſecundo loco præmiſſum eſt, Lemmate; cum fuerit æquatio $a^3\ 3\,b\,d\,a = z$ ſol. reuocatur ad hanc $a^3 - 3\,b\,d\,a = b^3 + d^3$.

Cubus è $b\,d$, triente plani coefficientis eſt $b^3 d^3$, quo ſubtracto ex $\frac{b^6 + 2\,b^3 d^3 + d^6}{4}$, quadrato è dimidio ipſius $b^3 + d^3$, remanet, $\frac{b^6 + 2\,b^3 d^3 + d^6}{4} - b^3 d^3$, ſeu quod idem eſt $\frac{b^6 - 2\,b^3 d^3 + d^6}{4}$. Huius autem latus quadratum eſt $\frac{b^3 - d^3}{2}$, quo addito ad $\frac{b^3 + d^3}{2}$, dimidium ipſius $b^3 + d^3$, fit b^3, cuius latus cubicum eſt b. Vides ergo &c. *Demonſtratio*

Si autem ſubtrahatur $\frac{b^3 - d^3}{2}$ ex $\frac{b^3 + d^3}{2}$ remanet d^3, cuius latus cubicum eſt d. Rectè igitur dicebatur &c.

Ex his facilè conſtabit, quo pacto principale intentum oſtendere poſſimus.

Quoniam C, cubus, minus C, in B, æqualis eſt E, vt ex hypotheſi conſtat; erunt ex tertio, quod præmiſſum eſt, Lemmate N, P, latera, ſub quibus triens coefficientis plani continetur; eſt autem eorum aggregatum K, radix æquationis eiuſdem, vt patet ex ſecundo, quod præmiſſum eſt, Lemmate, & C, eſt itidem eiuſdem æquationis radix ex hypotheſi; ergo K, æquabitur C. Quod demonſtrare oportebat. *Demonſtratur principale intentum.*

Alia autem Arithmetica demonſtratio ſic ſe habet.

† *Ex Elementis.*

QVandoquidem K; eſt aggregatum ex N, & P, cubus ex K, minus triplo producto N, P, K, minus O, cubo ex P, æquabitur † M, cubo ex N, hoc eſt æquabitur aggregato ex H, & L; vtrinque addito O, cubo ex P; cubus ex K, minus triplo producto ipſorum N, P, K, æquabitur H, plus L, vnà cum O, differentia inter H, & L, hoc eſt æquabitur E, duplo ipſius L.

a Ex Lemmate ſecundo.

Quoniam autem cubus ex C, minus triplo producto ex C, in S, ſupponitur æquari E, erit [a] tam C, ſumma duorum laterum, quorum cubi conficiunt E, quàm K, itidem ſumma duorum laterum, quorum cubi eundem E, conficiunt.

A	D	E	L	R	
1000	720	280	140	19600	
C	B	S	F	G	
10	72	24	13824	5776	
M	O	H	N	P	K
216	64	76	6	4	10

Et quoniam æquatio cubica eſt negatè affecta; ſi F, cubus ex S, triente coefficientis plani B, ſubtrahatur ab R, quadrato ex L, dimidio comparationis homogenei, fit G, cuius latus quadratum eſt H, quo addito, & ſubtracto ex L, fiunt M, & O, quorum latera cubica N, & P, ſunt ea, ſub quibus [b] continetur S; propterea cubus ex K, minus triplo producto ex K, in S, æquabitur E, (eſt enim S, quod fit ex N, in P). At verò cubus ex C, ex hypotheſi, minus triplo producto ex C, in S, æqualis eſt E, ergo cubus ex K, minus triplo producto ex K, in S, æquabitur cubo ex C, minus triplo producto ex C, in S, quamobrem cubus ex K, erit [c] æqualis cubo ipſius C, atque adeò K, æquabitur C. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

b. Ex Lemmate tertio.

c Ex elementis.

Quod ſi fuerit æquatio, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano, afficitur multa cubi, ſic inſtituetur demonſtratio. Præceptum autem erat huiuſmodi.

Præceptum.

Primò numerus abſolutus ſigno — abiecto aſſumat ſignum †, ita enim proueniet æquatio, in qua cubus æqualis eſt radici † numero, ſeu quod idem eſt cubus minus radice æqualis eſt numero; iuxta hanc autem æquationem tranſmutatam reperiatur radicis valor.

Secundò a quadrato lateris inuenti per æquationem tranſmutatam ſubtrahatur numerus radicum, reſiduum verò ſeruetur.

Tertiò à quadrato dimidij lateris inuenti per tranſmutatam æquationem ſubtrahatur reſiduum ſeruatum. Si enim huius vltimi reſidui latus addatur, vel ſubtrahatur a dimidio lateris inuenti per tranſmutatam æquationem ſumma, vel reſiduum repræſentabit valorem lateris vtriuſque, nempe lateris maioris, & minoris; huius enim, vtpote ambiguæ æquationis, duplex eſt latus.

Suppoſitio. Suppoſitionis declaratio. Exemplum.

Supponendum eſt illud; nimirum æquationem cubicam, in qua ſcilicet cubus negatur de ſolido ſub latere, datoque coefficiente plano, transformari in illam, in qua de cubo negatur ſolidum iam dictum, quandocumque æquatio ipſa propoſita diuiſionis beneficio ad quadraticam reduci queat. Itaque ſi fuerit æquatio 1 C — 217 R ⊐ 624, quæ diuiſibilis eſt per 1 R — 3 per 1 R — 13, & per 1 R — 16; huius quidem æquationis radices veræ ſunt 3, & 13, falſa autem 16 aggregatum, ex 3, & 13, hæc autem æquatio transformatur in illam 1 C — 217 R — 624 ⊐ o, huius æquationis radices duæ ſunt falſæ 3, & 13, vna autem vera nempe 16.

Rurſus exēplo propoſitū declaratur.

Cum igitur æquatio illa 1 C — 217 R † 624 ⊐ o, ad hanc fuerit reuocata 1 C — 109 R — 420 ⊐ o; ex hac extrahenda eſt radix diuiſionis præſidio, ſi enim diuidatur per 1 R † 13, proueniet 1 Q — 13 R — 48 ⊐ o, cuius æquationis radix

dix eſt 16, itaque cubicæ æquationis 1 C — 217 R — 624 = 0, radix eſt 16; cuius quadratum eſt 256, à quo ſi dempſeris 217, numerum radicum, remanebit 39, quem ſi ſubduxeris ex 64, quadrato ex dimidio iam dicto; nempe ex 8, remanebit 25, cuius radix quadrata eſt 5, qua addita ad 16, fit 13, ſubtractaque ex eodem fit 3, itaque 3, & 13, erunt radices æquationis initio propoſitæ 1 C — 217 R † 624 = 0.

Præcepti comprobatio.

His igitur adnotatis, liquidò conſtat, rectè quidem præceptum traditum eſſe, facilèq; demonſtrari poſſe opere multiplicationis. Ad conſtituendam enim æquationem Amphibolam veræ radices ſigno — afficiuntur, & radix falſa ſigno †; ex horum autem mutua multiplicatione, numerus abſolutus fit affectus ſigno † in æquatione, quæ per huiuſmodi multiplicationem conſurgit. Ad conſtituendam autem æquationem alteram, iidem numeri multiplicantes concurrunt, cum hoc tamen diſcrimine, quòd qui afficiebantur ſigno —, nunc affecti euadant ſigno †, & qui afficiebatur ſigno †, euadat affectus ſigno —; In hac igitur æquatione numerus abſolutus ſymbolo quidem afficitur —, in reliquis tamen nullatenus diſcriminantur, quamobrem duæ veræ radices æquationis Amphibolæ euadunt falſæ in æquatione transformata, & falſa illius in hac euadit vera.

Vt igitur præceptum oſtenderetur, opportunum viſum eſt aduertere rem eò deduci, vt demonſtremus, quæ paulò poſt allaturi ſumus.

Quædā adnotatione digna.

Interim videtur adnotatione dignum, quando fuerit æquatio inuersè negata; tunc ſuperiori præcepto reſolui poſſe; quando reſiduum illud conſeruandum ſubtrahi poteſt à quadrato è dimidio radicis transformatæ æquationis, & numerus radicum non ſit maior quadrato radicis, quod vt luculentiùs percipiatur; Propoſita ſit æquatio 124 R — 1 C = 240, hæc autem transformata reuocabitur ad hanc 1 C — 124 R = 240, cuius æquationis radix eſt 12, huius autem quadratum eſt 144, à quo ſi dempſeris 124, remanet 20, quo ſubtracto ex 36, quadrato à 6, dimidio radicis transformatæ æquationis, remanet 16, cuius radix quadrata eſt 4, quæ addita ad 6, dimidium prædictum, facit 10, & ſubtracta ab eodem relinquit 2. Quare initio propoſitæ æquationis 124 R — 1 C = 240, radices erunt 10, & 2.

Notandum ſecundò.

Quod ſi reſiduum illud conſeruandum, fuiſſet maius quadrato à dimidio radicis æquationis transformatæ, vtique operatio inſtitui non potuiſſet. Ita ſi numerus radicum fuiſſet maior quadrato radicis.

Cæterùm ex æquatione directè negata illa radix elicietur diuiſionis beneficio. Erat enim 1 C — 124 R = 240, atque adeò 1 C — 124 R — 240 = 0, hæc diuiſibilis eſt per 1 R † 10, & per 1 R † 2, & per 1 R — 12.

Exemplo res declaratur.

Ita etiam ſi propoſita fuerit æquatio 28 R — 1 C = 48, transformata ad hanc reuocabitur 1 C — 28 R = 48, cuius radix innoteſcet ex præceptis iam traditis, innoteſcet inquam eſſe 6, cuius quadratum eſt 36, à quo ſi dempſeris 28, numerum radicum, fiet reſiduum 8, auferendum à 9, quadrato ex 3, dimidio inuentæ radicis iam dictæ ex transformata æquatione, & remanet 1, cuius radix quadrata eſt 1, quæ addita ad 3, prædictum dimidium, facit 4, & ab eodem ſubtracta relinquit 2; Initio igitur æquationis propoſitæ 28 R — 10 = 48, ſunt 4, & 2, Radices.

Rurſus exemplo res illuſtratur.

Rurſus propoſita ſit æquatio 30 R — 1 C = 36, hæc quidem transformata reuocabitur ad hanc 1 C — 30 R = 36, eius autem radix conſtat eſſe 6, cuius quadratum eſt 36, à quo ſi dempſeris 30, numerum radicum, remanebit 6, quo ſubtracto ex 9, quadrato è 3, dimidio ſupradictæ radicis 6, remanet 3, cuius radix quadrata eſt ℞ 3, quæ addita ad 3, dimidium prædictum, facit 3 † ℞ 3, & ſublata ex eodem 3, relinquit 3 — ℞ 3; itaque initio propoſitæ æquationis 30 R — 1 C = 36, radices ſunt 3 † ℞ 3, & 3 — ℞ 3, quarum ſumma eſt 6, radix falſa; & ita eſt; Si enim 30, ducatur in 3 † ℞ 3, proueniet 90 — ℞ 2700, à quo ſi dempſeris 54 † ℞ 2700, remanet 36. Ita etiam de radice minori, cuiuſmodi eſt 3 — ℞ 3, hæc enim ducta in 30, facit 90 — ℞ 2700, à quo ſi demptus fuerit 54 — ℞ 2700, cubus ex 3 — ℞ 3, remanebit 36, duę igitur veræ radices æquationis propoſitæ ſunt 3 † ℞ 3, & 3 — ℞ 3, falſa autem eſt 6, quę vt ritè cognoſcantur; intelligatur æquatio illa induens hanc formam 1 C — 30 R † 36 = 0, quę diuiſibilis eſt per 1 R † 6, fit autem quotiens 1 Q — 6 R † 6 = 0, cuius æquationis radices ſunt

3 † ℞ 3, & 3 — ℞ 3. Sunt autem veræ radices, vt dicebamus 3 † ℞ 3, & 3 — ℞ 3, ſi enim 1 R — 3 — ℞ 3 = o, ducatur in 1 R — 3 † ℞ 3 = o, fiet productum 1 Q — 6 R † 6 = o, quo ducto in 1 R † 6 = o, fit productum 1 C — 30 R † 36 = o, ſeu 30 R — 1 C = 36, cuius æquationis radices ſunt veræ iam dictæ 3 † ℞ 3, & 3 — ℞ 3.

Denuo idem declaratur exemplo. Rurſus propoſita ſit æquatio 12 R — 1 C = 16, transformata ad hanc reuocabitur 1 C — 12 R = 16, huius autem æquationis radix conſtet eſſe 4; cuius quadratum eſt 16, a quo ſi abſtuleris 12, numerum radicum, remanebit 4, quod ſi ſubtrahatur ex 4, quadrato è dimidio prædictæ radicis, remanet o, quo addito vel ſubtracto ab eodem dimidio, fiet 2. Itaque initio propoſitæ æquationis vna erit radix 2.

Iterum idem exemplo illuſtratur. Præterea propoſita ſit æquatio 8 R — 1 C = 3, transformata reducetur ad 1 C — 8 R = 3, cuius radix conſtet eſſe 3, cuius quadratum eſt 9, à quo ſubtracto 8, remanet 1, hoc autem reſiduum eſt ſeruandum, vt ſæpe diximus; Deinde quadratum ex 1 $\frac{1}{2}$, dimidio transformatæ radicis, eſt 2 $\frac{1}{4}$, à quo ſi dempſeris 1, reſiduum ſeruatum, remanet 1 $\frac{1}{4}$, cuius radix quadrata eſt ℞ 1 $\frac{1}{4}$, quæ addita ad 1 $\frac{1}{2}$, facit 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & ab eodem ſubtracta, relinquit 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$; itaque æquationis initio propoſitæ 8 R — 1 C = 3, duæ ſunt radices veræ, nempe 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$, falſa autem radix erit 3, quod cuique perſpicuum eſſe poteſt; ſi enim diuidamus 1 C — 8 R † 3 = o, per 1 R † 3, proueniet 1 Q — 3 R † 1 = o, cuius æquationis duæ ſunt radices 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$; & quidem ſi nos multiplicemus 1 R — 1 $\frac{1}{2}$ ✠ ℞ 1 $\frac{1}{4}$ per 1 R — 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$, proueniet 1 Q — 3 R † 1 = o, quo ducto in 1 R † 3 = o, proueniet 1 C — 8 R † 3 = o.

Comprobatio adinuentæ radicis. Cæterùm eam eſſe radicem, quam diximus, ita fiet manifeſtum; etenim cubus ex 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$ eſt 9 † ℞ 60, ſi autem hoc ſubtrahatur ex 12 † ℞ 80, producto nimirum ex 8, numero radicum, in 1 $\frac{1}{2}$ † ℞ 1 $\frac{1}{4}$, radicis pretium; fit reſiduum 3. Non diſſimiliter comprobabimus minoris radicis pretium eſſe 1 $\frac{1}{2}$ — ℞ 1 $\frac{1}{4}$.

THEOREMA.

SI fuerit numerus A, à cuius Cubo C, ſubtractus ſit D, factus ex A, in B, & remanet E, à quadrato ex A, nempè F, ſubtractus ſit B, & remaneat G, quo ſubtracto ex H, quadrato ab I, dimidio ipſius A, remaneat K; cuius radix quadrata ſit L, quæ addita ad I, faciat M; & ſubtracta ab eodem faciat N.

Oſtendendum eſt; Si M, ducatur in B, & fiat O; & ab hoc ſubtrahatur cubus eiuſdem M, nempe P; ita vt remaneat Q. Oſtendendum eſt inquam Q, æqualem eſſe F.

Non diſsimiliter ſi N, ducatur in B; ita vt fiat R, ex quo ſubtractus ſit S; ita vt remaneat T. Oſtendendum eſt T, aqualem eſſe E.

A	B	E	H	K	M
16	217	624	64	25	13

1
8

C	D	F	G	L	N
4096	3472	256	39	5	3

O	P	Q	R	S	T
2821	2197	624	651	27	624

Hæc methodo eadem nos oſtendere poſſumus, qua ſuperiùs vſi ſumus ad Arithmeticè demonſtranda ſuperiora Theoremata.

Nunc autem propoſiti Theorematis demonſtrationem quiſque percipiet, aduertendo per A, repræſentari radicem æquationis transmutatæ, in qua videlicet cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano. Itaque ſi ab eius cubo, cuiuſmodi eſt C, ſubtractus fuerit D, factus ex A, radice in B, coefficiens planum, ita vt remaneat E, manifeſtum eſt E, eſſe comparationis homogeneum: Hypotheſis autem eſt iuxta præceptum. *Præparatio ad demonſtrationem.*

Vt igitur demonſtretur præceptum ipſum, oſtendendum eſt Theorema, iam dictum. Cæterum æquatio foret huiuſmodi 1 C — 217 R ⩵ 624. Manifeſtum autem huius radicem eſſe 16, vt ſuperiùs vidimus. Itaque fit, vt huius æquationis 217 R — 1 C ⩵ 624, radices ſint 13, & 3, quæ ſimul conficiunt 16, eſt enim duplex huius æquationis radix vera, vna autem falſa, puta 16. Quod ex adiuncto paradigmate cernitur; facilè ſiquidem vnuſquiſque cognoſcet, radicem veram duplicem eſſe, vt diximus, cùm vtraque ſatisfaciat; at verò altera, conducit quidem ad efformandam æquationem, ſed non ſatisfacit quęſtioni. Si enim ducatur 16, in 217, fiet 3472, à quo nequit auferri 4096, cubus eiuſdem 16. Secus autem ſi ſupponamus radicem 3, vel 13, vt operanti perſpicuum fiet.

```
              1 R — 13
              1 R —  3
            ----------
            — 3 R + 39
     1 Q — 13 R
     ----------------
     1 Q — 16 R + 39
              1 R + 16
     ----------------------
     + 16 Q — 256 R + 624
1 C — 16 Q + 39 R
---------------------------
1 C — 217 R + 624 ⩵ 0
  217 R — 1 C ⩵ 624
```

Illud inſuper addam, æquationem hanc, diuidi poſſe per R, plus numero; ita vt huiuſmodi diuiſione ad quadraticam reuocetur. Vt ſi prædicta æquatio 1 C — 217 R † 624 ⩵ 0; diuidatur per 1 R † 16, fit quotiens 1 Q — 16 R † 39, cuius æquationis radix eſt duplex; nempe 3, & 13. Itaque ſi diuidatur æquatio propoſita per 1 R † 16, proueniet æquatio quadratica, quam diximus, cuius radix duplex facilè exhibetur; vtraque verò ſatisfacit æquationi cubicæ initio propoſitæ; cubus enim ex 3, eſt 27, & ſolidum ſub 3, radicis pretio, & 217, coefficiente plano, eſt 651, ex quo ſi ſubtraxeris 27, cubum ex 3, remanet 624, comparationis homogeneum. Vel ſi radix eſt 13, eius cubus eſt 2197; ſolidum ſub 13, radicis pretio, & 217, coefficiente plano, eſt 2821; ex quo ſi ſubtraxeris 2197, cubum ex 13, remanet 624, comparationis homogeneum.

Redeamus ad ea, quæ ſuperiùs attulimus.

Data ſit æquatio 1 C — 109 R † 420 ⩵ 0; Reuocetur ad hanc 1 C — 109 R — 420 ⩵ 0. Ex hac extrahenda eſt radix diuiſionis præſidio. Si enim diuidatur per 1 R † 7, prouenit æquatio quadratica, nempe 1 Q — 7 R — 60 ⩵ 0. Huius porro æquationis radix eſt 12; cuius quadratum eſt 144; à quo ſi dempſeris radicum *Supradictorum noua declaratio.*

cum numerum 109, remanebit 35; quem ſi ſubduxeris ex 36; quadrato dimidij radicis inuentæ ex tranſmutata æquatione, remanebit 1, cuius radix quadrata eſt 1, hac autem addita ad 6; dimidium prædictum, fit 7; & ex eodem dimidio, itidem ſubtracto 1, remanebit 5; itaque 5, & 7, erunt radices æquationis initio propoſitæ 1 C — 109 R † 420 = o.

De æquatione tranſmutata iterum agitur

Tranſmutatur igitur æquatio cubica inuerſè negata, in negatam directè, nam æquatio illa 1 C — 109 R † 420 = o, æquiualet huic 109 R — 1 C — 400 = o; in qua Poteſtas dicitur indirectè, ſiue inuerſè negata, cùm autem illa tranſmutatur in hanc 1 C — 109 R — 420 = o, hæc æquipollet huic 1 C — 109 R = 420; in qua Poteſtas dicitur directè negata. Facta igitur huiuſmodi tranſmutatione, itaut hæc 1 C — 109 R † 420 = o, tranſmutetur in hanc 1 C — 109 R — 420 = o. Hæc diuidenda eſt, itaut æquatione diuiſa, in qua poteſtas eſt cubus, proueniat æquatio in qua poteſtas eſt quadratum, & quidem, vt erat cubus affectus ſub latere, per tranſmutationem fit itidem cubus negatè affectus ſub eodem gradu, ita tamen, vt cùm priùs eſſet affectio in directè negata, fiat affectio negata directè. Vtriuſque autem ęquationis, tàm ſcilicet quadraticæ, quàm cubicæ transformatæ, atque adeo illius, in qua poteſtas eſt directè negata, eadem eſt radix vera. Vt patet, nam illius æquationis 1 Q — 7 R — 60 = o; radix eſt 12, & æquationis cubicæ 1 C — 109 R — 420 = o, radix vera eſt 12, duabus 5, & 7, exiſtentibus falſis. Quamobrem cubica æquatione cuiuſmodi eſt 1 C — 109 R — 420 = o, diuiſa per 1 R, cuius valor eſt vna ex radicibus falſis eiuſdem æquationis cubicæ, plus numero, qui eſt altera itidem falſa radix, fit ęquatio quadratica, cuius radix inuenta, propoſitæ diuidendæ æquationi cubicę, qualis eſt illa, in quam initio data, tranſmutatur, omnino ſatisfacit. Vt in ſuperiori exemplo; radix æquationis quadraticæ 1 Q — 7 R — 60 = o, eſt 12, quæ quidem radix, ſatisfacit huic æquationi cubicæ 1 C — 109 R — 420 = o; vt operanti perſpicuum eſſe poteſt; Cubus enim ex 12, eſt 1728, à quo ſi dempſeris 1308, productum ex 12, radice iam dicta in 109, coefficiens planum, remanet 420, à quo ſi ſubtraxeris 420, remanet nihil.

Hæc etiam breuiter adnotauimus ſuperiùs, pagina 320. Quæ vt copioſiùs quàm ibi tractemus.

Superiùs tradita iterum declarantur.

Supponamus eandem æquationem cubicam 1 C — 109 R — 420 = o, in quam tranſmutata eſt illa 1 C — 109 R † 420 = o. Si terminos vtriuſque nos explicemus, pro æquatione quadratica habebimus 144 — 84 — 60 = o, pro cubica verò habebimus 1728 — 1308 — 420 = o.

A B C
144 — 84 — 60 = o
D † E
5 † 7
F G H
1728 — 1308 — 420 = o

Si igitur A, minus B, minus C, ducatur in D, plus E, producat autem F, minus G, minus H, etiam diuiſo F, minus G, minus H, per D, plus E, orietur A, minus B, minus C, æqualis o. Si verò A, eſt quadratum ipſius D, plus E, certè, & F, erit cubus eiuſdem; & ſi D, plus E, ductus in E, numerum producit B; vtique G, proueniet ex multiplicatione numeri orientis ex additione C, ad quadratum ex E; in D, plus E.

Proinde diuiſa æquatione cubica, vt diximus, nempe per 1 R, cuius valor eſt vna ex radicibus falſis eiuſdem æquationis cubicæ; per ipſam inquam radicem, plus numero, qui eſt altera itidem falſa radix, fit ęquatio quadratica, cuius radix, eidem æquationi cubicæ iam dictæ ſatisfacit; hoc eſt cubicæ æquationi, in quam data initio ęquatio cubica transformata eſt.

Alio exemplo tradita doctrina declaratur

Non pigebit autem in memoriam reuocare, præceptum idem alio quidem exemplo illuſtratum. Sit igitur ęquatio 124 R — 1 C = 240, hęc ſi transformetur, ad hanc redigetur 1 C — 124 R = 240; ſeu 1 C — 124 R — 240 = o.

Cuius æquationis radix eſt 12. Si enim æquatio dicta diuidatur per 1 R † 2 = o, fit quotiens 1 Q — 2 R — 20 = o, cuius radix eſt 12. Itaque, & cubicę ęquationis 1 C — 124 R — 240 = o, radix erit 12. Huius quadratum eſt 144, à quo ſi dempſeris 120, coefficiens planum, ſiue numerum radicum, fit reſiduum 20, quo

ſubtracto

ſubtracto ex 36, quadrato è 6, dimidio inuentæ radicis 12, remanet 16, cuius radix quadrata eſt 4, quæ addita ad 6, dimidium prædictum, facit 10, ab eodem autem ſubtracta relinquit 2, itaque radices veræ propoſitæ æquationis initio 124 R — 1 C ⊐ 240, erunt 10, & 2. Quamobrem his duabus exiſtentibus veris, fit radix falſa 16, æquationis eiuſdem, cum alioquin eſſet radix vera æquationis tranſformatæ, & inſuper æquationis quadraticæ. Vtriuſque enim eadem eſt vera radix, vt ſuperiùs eſt animaduerſum.

Theorematis autem demonſtratio, præmittendum requirit.

LEMMA

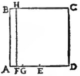
SI duo ſint numeri A, B, itaut ſubtracto B, ex F, quadrato ipſius A, remaneat G, qui ſubtractus ex H, quadrato ipſius I, dimidio A, relinquat K, cuius radix quadrata L, addita ad I, faciat M.

Dico aggregatum cuborum ex A, & M, æquale eſſe producto abs A, in B, plus producto ex B, in M. Oportet autem B, minorem eſſe quadrato ipſius A.

Et ſi L, ſubtractus ex I, relinquat N. Dico aggregatum cuborum ex A, & N, æquale eſſe producto abs A, in B, vnà cum producto ex B, in N. Oportet autem &c.

	A	B	H	K	M
	16	217	64	25	13
I					
8					
	F		G	L	N
	256		39	5	3

Hæc autem Geometricè ſic liceret concipere. Sit A D, cuius quadratum ſit A H, C D, ex quo ſubtractum rectangulum F H C D, relinquat A N; quo ſubtracto ex quadrato ipſius A E, dimidij rectæ A D, remaneat id, cuius latus quadratum ſit G E, quo addito ad E D, itidem dimidium eiuſdem A D, faciat G D, ſubtractum autem faciat A G. *Lemma Geometricè enunciatum.*



Dico aggregatum cuborum ex ipſis A D, G D, æquale eſſe ſolido ab A D, in planum F C, plus ſolido abs G D, in idem planum F C.

Non diſſimiliter ſecunda pars concipietur Lemmatis &c.

Dico aggregatum cuborum ex A D, A G, æquale eſſe ſolido, ab A D, in planum F C, plus ſolido ab A G, in idem planum F C.

Hęc autem opitulante Analyſi facilè oſtendi poſſunt, ſuoque loco demonſtrabimus. Interim hæc adijciam.

Cum hìc adhibeamus Alphabeti characteres ad demonſtrationem efformandam, aduerte, planum ſignificari poſſe etiam hoc ſymbolo b^2, ſi enim aliquid eſt quadratum, etiam planum, erit ſed ad diſtinctionem illius numeri qui quadratus eſt, & præterea quia in re, de qua agimus nihil refert, num ille numerus ſit quadratus, vel non, proinde vtimur ſymbolo b p. ita b ſ. ſignificabit b ſolidum; inſuper b pp. denotabit b plano planum &c. *Nota pro intelligētia characterum.*

Supponamus longitudinem a, planum autem b p. quo ſubtracto ex a^2, remanet a^2 — b p. ex hoc autem ſubducto $\frac{1}{4}$ a^2, nempe quadrato dimidij ipſius a, fit reliquum b p. — 3 a^2, cuius latus eſt ℞ (b p. — $\frac{1}{4}$ a^2), quo addito ad $\frac{1}{2}$ a, fit $\frac{1}{2}$ a † ℞ (b p. — $\frac{1}{4}$ a^2); & ſi idem ſubtrahatur ipſi $\frac{1}{2}$ a, fit reliquum $\frac{1}{2}$ a — ℞ (b p. — $\frac{1}{4}$ a^2). At verò ſi ſumatur cubus vnius ex hiſce duobus; *Explicatio*

Verbi

Verbi gratia ipſius $\frac{1}{2}$ a † ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), & huiuſmodi cubus addatur a³, fiet aggregatum, quod æquabitur aggregato ſolidorum, quorum vnum fit ab a, in b p. aliud verò ab $\frac{1}{2}$ a † ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), in b p. Vel ſi vtamur altero, puta $\frac{1}{2}$ a — ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), ita vt huius accipiamus cubum, & hunc addamus a³, fit aggregatum, quod æquabitur aggregato ſolidorum, quorum vnum continetur ab a, in b p. aliud verò ab $\frac{1}{2}$ a — ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), in b p.

Cæterùm vtriuſque cubus comparabitur facilè, attendendo Geneſin ipſius cubi à quantitate Binomia; conſtat enim cubo primi nominis plus ſolido ter à quadrato primi nominis in nomen ſecundum, plus ſolido ter à primo nomine in quadratum ſecundi, plus cubo ſecundi. Si adhibeatur autem $\frac{1}{2}$ a † ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), ſolidorum aggregatum prædictum erit $\frac{3}{2}$ b p. a † b p. ℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²), ſeu 1 $\frac{1}{2}$ b p. a † ℞ (b ſol. ſol. — $\frac{3}{4}$ b pl. pl. a²), quod ex operæ multiplicationis perſpicuum eſt. Tantum autem eſt aggregatum cuborum ex a, & ex $\frac{1}{2}$ a † ℞ (b pl. — $\frac{3}{4}$ a²). Geneſi enim obſeruata cubi, ſimulque ſingularibus ſolidis attentis, illius cubus deprehenditur hunc in modum. Cubus primi nominis eſt $\frac{1}{8}$ a³; ſolidum verò ter à quadrato primi nominis in nomen ſecundum eſt $\frac{3}{4}$ a² ℞ (b pl. — $\frac{3}{4}$ a²), ſeu ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b pl. — $\frac{27}{64}$ a⁶). Solidum verò ter à primo nomine in quadratum ſecundi eſt 1 $\frac{1}{2}$ a b pl. — 1 $\frac{1}{8}$ a³. Cubus denique ſecundi nominis eſt ℞ (b ſol. ſol. † $\frac{27}{16}$ a⁴ — $\frac{9}{4}$ a² b pl. pl. — $\frac{27}{64}$ a⁶), vt patet ex multiplicatione ℞ (b pl. — $\frac{3}{4}$ a²), in ſe cubicè.

℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²)
℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²)

---

b p. — $\frac{3}{4}$ a²
℞ (b p. — $\frac{3}{4}$ a²)

℞ (b ſol. ſol. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. — $\frac{27}{64}$ a⁶)
b p. — $\frac{3}{4}$ a²
b p. — $\frac{3}{4}$ a²

— $\frac{3}{4}$ a² b p. † $\frac{9}{16}$ a⁴
b p. p. — $\frac{3}{4}$ a² b p.

---

b p. p. — $\frac{6}{4}$ a² b p. † $\frac{9}{16}$ a⁴
b p. — $\frac{3}{4}$ a²

— $\frac{3}{4}$ a² b p. p. † $\frac{18}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶
b ſ. ſ. — $\frac{6}{4}$ a² b p. p. † $\frac{9}{16}$ a⁴ b p.

℞ (b ſ. ſ. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) ſeu
℞ (b ſ. ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. — $\frac{27}{64}$ a⁶)

Aggregatum autem ex omnibus his eſt.

$\frac{1}{8}$ a³ † ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) † 1 $\frac{1}{2}$ a b p. — 1 $\frac{1}{8}$ a³ † ℞ (b ſ. ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. — $\frac{27}{64}$ a⁶), cui ſi addideris a³, fiet 1 $\frac{1}{8}$ a³ † ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) † 1 $\frac{1}{2}$ a b p. — 1 $\frac{1}{8}$ a³ † ℞ (b ſ. ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. — $\frac{27}{64}$ a⁶), & habita ratione ſignorum †, & —, 1 $\frac{1}{8}$ a³, de medio tollitur, propterea fit, vt illud aggregatum ſit ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) † 1 $\frac{1}{2}$ a b p. † ℞ (b ſ. ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p. p. — $\frac{27}{64}$ a⁶), & hoc æquabitur aggregato ſolidorum 1 $\frac{1}{2}$ b p. a † ℞ (b ſ. ſ. — $\frac{3}{4}$ a² b p. p.)

Si verò vtrinque auferatur 1 $\frac{1}{2}$ b p. a, remanebit ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) † ℞ (b ſ. ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b⁴ — $\frac{27}{64}$ a⁶).

Quoniam

Quoniam hæc admodum difficilia ſunt; non erit abs re numeris eadem illuſtrare. Supponamus igitur a, eſſe 16 igitur a^2 erit 256; & a^3, erit 4096, præterea ſupponamus b p. eſſe 217. Quoniam verò a^2, eſt 256; ob id $\frac{3}{4}\, a^2$, erit 192. Itaque b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$, idem erit quod $217 - 192$. Quamobrem $\frac{1}{8}\, a^3$, æquiualet 512. Inſuper ℞ ($\frac{9}{16}\, a^4$ b p. $-\frac{27}{64}\, a^6$), æquiualet 960. Præterea $1\frac{1}{2}$ a b p $-\ 1\frac{1}{8}\, a^3$, æquiualet 600. Denique ℞ (b ſ.ſ. † $\frac{27}{16}\, a^4$ b p. $-\frac{9}{4}\, a^2$ b p. p. $-\frac{27}{64}\, a^6$) æquiualet 125. *Præſtat hæc exemplis illuſtrare numerorum.*

At verò ex cubica multiplicatione illius radicis vniuerſalis, fieri iam dictum productum, adiſces ex paradigmate adiuncto; etenim, vt habeatur quadratum ſatis eſt illud multiplicandum;

b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$
b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$

$-\frac{3}{4}\, a^2$ b p. † $\frac{9}{16}\, a^4$
b p. p. $-\frac{3}{4}\, a^2$ b p.

b p. p. $-\frac{6}{4}\, a^2$ b p. † $\frac{9}{16}\, a^4$
b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$

$-\frac{3}{4}\, a^2$ b p. p. † $\frac{18}{16}\, a^4$ b p. $-\frac{27}{64}\, a^6$
b ſ.ſ. $-\frac{6}{4}\, a^2$ b p. p. † $\frac{9}{16}\, a^4$ b p.

℞ (b ſ.ſ. $-\frac{9}{4}\, a^2$ b p. p. † $\frac{27}{16}\, a^4$ b p. $-\frac{27}{64}\, a^6$)

liberare à parentheſi; Vnde ℞ (b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$), quadraticè ducta facit b p $-\frac{3}{4}\, a^2$; hoc autem ducendum eſt in ℞ (b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$), ad id autem, vt conſtat ex Artis præceptis oportet id quadraticè ducere; ſed b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$, quadraticè ductum facit b p. p. $-\frac{6}{4}\, a^2$ b p. † $\frac{9}{16}\, a^4$, quo ducto in b p. $-\frac{3}{4}\, a^2$; fit ℞ (b ſ.ſ. $-\frac{9}{4}\, a^2$ b p. p. † $\frac{27}{16}\, a^4$ b p. $-\frac{27}{64}\, a^6$). Quæ vt numeris illuſtrata reddantur hæc ſubiecimus.

Numerorum enim tractatione plurimùm hæc illuceſcet pragmatia. Obſeruandum tamen eſt in primis pretium ſingulorum membrorum, ſi videlicet in numeros transferantur, iiſque explicentur; ita fiet, vt omnis difficultas de medio ſublata; ſit ad ipſarum enim ſpecierum declarationem non mediocriter conducit numeris illas interpretari. *Numerorum tractatio maximè ad Specioſa cognitionem conducit.*

Hic autem aduerte idem eſſe exempli gratia ſcribere $\frac{3}{4}\, a^2$ b p. ac eſt ſcribere $\frac{3}{4}$ b p. a^2. Quia tamen fortaſſe Tyronibus videtur expreſſius ſignificatum, vt vtar eodem exemplo $\frac{3}{4}\, a^2$, multiplicatum per b p. ſcribendo priori modo, quàm ſecundo; propterea hoc loco in ipſorum gratiam huiuſmodi ſcribendi formula vſi ſumus, cùm alioquin, vt in Specioſa conſtabit familiarius ſit nobis ſecundum ſcribendi modum vſurpare. Vnde potius ſcribere conſueuimus verbi gratia b a, quàm a b; & ſi in idem omninò recidat; quod etiam aliàs ſuperiùs aduerſimus. *Monitum.*

	217 — 192
	217 — 192
	— 41664 † 36864
47089 — 41664	
47089 — 83328 † 36864	
	217 — 192
— 9041088 † 15998976 — 7077888	
10218313 — 18082176 † 7999488	
34216777 — 34201152	

† $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. ☰ 15998976	— $\frac{3}{4}$ a² b p.p. ☰ 9041088
† $\frac{9}{16}$ a⁴ b p. ☰ 7999488	— $\frac{27}{64}$ a⁶ ☰ 7077888
† b ſ.ſ. ☰ 10218313	— $\frac{9}{4}$ a² b p.p. ☰ 18082176
34216777	34201152
34201152	
15625	
1 2 5 cubus ex 5, cui reſpondet	
℞ (b p. — $\frac{1}{4}$ a²)	

Solidorum autem aggregatum eſt 1 $\frac{1}{2}$ a b p. † ℞ (b ſ.ſ. — $\frac{3}{4}$ a² b p.p.). Hoc eſt 5208, plus 1085, hoc eſt 6293. At verò cuborum aggregatum eſt ℞ ($\frac{9}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) † 1 $\frac{1}{2}$ a b p. † ℞ (b ſ.ſ. † $\frac{27}{16}$ a⁴ b p. — $\frac{9}{4}$ a² b p.p. — $\frac{27}{64}$ a⁶) hoc eſt autem, quod intendimus. De his tamen in ſequentibus redibit ſermo.

Ad Theorematis autem demonſtrationem ſuperius repetatur paradigma.

A	B	E	H	K	M
16	217	624	64	25	13
I 8					
C	D	F	G	L	N
4096	3472	256	39	5	3
O	P	Q	R	S	T
2821	2197	624	651	27	624

Demonſtratio primæ partis. Quandoquidem ſubtracto B, ex F, remanet G, & hoc ſubtracto ex H, quadrato ipſius I; remanet K, cuius latus quadratum L, additum ad I, facit M; proinde aggregatum ipſorum C, & P, nempe cuborum ex A, & M, æquabitur [a] D, plus O, hoc eſt producto ex A, in B, vnà cum producto ex B, in M; Vtrinque ſublatis P, D; remanebit O, minus P, æqualis C, minus D; Sed O, minus P; æqualis eſt Q; ergo C, minus D, æquabitur Q. At verò C, minus D, æqualis eſt E, ergo Q, æquabitur E.

a. Ex prima Lēmatis parte.

Demonſtratio ſecũdæ partis. Non diſſimiliter, quoniam B, ſubtracto ex F, remanet G, & hoc ſubtracto ex H, quadrato ipſius I, remanet K, cuius radix quadrata L, ſubtracta ex I, relinquit N; proinde aggregatum ipſorum C, & S, nempe cuborum ex A, & N, æquabitur [b] D, plus R, hoc eſt producto ex A, in B, vnà cum producto ex B, in N. Vtrinq; ſublatis S, & D, remanebit C, minus D, æqualis R, minus S; Sed C, minus D, eſt æqualis E; ergo R, minus S, æquabitur E. Sed R, minus S, eſt æqualis T; ergo T, æquabitur E. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

b. Ex ſecundæ Lemmatis parte.

De

De explicandis æquationibus affectis ſub Quadrato.

CAPVT XXIV.

VT multi laboris eſt explicare æquationes cubicas affectas ſub latere, ita quidem, & illas, quæ ſub quadrato afficiuntur; hoc itaque in loco nos huiuſmodi æquationum explicationem aggrediemur, atque conabimur vniuerſalia præcepta tradere demonſtrationibus firmata. *Opus laborioſum eſt explicare huiuſmodi radices.*

Si igitur æquatio fuerit, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato; dataque coefficiente longitudine; præceptem erit vt infra.

De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

AD explicandam hanc æquationem plerique hoc præcepto vſi ſunt: *Præceptum.*

Cubus è tertia parte numeri quadratorum duplicetur, hoc autem duplo ſubtracto è numero abſoluto æquationis ſumatur triplum quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, & prouenient res æquales cubo, & numero; ſi duplum cubi fuerit maius numero æquationis; vel prouenient res cum numero æquales cubo, ſi duplum cubi minus ſit numero æquationis; vel res æquales cubo, vbi differentia numerorum nulla ſit, inde æquatione inuenta minuere oportet ab ea tertiam partem numeri quadratorum, & reſiduum eſt rei æſtimatio.

Itaque ſi fuerit 1 C † 6 Q = 100, numeri quadratorum tertia pars eſt 2, cuius cubus eſt 8, huius autem duplum eſt 16, quo ſubtracto ex 100, remanet 84, ſumatur verò tertia pars numeri quadratorum, nimirum 2, cuius quadratum eſt 4, huius triplum eſt 12, & erit numerus rerum addendus ſuperiori reſiduo 84, ita vt fiat æquatio 1 C = 84 † 12 R, ſeu 1 C — 12 R = 84; huius autem æquationis radix eſt ℞ C (42 † ℞ 1700) † ℞ C (42 — ℞ 1700), à quo ſubtrahatur 2, tertia pars numeri quadratorum, & fiet ℞ C (42 † ℞ 1700) † ℞ C (42 — ℞ 1700) — 2; quamobrem æquationis initio propoſitæ radix erit ℞ C (42 † ℞ 1700) † ℞ C (42 — ℞ 1700) — 2.

Propoſita ſit explicanda æquatio 1 C † 6 Q = 2592. Tertia pars numeri quadratorum eſt 2, cuius cubus eſt 8, huius duplum eſt 16, quo ſubtracto ex 2592, remanet 2576.

At verò, tertia pars numeri quadratorum eſt 2, cuius quadratum eſt 4, huius triplum eſt 12; proueniet igitur æquatio 1 C — 12 R = 2576. Huius æquationis radix eſt 14; vt patet ex ijs, quæ ſuo loco tradita fuerunt; ergo iuxta præceptum Radix æquationis propoſitæ erit 12, nempe 14, radix nouæ, ac transformatæ æquationis

tionis, minus tertia parte numeri quadratorum. Nam cubus ex 12, eſt 1728, cui ſi addideris 864, productum abs 144, radicis quadrato in 6, numerum quadratorum, fit 2592. Initio igitur æquationis propoſitæ radix eſt 12.

Exemplum. Rurſus propoſita ſit æquatio 1 C † 9 Q = 540.

Tertia pars numeri quadratorum eſt 3, cuius cubus eſt 27, huius duplum eſt 54, quo ſubtracto ex 540, remanet 486. Deinde tertia pars numeri quadratorum eſt 3, vt diximus, huius quadratum eſt 9, cuius triplum eſt 27. Itaq; noua æquatio iuxta præceptum traditum erit 1 C — 27 R = 486. Huius autem æquationis radix eſt 9, vt conſtat ex traditis ſuo loco; ergo iuxta ſuperius præceptum, æquationis propoſitæ radix erit 6; nempe 9, radix æquationis transformatæ minus 3, ter-
Explicatio. tia parte numeri quadratorum. Etenim cubus ex 6, eſt 216, cui ſi addideris 324, productum ex 36, quadrato radicis in 9, numerum quadratorum, fit 540; comparationis homogeneum initio æquationis propoſitæ.

Exemplum. Inſuper ſit æquatio explicanda 1 C † 12 Q = 2200. Tertia pars numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, quem ſi ſubtraxeris ex 2200, fit reſiduum 2072. At verò tertia pars numeri quadratorum, vt diximus eſt 4, cuius quadratum eſt 16, huius triplum eſt 48, & hic erit numerus radicum nouæ æquationis, cuius comparationis homogeneum eſt 2072. Itaq; erit æquatio 1 C — 48 R = 2072.

Huius æquationis radix eſt 14. Vt conſtat ex ijs, quæ ſuperiùs docuimus; Quamobrem hinc conſtat radix æquationis initio propoſitæ, ea erit enim 14, minus 4, hoc eſt radix nouæ æquationis, minus tertia parte numeri quadratorum, nem-
Explicatio. pe 10. Cubus enim ex 10, eſt 1000, cui ſi addideris 1200, productum ex 100, radicis iam dictæ quadrato in 12, quadratorum numerum; fit 2072 &c.

Tamen vt hæc demoſtrentur, oportet Theorema illud oſtendere.

THEOREMA.

SIT numerus A, cuius latus cubicum ſit B, at verò C, ductus in D, quadratum ipſius B, producat E, quo addito ad A, proueniat F, at verò G, ſit tertia pars, ipſius C, eius cubus ſit H, huius verò duplum ſit I, quo ſubtracto ex F, remaneat K; Sit autem L, numerus, cuius cubus ſit M, ſit verò N, triplum P, nempe triplum quadrati ipſius G, ductum autem in L, producat O, quo ſi multetur M, remaneat K.

Oſtendendum eſt L, æqualem eſſe aggregato ex B, & G.

A	B	C	D	E	F
1728	12	15	144	2160	3888
G	H	I			
5	125	250			
K	L	M	N	O	P
3638	17	4913	75	1275	25

Ad huius Theorematis demonſtrationem præmittamus neceſſe eſt illud.

LEMMA

L E M M A.

SI fuerit Binomium, ita vt cubus primi nominis, plus ſolido à quadrato eiuſdem nominis primi, in triplum nomen ſecundum, ſit æqualis cuidam numero, nempe comparationis homogeneo; at verò cubus numeri cuiuſdam, minus ſolido facto à triplo quadrato nominis ſecundi in eundem numerum, æqualis fuerit ſuperiori comparationis homogeneo, minus duplo cubo ſecundi nominis; ille numerus aſſumptus vtriuſque nominis aggregatum erit.

Sit Binomium conſtans ex duobus nominibus B, G. Sit autem A, cubus ex B, plus E, ſolido, à triplo nomine ſecundo G, cuiuſmodi eſt C, in D, quadratum ex B, æqualis F; at verò eſto L, cuius cubus M, minus O, ſolido ab N, triplo P, quadrato ipſius G, ſecundi nominis in L, æqualis ſit F, minus I, duplo cubo eiuſdem G. Dico L, æqualem eſſe aggregato ex B, & G. Et quidem iuxta Specioſam Analyſin, vt loquamur; Si $a^3 \dagger 3\,b\,a^2$, æquetur z ſol; ſit autem e, æqualis a † b, etiam $e^3 - 3\,b^2\,e$, æquabitur z ſol. $- 2\,b^3$. Effiãta enim radix eſt e, æqualis a † b, ita fit vt e, excedat a, interuallo b; atque adeo e — b, æquetur a. Quadratum autem ex e — b, eſt $e^2 - 2\,b\,e \dagger b^2$, & cubus eſt $e^3 - 3\,b\,e^2 \dagger 3\,b^2\,e - b^3$, cui addito $3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e \dagger 3\,b^3$, nempe producto ab $e^2 - 2\,b\,e \dagger b^2$, in 3 b, fiet $e^3 - 3\,b^2\,e \dagger 2\,b^3$, æqualis $a^3 \dagger 3\,b\,a^2$, ſed hoc erat æquale z ſol. ergo $e^3 - 3\,b^2\,e \dagger 2\,b^3$, æquabitur z ſol. & per Antitheſin $e^3 - 3\,b^2\,e$, æquabitur z ſol. $- 2\,b^3$. De hoc iterum paulò infra. *Reſolutio Specioſa.*

B		G	E	
12		5	2160	
A		C	I	
1728		15	250	
	D		M	O
	144		4913	1275
	F		N	P
	3888		75	25
	L			
	17			

Vnde fit, vt ſi A, cubus ex B, plus E, ſolido à D, quadrato eiuſdem B, in C, triplum ipſius G, fuerit æqualis F, quod etiam cubus ex L, aggregato vtriuſque nominis B, G, minus ſolido ab L, in N, triplum P, quadratum ipſius G, æqualis ſit F, minus I, cubo duplo eiuſdem G.

Atque adeo ſi A, cubus ex B, plus E, ſolido à D, quadrato eiuſdem B, in C, triplum ipſius G, fuerit æqualis F, ſitque numerus quiſpiam, cuius cubus multatus ſolido ab eodem numero in N, triplum P, quadratum ipſius G, æqualis ſit F, minus I, duplo cubo eiuſdem G; hunc numerum æqualem eſſe aggregato vtriuſque nominis B, G, &c.

Latus igitur, cuius cubus multatus triplo ſolido ab ipſo in quadratum ſecundi nominis æqualis eſt comparationis homogeneo, minus duplo cubo ſecundi nominis eodem comparationis homogeneo exiſtente, cui erat æqualis cubus primi nominis plus triplo ſolido à quadrato eiuſdem in ſecundum nomen, latus inquam illud æquale eſt aggregato vtriuſque nominis. De his tamen in ſecunda huius Operis parte copioſè tractandum erit. *Concluſio.*

Lemmatis autem ſuperioris veritate oſtenſa, facillimum erit Theorema ipſum demonſtrare.

Quandoquidem L, eſt latus, cuius cubus M, multatus ſolido O, ab N, triplo P, quadrato ipſius G, in L, æqualis eſt K, nimirum F, minus I, duplo H, cubo ipſius G; propterea ex eo, quod præmiſſum eſt, Lemmate; L, latus æquabitur aggregato duorum nominum B, & G. Quod erat operæ pretium demonſtrare. *Demõſtratur principale intentum.*

Antiqui,

Digitized by Google

Antiqui, autem cum hæc ignoraſſent, vel æquationes huius generis explicare aggreſſi, fruſtra tempus triuerunt; vel denique, ſi qui ſunt, qui tamen ſunt pauci, quibus huiuſmodi æquationum explicatio innotuerit, tamen, ignorata cauſa; perfectam rei notitiam aſſequi non potuerunt. Hæc itaque demonſtrauimus, quemadmodum nobis erat in animo.

Alijs exemplis præceptum illuſtratur. Quæ nihilominus, vt exactiùs intelligantur; iuuabit alijs exemplis, præceptum illuſtrare.

Exemplum. Propoſita ſit æquatio 1 C † 8 R ⨪ 40. Tertia pars numeri quadratorum eſt 2 $\frac{2}{3}$, cuius cubus eſt 37 $\frac{11}{27}$, hoc autem ſubtracto ex 40; fit reſiduum 2 $\frac{2}{27}$, & hoc erit comparationis homogeneum nouæ æquationis.

Deinde ad habendum coefficiens planum (eſt enim futura æquatio affecta ſub latere), ſumatur tertia pars numeri quadratorum, eaque eſt 2 $\frac{2}{3}$, vt vidimus huius quadratum eſt 7 $\frac{1}{9}$, cuius triplum eſt 21 $\frac{1}{3}$. Quamobrem fiet æquatio 1 C — 21 $\frac{1}{3}$ R ⨪ 2 $\frac{2}{27}$. Huius autem ęquationis radix eſt 4 $\frac{1}{3}$. Vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco docuimus.

Explicatio. Si quidem huius cubus eſt 101 $\frac{17}{27}$, at verò productum ex 21 $\frac{1}{3}$, in 4 $\frac{1}{3}$ eſt 99 $\frac{15}{27}$, quo ſubtracto ex 101 $\frac{17}{27}$, fit reſiduum 2 $\frac{2}{27}$. Cum itaque radix huius nouæ æquationis ſit 4 $\frac{2}{3}$. Veteris æquationis radix erit 2. Hæc tamen iam explicata fuerunt.

Exemplum. Supponamus æquationem 1 C † 9 Q ⨪ 44. Tertia pars numeri quadratorum eſt 3, cuius cubus eſt 27, huius duplum 54, à quo ſi dempſeris 44, remanet 10, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Itaque ſumatur tertia pars eadem, quæ eſt 3, huius quadratum eſt 9, cuius triplum eſt 27, & hic erit coefficiens ſub latere, nouæ æquationis.

Vnde fiet 27 R — 1 C ⨪ 10. Euadit enim æquatio inuersè negata, quando duplum cubi è tertia parte coefficientis longitudinis maius eſt comparationis homogeneo. Quamobrem extrahatur radix, eaq; eſt 5.

Explicatio. Productum enim ex 27, in 5, eſt 135, cui ſi ſubducatur 125, cubus eiuſdem 5, fit reliquum 10. Igitur veteris propoſitæ æquationis radix erit 5, minus 3.

Hoc eſt latus nouæ æquationis minus triente coefficientis veteris æquationis; huiuſmodi verò eſt 2.

Exemplum. Propoſita ſit æquatio 1 C † 15 Q ⨪ 162. Tertia pars numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum eſt 250. Differentia autem inter 162, comparationis homogeneum, & 250, duplum productum eſt 88, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Tertia pars iam dicta 5, quadraticè ducta facit 25, cuius triplum eſt 75, pro coefficiente nouæ æquationis. Itaque fiet æquatio 75 R

Explicatio. — 1 C ⨪ 88. Huius æquationis radix eſt 8, hic enim ductus in 75, facit 600, cui ſi ſubduxeris 512, cubum ex 8, fiet reliquum 88. Quare veteris æquationis radix erit 8, minus 5, nempe latus nouæ æquationis, minus triente coefficientis longitudinis æquationis antiquæ; huiuſmodi vero eſt 3,

Quando duplum cubi è triente coefficientis eſt maius comparationis homogeneo. Sic itaque procedendum, cùm duplum cubi è triente coefficientis eſt maius comparationis homogeneo.

At verò ſi duplum prædictum fuerit æquale ipſi comparationis homogeneo, facta ſubtractione nihil remanet.

Quando duplum prædictum eſt æquale comparationis homogeneo Ita fit, vt cubus ſit æqualis ſolido ſub latere, & ipſo coefficiente plano, vnde extracta radix, multari debeat triente coefficientis longitudinis æquationis veteris. Vt ſi ſit 1 C † 6 Q ⨪ 16. Tertia pars numeri quadratorum eſt 2, cuius cubus eſt 8, & huius duplum eſt 16, quo ſubtracto ex 16, comparationis homogeneo nihil remanet fit ergo æquatio, ſi accipiatur triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis, pro coefficiente londitudine nouæ æquationis, fit in quam 12 R — 1 C ⨪ 0, quare 1 C, æquabitur 12 R. Huius autem æquationis radix eſt ℞ 12; quare Radicis valor, in veteri æquatione comparabitur, ſi ex ℞ 12, auferatur 2, triens coefficientis veteris æquationis; atq; adeo erit ℞ 12 — 2.

Etenim cubus è ℞ 12 — 2, eſt ℞ 6912 — 80; at verò quadratum eſt † 16 — ℞ 192, quo ducto in 6, numerum quadratorum, fit productum † 96 — ℞ 6912, hoc autem addito ad illud, fit 16, vt operanti perſpicuum eſſe poteſt.

Cæterum

Cæterùm cubus è ℞ 12 — 2; facilè comparatur ſine tędio prolixæ multiplicationis, & additionis numerorum irrationalium, hoc modo.

Quoniam cubus è reſiduo conſtat cubo maioris nominis, minus ſolido ter à quadrato maioris nominis in nomen minus, plus ſolido ter à nomine maiori in quadratum nominis minoris, minus cubo nominis minoris. Ob id ſume cubum è ℞ 12, cuiuſmodi eſt ℞ 1728. Deinde ſolidum ter à 12, quadrato maioris nominis in 2, nomen minus, cuiuſmodi eſt 72. Mox hoc ex illo ſi ſubtrahatur, fit ℞ 1728 — 72, cui addere oportet ſolidum ter à nomine maiori, in quadratum minoris nominis, vt eſt ℞ 1728, quo addito ad ℞ 1728 — 72, fit ℞ 6912 — 72, à quo oportet ſubtrahere 8, cubum nominis minoris, & fit reſiduum ℞ 6912 — 80 &c.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 24 Q ⫶ 448. Tertia pars numeri quadratorum eſt 8, cuius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024; Differentia autem inter 448, & 1024, eſt 576, pro numero abſoluto nouæ æquationis. Tertia verò pars illa 8, numeri quadratorum, ducatur quadraticè, & fiet 64, cuius triplum eſt 192. *Exemplum.*

Itaq; fiet æquatio 192 R — 1 C ⫶ 576. Huius æquationis radix eſt 12, vt conſtat ex præceptis traditis; hic enim ductus in 192, facit 2304, à quo ſi ſubtrahatur 1728, cubus ex eodem, remanet 576.

Quamobrem æquationis veteris radix erit 12, minus 8, hoc eſt latus nouæ ęquationis abiecto triente numeri quadratorum æquationis antiquæ.

Rectè igitur adhibebitur ſymbolum ∾, ad omnem amphiboliam de medio tollendam; quamobrem æquatio illa $c^3 - 3\,b^2 c$ ⫶ z ſol. $- 2\,b^3$, eſt ita ſcribenda c^3 ∾ $3\,b^2 c$ ⫶ z ſol. ∾ $2\,b^3$. Vnde æqualitas inter differentias exercetur. Cuius eſt ſenſus, vt ſi c^3, fuerit maior quàm $3\,b^2 c$, hoc intelligatur ex illo ſubtractum. Vel contra ſi $3\,b^2 c$, maius fuerit quam c^3, hic ex illo ſublatus intelligatur. Item ſi z. ſol. fuerit maius quam $2\,b^3$, hoc illi ſubdum intelligatur. Vel contra ſubtrahatur z ſol. ex $2\,b^3$, ſi intelligatur z ſol. minus, quàm $2\,b^3$; Sed hæc etiam ſuperiùs ſuo loco fuerunt indicata.

Præceptum autem ſic potius eſt enunciandum.

Primò ſumatur tertia pars numeri quadratorum, quæ cubicè multiplicetur; inter duplum hoc productum, & comparationis homogeneum ſumatur differentia, quæ ſtatuenda eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis. *Præceptum.*

Secundò accipiatur triplum quadratum trientis numeri quadratorum, illud ſtatuatur coefficiens planum nouæ æquationis, quæ erit directè negatiua, cùm duplum cubi è triente numeri quadratorum minus eſt comparationis homogeneo; erit autem inuersè negatiua, cùm duplum prædictum eſt maius; vel ſimplex inter C, & R, cum fuerit æquale comparationis homogeneo.

Tertiò nouæ æquationis radix eſt exhibenda, cui amputari debet triens coefficientis ſeu numeri quadratorum veteris æquationis.

Superior autem methodus maximè Geometriæ eſt conſentanea.
Sic etiam explicatur æquatio.

Numerus quadratorum, ſtatuatur numerus radicum nouæ æquationis, & ſumatur radix quadrata numeri abſoluti æquationis antiquæ, pro numero abſoluto nouæ æquationis. Æquatio autem affirmatiua in negatam directè, ſit tranſmutata; Huius radix in ſe quadraticè ducatur, à producto auferatur numerus quadratorum, vel quod idem eſt numerus radicum; reſiduum enim eſt æquationis propoſitæ, ſiue veteris, radix. *Præceptum.*

Propoſita ſit æquatio 1 C † 5 Q ⫶ 144, tranſmutetur in hanc 1 C — 5 R ⫶ 12. Huius æquationis radix eſt 3, cuius quadratum eſt 9, à quo ſi dempſeris 5, numerum radicum, ſeu quadratorum remanet 4, radix prioris æquationis. *Exemplum.*

Propoſita ſit ęquatio 1 C † 8 R ⫶ 1024; fiet etiam æquatio huiuſmodi 1 C — 8 R ⫶ 32. Huius æquationis radix eſt 4, vt conſtat ex præceptis traditis; huius quadratum eſt 16, à quo ſi dempſeris 8, numerum radicum nouæ, vel quadratorum, veteris æquationis, remanet 8, pro radice æquationis propoſitæ. *Exemplum.*

Propoſita

Propoſita ſit æquatio 1 C † 13 Q = 3600; fiet etiam æquatio huiuſmodi 1 C — 13 R = 60. Huius æquationis radix eſt 5, vt conſtat ex ſuprà traditis, cuius quadratum eſt 25, à quo ſi dempſeris numerum radicum nouæ æquationis, vel quadratorum æquationis veteris; fit reſiduum 12, pro radice initio propoſitæ, ſeu veteris æquationis.

Methodus hæc Geometriæ cōſentanea.

Hæc Methodus Arithmeticæ congruit; In Geometricis enim, vt dicebat Adraſtus, heterogenea ſe mutuo non afficiunt; neque inuicem comparantur; non enim linea ſuperficiei, vel corpori additur, neque ſubducitur; quemadmodum neque contra corpus, vel ſuperficies lineæ &c. Comparatio enim homogenea requirens, heterogenea reſpuit; quo neceſſe eſt æqualitatis, vel inæqualitatis, tàm maioris, quàm minoris rationem inter homogenea verſari.

Hæc igitur vt oſtendantur, ad Arithmeticam confugiendum, & quidem ad id quod ſequitur Theorema conducit.

THEOREMA.

SINT numeri A, B; & quidem ipſius A, latus cubicum ſit C, cuius quadratum D, ductum in B, faciat E; ſed A, plus E, æqualis ſit F.

Deinde ſit G, cuius latus cubicum H, quod ductum in B, faciat I, ſitq; G, minus I, æqualis K.

Oſtendendum eſt, quod ſit ex H, quadratum L, minus B, æquale eſſe C.

A	B	E	F
1728	13	1872	3600
C	D		
12	144		
G			
125			
	I	K	
	65	60	
H	L		
5	25		

Hoc igitur Theorema demonſtrandum foret ad præceptum poſtremo loco poſitum oſtendendum.

Aliter etiam hoc æquationis genus licet explicare.

Propoſita ſit æquatio,

$$a^3 \dagger b\, a^2 = b\, d^2.$$

Quoniam igitur:

SI ſint quatuor quantitates continuè proportionales; cubus à differentia inter primam, & tertiam, plus ſolido à quadrato ex huiuſmodi differentia in minorem extremam, æqualis

æqualis eſt ſolido ab eodem minori in quadratum differentiæ inter ſecundam, & quartam.

Propterea in æquatione propoſita coefficiens longitudo, eſt minor inter extremas, differentia verò ſecundæ, & quartæ eſt magnitudo, cuius quadratum oritur ex applicatione ſolidi comparationis homogenei ad coefficientem longitudinem; eò igitur res deducitur, vt ſi fuerit æquatio huiuſmodi a³ † b a² ⊏ b d².

Sit quidem b, minor inter extremas; differentia verò ſecundæ, & quartæ ſit d, & a, radix differentiæ primæ, & tertiæ, quod ex Zetetico deprehenſum eſt.

Data prima minori inter extremas, & differentia ſecundæ, & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium, inuenire differentiam inter primam, & tertiam. *Zeteticum.*

Superior autem propoſitio de quatuor continuè proportionalibus, hunc oſtendetur in modum. *Propoſitio ſuperior oſtendenda aſſumitur.*

Sint quatuor continuè proportionales b, c, f, g, ita vt differentia inter minorem b, & f, tertiam, ſit a; at verò differentia inter c, ſecundam, & g, quartam ſit d. Dico Cubum ex a, plus b a² æquari b d².

Quandoquidem eſt vt b, ad c, ita f, ad g, ergo etiam alternè erit vt b, ad f, ita c, ad g; quare etiam vt b, ad f — b, hoc eſt ad a, ita c, ad g — c, hoc eſt ad d, cum itaque ſit vt b, ad a, ita c, ad d, & eſt vt c, ad d, ita rectangulum c d, ad d², ergo vt b, ad a, ita erit rectangulum c d, ad d²; Sed rectangulum c d, æquale eſt rectangulo a f, ſiquidem quatuor illi termini b, c, f, g, ſunt continuè proportionales, atque adeo differentiæ ipſorum, ſiuè illi continuè, ſiue alternatim ſumantur ſunt in eadem ratione cum ipſis terminis, ac proinde, vt c, ad f, ita a, ad d, & permutando vt c, ad a, ita f, ad d, quare rectangulum c, d, æquabitur rectangulo a f, ergo erit vt b, ad a, ita rectangulum a f, ad quadratum d; ſed rectangulum a f, idem eſt quod a² † b a, ergo vt b, ad a, ita a² † b a ad d², quamobrem factum ſub medijs æquabitur facto ſub extremis; vnde a³ † b a², æquabitur b d². Quod oportebat oſtendere. *Demonſtratio.*

Itaque ſi fuerit æquatio 1 C † 2 Q ⊏ 28800, quatuor ſunt concipiendæ quantitates continuè proportionales; quorum prima minor inter extremas, ſit quadratorum numerus 2; at verò differentia inter ſecundam, & quartam ſit 120, latus ortiuæ quantitatis, ex applicatione 28800, comparatienis homogenei, ad 2, coefficientem, ſiue quadratorum numerum, radix autem eſt 30, differentia inter primam, & tertiam è quatuor continuè proportionalibus è quibus, vt dicebamus, ſunt datæ, & prima minor inter extremas 2, & 120, differentia inter ſecundam, & quartam, ex quibus datis oportet inquirere differentiam inter primam, & tertiam, ita enim æquationis radix innoteſcet. *Explicatio.*

De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

AD hanc æquationem explicandam, ab alijs traditum hoc præceptum inueni mus.

Dimidio numeri abſoluti addatur cubus tertiæ partis; numeri quadratorum, aggregatum autem quadraticè multiplicetur, & à producto abijciatur cubus quadrati tertiæ partis reſiduum autem radicis adde, & minue dimidio aggregati, quod in ſe duxeras, habebis *Præceptum.*

enim Binomium, & Apotomen, quorum radices cubicas iunge, & eis adde tertiam partem numeri quadratorum; totum enim inde conſurgens, radicis æſtimationem repræſentabit.

Exemplum. Itaque ſi propoſita ſit æquatio 1 C — 6 Q = 20, ſumatur 2, tertia pars numeri quadratorum, cuius cubus eſt 8, quo addito ad 10, dimidium numeri abſoluti, fit 18, à cuius quadrato 324, ſubtrahatur 64, cubus quadrati ex 2, reſidui verò 260, ſumatur radix quadrata, quæ addita ad 18, facit 18 + ℞ 260, & ab eodem ſubtracta facit 18 — ℞ 260, horum autem radices cubicæ ſunt inter ſe addendæ, & aggregato addenda eſt tertia pars numeri quadratorum, vt habeatur propoſitæ radicis æſtimatio; itaque ℞ (18 + ℞ 260) + ℞ (18 — ℞ 260) + 3 erit initio propoſitæ æquationis radix.

Præceptum autem ad huiuſmodi æquationes explicandas illud erit omnibus numeris abſolutum, quod ex Analyſi Specioſa deducitur; idq; paulò infra explicabimus.

Itaque ſupponamus $a^3 - 3\,b\,a^2 = z$ ſol. Hoc ſuppoſito.

Quandoquidem æquationis radix eſt a, effingenda eſt radix e, cui ſit æqualis a — b, adeo vt e + b, ſit æqualis a. Cumque poteſtas eſſet cubus, fiat cubus ex e + b, qui quidem eſt $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$; hoc igitur ſubſtituto, in locum ipſius a^3, quia poteſtas erat negatè affecta ſub quadrato, propterea $e^2 + 2\,b\,e + b^2$, quadratum ex e + b, ducatur in e + b, & proueniet $3\,b\,e^2 + 6\,b^2\,e + 3\,b^3$, ſubtrahendum ex $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$, & remanebit facta ſubtractione $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$, quod æquabitur $a^3 - 3\,b\,a^2$, ſed hoc erat æquale z ſol. ergo $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$, æquabitur z ſol. & per antitheſin $e^3 - 3\,b^2\,e$, æquabitur z ſol. + $2\,b^3$; Quamobrem æquatio illa, ad ſimpliciorem hanc erit reuocata, de quo rurſus infra. Hinc autem colligitur Præceptum.

Præceptum. *Duplum cubi è triente numeri quadratorum addatur comparationis homogeneo; Aggregatum enim erit comparationis homogeneum nouæ æquationis; in qua cubus afficitur ſub latere, & coefficiens planum erit triplum quadratum è triente eiuſdem numeri quadratorum. Huius autem nouæ æquationis radix adinuenta, augeatur eodem triente numeri quadratorum æquationis antiquæ; hoc enim aggregatum, erit eiuſdem æquationis radix.*

Hæc vt melius intelligantur, exemplis illuſtrabimus.

Exemplum I. Propoſita ſit æquatio 1 C — 6 Q = 864. Tertia pars numeri quadratorum eſt 2, cuius cubus eſt 8, huius duplum eſt 16, quo addito ad 864, fiet 880, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis.

Deinde quadratum è triente iam dicto numeri quadratorum eſt 4, cuius triplum eſt 12; pro coefficiente plano æquationis nouæ, quæ erit negatæ affectionis, & quidem directè in qua cubus nimirum afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano; vnde erit 1 C — 12 R = 880. Huius radix eſt 10, vt conſtat ex præceptis ſuo loco traditis; itaque 10, ſatisfacit æquationi nouæ; proinde 10, plus 2, triente coefficientis veteris æquationis, nempe 12, erit ipſius æquationis initio propoſitæ radix, & ita eſt, nam cubus ex 12, eſt 1728, è quo ſi ſubtraxeris 864, factum ex 144, quadrato ipſius 12, in 6, numerum quadratorum, remanebit 864; comparationis homogeneum æquationis propoſitæ.

Exemplum. II. Deinde propoſita ſit æquatio 1 C — 12 Q = 1024. Tertia pars numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, quo addito ad 1024, fit 1152, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Mox autem ſumatur tertia pars numeri quadratorum, nempe 4, cuius quadratum eſt 16, huius triplum eſt 48, pro coefficiente nouæ æquationis, quæ erit 1 C — 48 R = 1152. Huius autem æquationis radix eſt 12, vt conſtat, ex ijs, quæ ſuo loco docuimus; ergo veteris æquationis radix erit 16, nempe latus nouę ęquationis auctum triente numeri quadratorum, & ita quidem eſt; nam cubus è 16, eſt 4096, à quo ſi auferatur 3072, factum ex 256, quadrato ipſius 16, in 12, numerum quadratorum, fit reſiduum 1024; remanet igitur comparationis homogeneum ipſius ęquationis.

Ad ſuptapoſiti pręcepti demonſtrationem illud conducit.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA.

SIT numerus A, cuius latus cubicum ſit B, at verò C, ductus in D, quadratum ipſius B, producat E, quo ſubtracto ex A, remaneat F, at verò G, ſit tertia pars, ipſius C, eius cubus ſit H, huius verò duplum ſit I, quo addito ad F, ptoueniat K; Sit autem L, numerus, cuius cubus ſit M, ſit verò N, triplum P, nempe triplum quadratum ipſius G; ductum autem in L, producat O, quo ſi multetur M, remaneat K.

Oſtendendum eſt L, æqualem eſſe B, minus G.

A	B	C	D	E	F
5832	18	15	324	4860	972
G	H	I			
5	125	250			
K	L	M	N	O	P
1222	13	2197	75	975	25

Ad huius autem Theorematis demonſtrationem præmittendum eſt illud.

LEMMA.

SI fuerit Reſiduum, itaut cubus nominis maioris, minus ſolido à quadrato eiuſdem maioris nominis in triplum nomen minus, æqualis ſit cuidam numero, nempe comparationis homogeneo.

At verò cubus numeri cuiuſdam, minus ſolido à triplo quadrato nominis minoris in eundem numerum, æqualis ſit ſuperiori comparationis homogeneo, plus duplo cubo nominis minoris, ille numerus aſſumptus, ipſorum nominum differentia erit.

Demonſtratio

Sit Reſiduum, cuius nomen maius B; at minus ſit G; ſit verò ex B, cubus A; minus E, ſolido à triplo nomine minori G; cuiuſmodi eſt C, in D, quadratum ex B, æqualis F; At verò eſto L, cuius cubus M, minus O; ſolido ab N; triplo P, quadrato ipſius G; nominis minoris, in L, æqualis ſit F; plus I, duplo cubo eiuſdem G; Dico L, æqualem eſſe differentiæ inter B, & G. Et qui-

B	G	E	
18	5	4860	
A	C	I	
5832	15	250	
D	M	N	O
324	2197	75	975
F	L	P	
972	13	25	

dem iuxta Specioſam Analyſin, vt loquamur. Si $a^3 - 3ba^2$ æquetur z ſol. ſit autem e æqualis $a - b$, etiam $e^3 - 3b^2e$, æquabitur z ſol. $+ 2b^3$. Effecta enim

Specioſa demonſtratio, radix eſt e, æqualis $a - b$, ita fit vt e, excedatur ab a, interuallo b; atque adeo $e + b$, æquetur a; Quadratum autem ex $e + b$, eſt $e^2 + 2be + b^2$, & cubus eſt $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$, à quo ſi ſubtrahatur $3be^2 + 6b^2e + 3b^3$, productum ex 3 b; in $e^2 + 2be + b^2$, quadratum ipſius $e + b$, proueniet $e^3 - 3b^2e - 2b^3$, quod æquabitur $a^3 - 3ba^2$; Sed hoc erat æquale z ſol. ergo $e^3 - 3b^2e - 2b^3$, ęquabitur z ſol. & per antitheſin fiet $e^3 - 3b^2e = z$ ſol. $+ 2b^3$. Quę ſupra etiam inſinuauimus.

Vnde fit, vt ſi ex B, cubus A, minus E, ſolido à D, quadrato eiuſdem B, in C, triplum ipſius G, fuerit æqualis F, quod etiam cubus ex L, differentia ipſorum nominum B, G, minus ſolido ab L, in N, triplum P, quadratum ipſius G, æqualis ſit F, plus I, duplo cubo ipſius G.

Atque adeo ſi ex B, cubus A, minus E, ſolido à D, quadrato eiuſdem B, in C, triplum ipſius G, fuerit æqualis F, ſitque numerus quiſpiam, cuius cubus multatus ſolido ab eodem numero in N, triplum P, quadratum ipſius G, æqualis ſit F, plus I, duplo cubo eiuſdem G, hunc numerum æqualem eſſe differentiæ ipſorum nominum B, G, neceſſe eſt.

Concluſio, Latus igitur cuius cubus multatus triplo ſolido ab ipſo in quadratum minoris nominis æqualis eſt comparationis homogeneo, plus duplo cubo minoris nominis, eodem comparationis homogeneo exiſtente, cui erat æqualis cubus nominis maioris, minus triplo ſolido à quadrato eiuſdem in minus nomen, latus in quam illud æquale eſt differentiæ ipſorum nominum.

De his tamen in ſecunda huius Operis parte copioſè tractandum erit.

Lemmatis autem ſuperioris veritate oſtenſa, facillimum erit Theorema ipſum demonſtrare.

Demõſtratur principale inuentum. Quandoquidem L, eſt latus, cuius cubus M, multatus ſolido O, ab N, triplo P, quadrato ipſius G, in L, æqualis eſt K, nimirum F, plus I, duplo H, cubo ipſius G. Propterea ex eo, quod præmiſſum eſt Lemmate L, latus æquabitur differentiæ nominum B, G. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Aliter etiam licet hoc æquationis genus explicare.

Propoſita ſit æquatio,

$$a^3 - ba^2 = bd^2,$$

Quoniam igitur,

Propoſitio. *SI ſint quatuor quantitates continuè proportionales, cubus ab aggregato prima, & tertia, minus ſolido à maiori, minorue inter extremas in quadratum aggregati prædicti, æqualis eſt ſolido ab eadem prima, minorue inter extremas in quadratum aggregati ex ſecunda, & quarta.*

Propterea in æquatione propoſita coefficiens longitudo, eſt prima maior, vel minor inter extremas, aggregatum verò ſecundæ, & quartæ eſt magnitudo, cuius quadratum eſt magnitudo ortiua ex applicatione comparationis homogenei ad coefficientem longitudine, at verò radix eſt aggregatum primæ, & tertiæ, eò ergo res deducitur, vt ſi fuerit æquatio $a^3 + ba^2 = bd^2$.

Sit

Sit quidem b, prima maior, vel minor inter extremas, aggregatum verò ſecundæ, & quartæ ſit d, & a radix, aggregatum primæ, & tertiæ, quod ex Zetetico deprehenſum eſt.

Data prima, & aggregato ſecundæ, & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium inuenire aggregatum primæ, & tertiæ. *Zeteticum.*

Superior autem propoſitio; de quatuor continuè proportionalibus, hunc, qui ſequitur, in modum oſtendetur. *Superior propoſitio aſſumitur oſtendenda.*

Quandoquidem eſt, vt b, ad c, ita f, ad g, ergo permutando erit etiam vt b, ad f, ita c, ad g, & conuertendo vt f, ad b, ita g, ad c, & componendo vt f, plus b, ad b, ita g, plus c, ad c, & conuertendo vt b, ad f, plus b, ita c, ad g, plus c, ſeu quod idem eſt vt b, ad a, ita c, ad d, ſed vt c, ad d, ita eſt rectangulum c d, ad d^2; ergo vt b, ad a, ita rectangulum c d, ad d^2; at rectangulo c d, æquale eſt rectangulum a f, ſeu quod idem eſt a^2 — b a. Cum enim ſit vt b, ad c, ita f, ad g, erit vt b, ad f, ita c, ad g, atque adeò vt b † f, ſeu a, ad c † g, ſeu d, quemadmodum c, ad f; ac proinde rectangulum c d, æquabitur rectangulo a f, ſiue a^2 — b a; quamobrem erit vt b, ad a, ita a^2 — b a, ad d^2; ac proinde productum ſub medijs, nimirum a^2 — b a^2, æquabitur b d^2; Quod erat operæ pretium oſtendere. *Demõſtratio.*

Itaque ſi fuerit æquatio 1 C — 2 Q ⊐ 36992, quatuor ſunt concipiendæ quantitates continuè proportionales, quarum prima minor, vel maior inter extremas, eſt 2, quadratorum numerus; at verò aggregatum ex ſecunda, & quarta ſit 136, latus ortiuæ quantitatis ex applicatione 36992, comparationis homogenei ad 2; quadratorum numerum, ſiue coefficientem longitudinem, radix autem eſt 34, aggregatum ex prima, & tertia è quatuor continuè proportionalibus, è quibus, vt dicebamus, ſunt datæ, prima minor inter extremas 2, & 136, aggregatum ex ſecunda, & quarta, ex quibus datis oportet inquirere aggregatum ex prima, & tertia; ita enim æquationis radix innoteſcet. *Explicatio.*

De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi.

PRæceptum hoc traditum eſt.

Ducatur radix cubica numeri abſoluti in numerum quadratorum, numerus enim productus erit numerus radicum in æquatione, in qua cubus negatur de huiuſmodi producto, & abſolutus numerus eſt idem, repertis autem pretijs radicum ducatur radix cubica numeri abſoluti in ſe; productumque diuidatur per vtramuis æſtimationem inuentam, & proueniet quæſita radicis pretium. *Præceptum.*

Itaque ſi fuerit æquatio 18 Q — 1 C ⊐ 64, ducatur 18, quadratorum numerus in 4, radicem cubicam numeri abſoluti 64, vt fiat 72, numerus radicum, & proueniet æquatio 72 R — 1 C ⊐ 64, huius porro æquationis radices ſunt 8, & ℞ 24 — 4, per quas diuidatur 16, quadratum ex 4, radice cubica numeri 64, & proueniet 2; atque ℞ 96 † 8, radices æquationis initio propoſitæ. *Exemplo declaratur præceptum.*

Sumatur

Præceptum. *Sumatur differentia inter comparationis homogeneum, & duplum cubum è triente coefficientis longitudinis, ſiue numeri quadratorum; eaque ſit comparationis homogeneum nouæ æquationis; in qua cubus afficitur ſub latere. Deinde ſumatur triplum quadratum eiuſdem trientis, & illud eſto coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis.*

Secundò extrahatur radix æquationis nouæ, ea ſiquidem vel adaucta triente numeri quadratorum, vel ſubducta ex eodem triente; radicem æquationis veteris repræſentabi.

Exemplum I. Propoſita ſit æquatio $9\,Q - 1\,C = 108$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 3; cuius cubus eſt 27; huius duplum eſt 54, quo ſubtracto ex 108, relinquitur iridem 54, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Deinde tertia eadem pars 3, numeri quadratorum quadraticè ducta facit 9, cuius triplum 27, eſt coefficiens planum, ſiue numerus radicum æquationis nouæ. Itaq; fiet æquatio $27\,R - 1\,C = 54$. Huius autem æquationis radix eſt 3, vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradidimus.

Quamobrem adaucta numero 3, triente numeri quadratorum facit 6, radicem initio propoſitæ æquationis. Et quidem 6, ductus in ſe quadraticè facit 36, quo ducto in 9, numerum quadratorum fit 324, cui ſi ſubduxeris 216, cubum ex eodem 6, fit reliquum 108, comparationis homogeneum antiquæ æquationis.

Exemplum. II. Propoſita ſit æquatio $24\,Q - 1\,C = 1728$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 8, cuius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024, quo ſubtracto ex 1728, comparationis homogeneo, fit reſiduum itidem 1728, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Deinde 8, tertia pars iam dicta numeri quadratorum, quadraticè ducta, facit 64, cuius triplum 192, eſt coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Itaque proueniet $192\,R - 1\,C = 1728$. Huius æquationis radix eſt 4, vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradidimus; hæc aucta numero 8, triente iam dicto numeri quadratorum, facit 12, radicem æquationis initio propoſitæ.

Exemplum. III. Propoſita ſit æquatio $30\,Q - 1\,C = 3584$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 10; cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, quo ſubtracto ex 3584, remanet 1584, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. At verò quadratum eiuſdem trientis eſt 100, cuius triplum eſt 300, inſeruiens nouæ æquationi pro coefficiente plano, ſiue numero radicum. Itaque fiet æquatio $300\,R - 1\,C = 1584$. Huius æquationis radix eſt 6, quæ adaucta numero 10, triente numeri quadratorum, veteris æquationis facit 16, pro eiuſdem æquationis radice. Et quidem 256, quadratum ex 16, ductum in 30, numerum quadratorum facit 7680, à quo ſi ſubduxeris 4096, cubum eiuſdem 16, fit 3584, comparationis homogeneum æquationis initio propoſitæ.

Exemplum. IV. Propoſita ſit æquatio $12\,Q - 1\,C = 121$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, à quo ſi ſubtrahatur 121, comparationis homogeneum fit reſiduum 7; pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Quadratum autem prædicti trientis eſt 16, cuius triplum eſt 48, coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Itaque cùm duplum cubi à triente numeri quadratorum eſt maius comparationis homogeneo, contingit æquatio directæ negationis vnde; erit $1\,C - 48\,R = 7$. Huius autem æquationis radix, vt patet, ex ſupra traditis eſt 7, hęc autem adaucta triente iam dicto 4, facit 11, pro radice veteris æquationis.

Exemplum. V. Propoſita ſit æquatio $15\,Q - 1\,C = 196$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum eſt 250, ab hoc ſi ſubtraxeris 196, comparationis homogeneum, fiet reſiduum 54, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. At verò quadratum ab eodem triente eſt 25, cuius triplum eſt 75, & hoc erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, hæc etiam accidit, vt ſit affectionis directè negatę. Itaque fiet $1\,C - 75\,R = 54$. Huius autem æquationis radix, vt conſtat ex præceptis ſuo loco traditis eſt 9; hæc autem adaucta triente iam dicto 5, faciet 14, radicem veteris æquationis.

Exemplum. VI. Propoſita ſit ęquatio $18\,Q - 1\,C = 289$. Tertia pars numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus eſt 216, huius duplum eſt 432, à quo ſi ſubtraxeris 289, compa-

rationis homogeneum remanebit 143, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. Quadratum autem è prædicto triente eſt 36, cuius triplum eſt 108, pro coefficiente plano, ſiue numero radicum nouæ æquationis, & erit æquatio directæ negationis, vt etiam ſupra, vnde fiet 1 C — 108 R = 143. Huius æquationis radix eſt 11, vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradita ſunt, ergo hæc adaucta prædicto triente 6, faciet 17, radicem antiquæ æquationis; & ita eſt nam productum ex 18, numero quadratorum in 289, quadratum ex 17, eſt 5202, à quo ſi ſubtrahatur 4913, cubus ipſius 17, fit reſiduum 289, nempe comparationis homogeneum æquationis propoſitæ.

Propoſita ſit æquatio 30 Q — 1 C = 1408. Tertia pars numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, à quo ſi dempſeris 1408, remanet 592; pro comparationis homogeneo nouæ ęquationis. At verò quadratum è triente iam dicto 10, eſt 100, cuius triplum eſt 300, & erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis; quæ erit inuersę negationis, vnde fiet 300 R — 1 C = 592. Huius æquationis radix eſt 2, qua ſubtracta ex 10, triente iam dicto, remanet 8, pro radice veteris æquationis, & ita eſt, nam productum ex 30, numero quadratorum in 64, quadratum ex 8, eſt 1920, à quo ſi dempſeris 512; cubum ex 8, fit reliquum 1408, comparationis homogeneum. *Exemplum. VII.*

Propoſita ſit ęquatio 24 Q — 1 C = 648. Tertia pars numeri quadratorum eſt 8, cuius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024, à quo ſi dempſeris 648, comparationis homogeneum, fit reliquum 376; pro comparationis homogeneo ęquationis nouę. Quadratum autem à prędicto triente 8, eſt 64, cuius triplum eſt 192; & erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouę ęquationis, & erit ęquatio inuersę negationis, vnde fiet 192 R — 1 C = 376. Huius æquationis radix eſt 2. Vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradita ſunt, quare ſubtracta ex 8, triente iam dicto numeri quadratorum, relinquet 6, pro radice veteris ęquationis, & ita eſt nam productum ex 24, numero quadratorum in 36, quadratum ex 6, eſt 864, à quo ſi abſtuleris 216, cubum ex 6, fit reliquum 648, comparationis homogeneum antiquę ęquationis. *Exemplum. VIII.*

Obſerua autem, quod noua æquatio contingit directę, & inuersę negationis, cum duplum cubi è triente coefficientis longitudinis, ſiue numeri quadratorum eſt maius comparationis homogeneo, ſiue numero abſoluto; Vt ſi ſit ſuperior æquatio 18 Q — 1 C = 289, vbi tertia pars numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus 216, & huius duplum 432, à quo eſt ſubtrahendum 289, comparationis homogeneum, & remanet 143, pro numero abſoluto nouæ æquationis. Quadratum verò à prædicto triente eſt 36; cuius triplum eſt 108, inſeruiens nouæ æquationi tanquam planum coefficiens, vnde fiet æquatio 1 C — 108 R = 143. Quæ eſt affectionis directè negatæ vt patet. *Obſeruatio.*

Huius æquationis radix eſt 11; ſiquidem cubus ex 11, eſt 1331, à quo ſi dempſeris 1188, ſolidum à 108, numero radicum in 11, remanet 143. At verò in huiuſmodi caſu comparatur radix æquationis veteris, augendo hanc nouæ æquationis radicem incremento, ęquale illi trienti 6; addito 6, ad 11, fit 17, manifeſtum eſt autem propoſitæ æquationis 18 Q — 1 C = 289, radicem eſſe 17.

Si verò fuerit æquatio 30 Q — 1 C = 1408; ſecus euenit; & quidem radix nouæ æqnationis ſubducenda eſt ex triente numeri quadratorum. Tertia enim pars numeri quadratorum eſt 10; cuius cuhus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, à quo ſi dempſeris 1408, remanet 592, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. At verò quadratum è triente iam dicto 10, eſt 100, cuius triplum eſt 300, & erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, quæ erit inuersę negationis, itaut ſit 300 R — 1 C = 592, & huius æquationis radix eſt 2, vt conſtat; eſt autem non huic addendus 10, tertia pars numeri quadratorum, ſed potius ex 10, auferri dehet 2, vt comparetur 8, radix æquationis antiquæ.

Sit propoſita æquatio 18 Q — 1 C = 847. Tertia pars numeri quadratorum eſt 6, cuius cuhus 216, huius duplum eſt 432, quo ſubtracto ex 847, remanet 415, pro numero abſoluto nouæ æquationis. Quadratum autem à prædicto triente eſt 36, cuius triplum eſt 108, & ita 108, erit coefficiens planum, vel numerus *Exemplum. IX.*

radicum

radicum nouæ æquationis; ſit igitur æquatio noua 108 R — 1 C = 415. Huius æquationis radix eſt 5, cui addere oportet 6, trientem numeri quadratorum veteris æquationis, vt fiat 11, radix eiuſdem æquationis. Sed hæc obſeruanda ſunt.

Exemplum. X. Propoſita ſit æquatio 12 Q — 1 C = 121. Tertia pars numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, à quo ſi ſubtrahatur 121, comparationis homogeneum fit reſiduum 7. Deſeruit autem 7, nouę ęquationi pro comparationis homogeneo. At verò quadratum è triente 4, iam dicto eſt 16, cuius triplum eſt 48, & hoc erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Itaque fiet æquatio 1 C — 48 R = 13. Vbi vides duplum cubum è triente numeri quadratorum fuiſſe maius comparationis homogeneo. At verò huius ęquationis radix eſt 7, quę aucta triente prędicto facit 11, radicem veteris ęquationis. Vides igitur haberi æquationem in qua poteſtas directè afficitur negatione, & duplum cubi è triente numeri quadratorum eſt maius numero abſoluto; & nihilominus noua æquationis radix augeri debet triente prędicto, vt habeatur radix ęquationis propoſitę.

Exemplum. XI. Deinde propoſita ęquatio ſit 30 Q — 1 C = 1408. Tertia pars numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000; à quo ſi ſubtraxeris 1408, remanet 592, pro numero abſoluto nouę ęquationis. Sed quadratum trientis eiuſdem eſt 100, cuius triplum eſt 300, coefficiens planum ęquationis nouę 300 R — 1 C = 592; cuius ęquationis radix eſt 2, ſubtrahenda ex 10, triente numeri quadratorum, vt habeatur 8, radix ęquationis propeſitę. Vbi vides duplum cubum è triente eſſe maius numero abſoluto; & pręterea radicem ęquationis nouę ſubtrahendam eſſe à triente coefficientis longitudinis veteris ęquationis; Sed hoc intereſſe diſcrimine à pręcedenti, quod ex illa fit noua ęquatio negatiua directè, hic autem fit noua ęquatio negatiua inuersè, pręterea in priori caſu, ad habendam radicem propoſitę ęquationis radix nouę ęquationis augeri debet triente numeri quadratorum; ſed in ſecundo caſu, radix ęquationis nouę quę eſt negatiua inuersè, ſubtrahi debet ex triente numeri quadratorum ęquationis antiquæ.

At ſi propoſita ſit æquatio 15 Q — 1 C = 196. Tertia pars numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum 250, à quo ſi ſubtraxeris 196, comparationis homogeneum, fiet reſiduum 54, & comparationis homogeneum nonæ æquationis. Sed quadratum è triente eodem 5, eſt 25, cuius quadratum eſt 25, huius triplum eſt 75, quod erit eocfficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis; hæc autem erit negatiua inuersè vt 75 R — 1 C = 54. Cuius radix quadrata eſt 9, quæ augeri debet 5, triente numeri quadratorum propoſitæ æquationis, vt proueniat 14, pro radice ipſius æquationis propoſitæ.

Quamuis igitur noua æquatio ſit huiuſmodi, vt in illa, poteſtas negetur de homogeneo; atque adeo affectio ſit per negationem inuersè; nihilominus ad habendam radicem veteris ęquationis, oportet eius radicem augere triente numeri quadratorum; Secus euntingebat in æquatione illa ſuperiùs poſita 30 Q — 1 C = 1408, quæ reducebatur ad illam 300 R — 1 C = 592, cuius radix eſt 2, quę ſubtracta ex 10, triente numeri quadratorum relinquit 8, pro radice ipſius æquationis initio propoſitæ. Vbi vides radicem æquationis nouæ ſubtrahendam eſſe è triente numeri quadratorum, cum in ſuperiori æquatione, radix nouæ ęquationis augeri debuiſſet triente eiuſdem numeri quadratorum; & tamen vtraque noua æquatio eſt, in qua ſolidum ſub latere, & coefficiente plano afficitur multa cubi, & duplum cubi è triente numeri quadratorum veteris æquationis maius eſt comparationis homogeneo, ſeu numero abſoluto eiuſdem æquationis.

Exemplum. XII. Propoſita ſit æqnatio 36 Q — 1 C = 1225. Tertia pars numeris quadratorum eſt 12, cuius cubus eſt 1728, huius duplum eſt 3456, à quo ſi ſubtraxeris 1225, comparationis homogeneum remanet 2231; pro comparationis homogeneum nouæ æquationis. Quadratum autem à triente iam dicto eſt 144, cuius triplum eſt 432, pro coefficiente plano, ſeu numero radicum eiuſdem æquationis nouæ. Vnde ipſa æquatio erit 1 C — 432 R = 2231. Huius æquationis radix eſt 23, quæ adaucta triente iam dicto 12, facit 35, pro radice æquationis propoſitæ.

Obſeruatio. Obſerua autem huius ęquationis nouæ radicem eſſe 23, maiorem triente nume-

ri

ri quadratorum veteris æquationis, & eiuſdem radicem comparari addendo inuentam radicem nouæ æquationis ad trientem numeri quadratorum.

Propoſita ſit æquatio 36 Q — 1 C ⊏ 2600. Tertia pars numeri quadratorum eſt 12, cuius cubus eſt 1728, huius duplum eſt 3456, à quo ſi ſubtraxeris 2600, comparationis homogeneum, remanebit 856, pro numero abſoluto, ſeu homogeneo comparationis nouę ęquationis. At verò quadratum ex eodem triente eſt 144, cuius triplum 432, erit coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ ęquationis, quæ proinde erit 432 R — 1 C ⊏ 856. Huius ęquationis radix eſt 2, quæ ſubtracta ex 12, triente numeri quadratorum relinquit 10; pro radice æquationis propoſitæ. *Exemplum. XIII.*

Obſerua huius æquationis nouę radicem eſſe 2, minorem 12, triente numeri quadratorum; & veteris ęquationis radicem comparari, ſubtractione radicis ęquationis nouę è triente numeri quadratorum. *Obſeruatio.*

Propoſita ſit ęquatio 15 Q — 1 C ⊏ 176. Tertia pars numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum eſt 250, à quo ſi ſubtraxeris 176, numerum abſolutum, fit reſiduum 74, & numerus abſolutus nouę ęquationis. Quadratum eiuſdem trientis eſt 25, cuius triplum 75, eſt coefficiens planum nouæ ęquationis. Itaque noua æquatio eſt 75 R — 1 C ⊏ 74. Huius æquationis radix eſt 1; qua ſubtracta è 5, triente numeri quadratorum ęquationis antiquæ, fit 4, reſiduum pro radice veteris æquationis. *Exemplum. XIV.*

Obſerua radicem ęquationis nouę eſſe minorem triente nnmeri quadratorum, æquationis veteris, & huius radicem comparari, ſubtractione radicis æquationis nouæ à triente numeri quadratorum. *Obſeruatio.*

Propoſita ſit ęquatio 30 Q — 1 C ⊏ 1701. Tertia pars numeri quaratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, à quo ſi ſubtraxeris 1701, numerum abſolutum, fit reliquum 299, pro numero abſoluto nouæ æquationis. At vero quadratum è 10, triente iam dicto eſt 100, cuius triplum 300, erit coefficiens planum nouę ęquationis, quę erit ob id 300 R — 1 C ⊏ 299. *Exemplum. XV.*

Huius æquationis radix eſt 1, quæ ſubtracta ex 10, triente iam dicto, relinquit 9, pro radice æquationis initio propoſitę.

Obſerua ęquationis antiquę radicem comparari ſubtracto 1, &c. ex 1 o triente numeri quadratorum. *Obſeruatio.*

Propoſita ſit ęquatio 30 Q — 1 C ⊏ 1127. Triens numeri quadratotum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, à quo ſi ſubtraxeris 1127, numerum abſolutum, fit reliquum 873, pro numero abſoluto nouę ęquationis. Quadratum trientis eſt 100, cuius triplum 300; erit numerus radicum nouę ęquationis, quę propterea erit 300 R — 1 C ⊏ 873. Huius ęquationis radix eſt 3, quę ſubtracta ex 10, triente numeri quadratorum, relinquit 7, pro radice ęquationis veteris. *Exemplum. XVI.*

Obſerua radicem ęquationis propoſitę comparari ſubtractione radicis nouę ęquationis ex triente numeri quadratorum. *Obſeruatio.*

Propoſita ſit ęquatio 15 Q — 1 C ⊏ 52. Tertia pars numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum eſt 250, à quo ſi ſubtraxeris 52, fit reliquum 198, comparationis homogeneum nouæ æquationis, & quia quadratum è triente numeri quadratorum eſt 25, cuius triplum eſt 75; ob id 75, erit numerus radicum æquationis nouæ. Itaque fiet 75 R — 1 C ⊏ 198. Cuius radix eſt 3, quæ ſubtracta ex 5, tricnte numeri quadratorum facit reſiduum 2, pro radice veteris æquationis. *Exemplum. XVII.*

Obſerua itidem æquationis veteris radicem comparari ſubtractione radicis nouæ ęquationis, ex triente numeri quadratorum. *Obſeruatio.*

Ex quibus colligitur trientem numeri quadratorum eſſe aggregatum ex vtraq; radice nempe veteris, & nouæ æquationis. Quando radix æquationis nouæ atq; adeo, & veteris minor eſt ipſo triente.

Quod ſi proponatur æquatio 30 Q — 1 C ⊏ 1558. Tertia pars numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, à quo ſi ſubtrahatur 1558, numerus abſolutus, remanet 432, pro comparationis homogeneo no- *Exemplum. XVIII.*

uę ęquationis. At verò quadratum eiuſdem trientis eſt 100, cuius triplum 300, eſt numerus radicum nouæ æquationis. Itaq; fiet æquatio 1 C — 300 R = 432. Huius ęquationis radix eſt 18, quę adaucta triente iam dicto 10, facit vtique ęquationis radicem 28.

Explicatio ſupradictorum. *n. 5. Hæc autem conferri debet, cum illa, quam ſuperius attulimus, erat * enim 15 Q — 1 C = 196, & orta erat æquatio 1 C — 75 R = 54. Huius æquationis negatiuæ directè radix erat 9, quæ aucta 5, triente numeri quadtatorum dabat radicem 14, pro veteri ęquatione.

At verò ſi ſit 30 Q — 1 C = 1558, oritur ęquatio negatiua directè, vt 1 C — 300 R = 432, cuius radix eſt 18, quę aucta 10, triente numeri quadratdrum, dat 28, pro radice ęquationis propoſitæ.

Obſeruatio. Obſerua in vtroq; caſu, radicem æquationis nouæ eſſe maiorem triente numeri quadratorum, & etiam, duplum cubi trientis eſſe maius comparationis homogeneo & in primo caſu ęquationem nouam eſſe cum cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, & coefficiente plano; in ſecundo, verò æquationem eſſe, in qua ſolidum ſub latere, & coefficiente plano afficitur multa cubi.

Cuiuſcunque igitur æquationis ad hoc genus pertinentis, radix eſt, quæ conſtat nouæ æquationis radice; trienteq; numeri quadratorum æquationis. Aut eſt differentia inter huiuſmodi trientem, & radicem nouæ æquationis quæ ex hactenus explicatis, facillimè cognoſci poſsunt.

THEOREMA.

SIT numerus A, cuius latus cubicum B, at verò C, ductus in D, quadratum ipſius B, producat E, qui ſi multetur ipſo A, proueniat F; Sit autem G, tertia pars, ipſius B, eiusq; cubus H, cuius duplum ſit I, at verò I, ſubtracto ex F, remaneat K; Sit autem L, cuius cubus M, & quidem N, ſit triplum P, quadratum ipſius G; ſi verò L, ducatur in N, fiat O, qui multatus ipſo M, relinquat K.

Oſtendendum eſt L, plus G, æqualem eſſe B.

A	B	C	D	E	F
4096	16	30	256	7680	3584
G	H	I			
10	1000	2000			
K	L	M	N	O	P
1584	6	216	300	1800	100

Ad huius Theorematis demonſtrationem, præmittere neceſſe eſt illud.

LEMMA

L E M M A.

SI fuerit Reſiduum, itaut ſolidum à quadrato nominis maioris in triplum minoris nominis, minus cubo nominis maioris æquale ſit cuidam numero, nempe comparationis homogeneo Sit autem numerus quidam itaut ſolidum ab ipſo, in triplum quadratum nominis minoris minus cubo eiuſdem numeri, æquale ſit eidem comparationis homogeneo, minus duplo cubo eiuſdem nominis minoris. Aſſumptus, ille numerus æquabitur differentiæ nominum.

Sit Binomium conſtans ex duobus nominibus B, G; ſit autem E, ſolidum à C, in D, quadratum ex B, minus A, cubo eiuſdem B, æquale F; At verò eſto L, cuius cubus M, ſubtractus ex O; ſolido ab N; triplo P, quadrato ex C, relinquat F, minus I, duplo cubo ipſius G; Dico L, æqualem eſſe differentiæ nominum B, & G, Er quidem iuxta Specioſam Analyſin, vt loquamur.

B	G	E	
16	10	7680	
A	C	I	
4096	30	2000	
D	M	N	O
256	216	300	1800
F	L	P	
3584	6	100	

Si $3ba^2 - a^3$ æquetur z ſol. ſit autem e æqualis $a - b$, etiam $3b^2e - e^3$, æquabitur z ſol. $- 2b^3$. Effica enim radix eſt e, æqualis $a - b$, ita ſit vt e, excedatur ab a, interuallo b; atque adeo $e + b$, æquetur a; Quadratum autem ex $e + b$, eſt $e^2 + 2be + b^2$, & cubus eſt $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$, quod ſi auferatur ex $3be^2 + 6b^2e + 3b^3$, nempe producto ab $e^2 + 2be + b^2$, in 3 b; fiet $3b^2e - e^3 + 2b^3$, æquale $3ba^2 - a^3$. Sed hoc erat æquale z ſol. ergo $3b^2e - e^3 + 2b^3$, æquabitur z ſol. & per antitheſin fiet $3b^2e - e^3 =$ z ſol. $- 2b^3$. *Supradictorũ demonſtratio.*

Vnde fit, vt ſi E, ſolidum à C, triplo ipſius G, in D, quadratum ipſius B, minus A, cubo eiuſdem B, ſit æqnale F, quod etiam ſolidum ab L, differentia nominum B, G, in N, triplum P, quadratum ipſius G, minus cubo ipſius L, æquale ſit F, minus I, duplo cubo eiuſdem G.

Atque adeo ſi E, ſolidum à C, triplo ipſius G, in D, quadratum ipſius B, minus A, cubo ipſius B, fuerit æquale F, ſitque numerus quiſpiam, itaut ſolidum ab ipſo in N, triplum P; quadratum ipſius G, minus N, cubo ipſius B, æquale ſit F, minus I, duplo cubo ipſius G. Hunc numerum æqualem eſſe differentiæ nominum B, G neceſſarium eſt.

Latus igitur cuius cubus ſubtractus ex triplo ſolido ab ipſo in quadratum minoris nominis relinquit in quod eſt æquale comparationis homogeneo, minus duplo cubo minoris nominis, eodem comparationis homogeneo exiſtente, cui erat æquale triplum ſolidum à quadrato nominis maioris, in minus nomen, minus cubo nominis maioris. Latus in quam illud æquale eſt differentiæ ipſorum nominum.

Lemmatis autem ſuperioris veritate oſtenſa, facillimum erit Theorema ipſum demonſtrare.

Quandoquidem L, eſt latus, cuius cubus M, ſubtractus ex O, ſolido ab N, triplo P, quadrato ipſius G, in L, relinquit K, nimirum F, miuus I, duplo H, cubo ipſius G. Propterea ex eo, quod premiſſum eſt Lemmate L, latus æquaditur differentiæ nominum B, G. Quod erat operæ pretium oſtendere. *Demõſtratur principale intentum.*

Non diſſimili methodo demonſtrabimus, cum radix effica fuerit triens numeri quadratorum, minus radice antiquæ æquationis.

Aliter etiam licet hoc æquationis genus explicare.

Propoſita ſit æquatio,

$$b\,a^2 - a^3 = b\,d^2,$$

Quoniam igitur.

Propoſitio. *SI ſint quatuor quantitates continuè proportionales, ſolidum à prima maiori inter extremas in quadratum differentiæ inter primam, & tertiam, minus cubo eiuſdem differentiæ æqualis eſt ſolido à prima maiori inter extremas in quadratum differentiæ inter ſecundam, & quartam.*

Propterea in æquatione propoſita coefficiens longitudo, eſt prima maior, inter extremas, differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt magnitudo, cuius quadratum oritur ex applicatione ſolidi comparationis homogenei ad coefficientem longitudinem, eò igitur res deducitur, vt ſi fuerit æquatio huiuſmodi $b\,a^2 - a^3 = b\,d^2$.

Sit quidem b, prima in ſerie quatuor continuè proportionalium, eademque maior inter extremas, differentia verò ſecundæ, & quartæ ſit d, at vero a radix, fiet differenria primæ, & rertiæ, quod ex Zetetico deprehenſum eſt.

Zeteticum. *Data prima maiori inter extremas differentia ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium inuenire differentiam ſecunda, & tertia.*

Superior autem propoſitio; de quatuor continuè proportionalibus, hunc, qui ſequitur, in modum oſtendetur.

Demonſtratio ſuperioris propoſitionis. Sint continuè proportionales b, c, f, g, ita vt differentia inter maiorem b, primam, & f, tertiam ſit a; at verò differentia inter ſecundam c, & quartam g, ſit d. Quandoquidem igitur continuè ſunt proportionales b, c, f, g, ergo permutando erunt etiam proportionale b, f, c, g. Vt igitur b, ad f, ita c, ad g, ac proinde erit $b - f$, ad $c - g$, vt b, ad c; atque adeo vt b, ad c, ita erit a, ad d; eſt enim a, idem, quod b, $- f$, & d, eſt idem, quod $c - g$, ergo a^2, ad d^2, duplicatam habebit rationem eius, quam habet b, ad c; ſed b, ad f, duplicatam habet rationem eius quam habet b, ad c, ergo vt b, ad f, ita a^2 ad d^2; at verò f, idem eſt quod $b - a$, proinde vt b, ad $b - a$, ita a^2, ad d^2, quamobrem factum ſub medijs æquabitur facto ſub extremis; atque $b\,a^2 - a^3$, æquabitu $b\,d^2$. Idque nobis erat iniunctum oſtendere.

Explicatio, & ſupradictorũ collectio. Itaque ſi fuerit æquatio $80\,Q - 1\,C = 27000$, quatuor ſunt concipiendæ quantitates continuè proportionales, quarum prima maior, inter extremas, eſt 80, quadratorum numerus; at verò differentia inter ſecundam, & quartam eſt 30, latus ortiuæ quantitatis ex applicatione 72000, ſolidi comparationis homogenei ad 80; quadratorum numerum, ſiue coefficientem longitudinem, radix autem eſt 60, differentia inter primam, & tertiam è quatuor continuè proportionalibus, è quibus, vt dicebamus, ſunt datæ, prima maior inter extremas 80, & 30, differentia inter ſecundam, & quartam, ex quibus datis oportet inqulrere differentiam inter primam, & tertiam; ita enim æqnationis radix innoteſcet.

SCHO.

Digitized by Google

SCHOLION.

Supradictorũ cõmemoratio.

QVæ igitur hactenus à nobis tradita ſunt, maximè proſunt Analyſtæ, ſiquidem præcepta, quibus inſtructus benè ſuum opus perficit, demonſtrationibus firmata; congruentiùs atque potiori iure conſequuntur locum in Arte.

Aduerte non nulla circa ſuperiores demonſtrationes.

Hic tamen aduertere non pigebit, demonſtrationes, à nobis hactenus elaboratas fuiſſe, ad oſtendendum in vnoquoque genere ſupradictarum æquationum, quod eſt potiſſimum, atque adeo, id vnde cætera innoteſcunt; Ita quidem appoſitè ad huiuſmodi caſus Theoremata nos concinnauimus. Contingit enim cum cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine, contingit inquam, vt transformata æquatio ſit negatiua directè, vel inuersè; prout duplum cubi è triente longitudinis coefficientis ſub quadratica ad comparationis homogeneum ſe habuerit; vel enim exceſſus eſt penes homogeneum comparationis, vel contra; ita ſit vt non vno conſtanti modo in æquatione transformata habeatur affectio. Primum Theorema ſuperiùs allatum congruit transformatæ æquationi, negationis directæ, vt conſideranti perſpicuum, ac manifeſtum eſſe poteſt; quamobrem cuique explicandi rationem in ſingulis affectionis modis, atque adeo Theoremata congruentia enunciandi onus incumbet; ea quidem induſtria Lectoris operantis imitatione eorum, quæ ſuperiùs attulimus, non immerito reliquimus, rati nemini operoſum futurum, ſimiles demonſtrationes contexere. Quod autem de primo æquationis genere adnotauimus, de cæteris intelligendum volumus, in quibus non diſſimiliter Lectoris ſe ſo exercebit labor, ad abſolutam demonſtrationem vniuſcuiuſque transformatæ æquationis. Plura autea exempla in medium afferre ſuperuacaneum duximus; ſiquidem ex allatis, omnis pragmatia in re de qua agimus, ſatis innoteſcit, exercitationis cauſa tamen cuique vtiliſſimum erit varias hypotheſes adhibendo, diuerſas æquationes percurere; in quibus præcepti veritatem luculenter aduertet, & demonſtrationis vim experietur non ſine lucro facilitatis, in numeris tractandis; ſi præſertim etiam vtatur minus vulgaribus, in quorum tractatione iuuat Analyſtam in Artis ſplendorem, ac decus, ſe frequenter exercere; quod enim difficile, illud etiam præclarum; ac proinde, tanto ſe ceteris anteire magis aduertet, qui nimirum in Arithmetica ſunt occupati, quanto eos aſſumet numeros, quorum conſideratio magis eſt à vulgari ſeiuncta. Vt enim hi abſcondita quadam innoluit, ita non mediocre decus eſt Artis illa, ſumma facilitate, recludere.

Iuuat maximè Analyſtã ſe exercere in numeris tractandis.

De

Digitized by Google

De æquationibus Cubicis explicandis, in quibus, omnes termini extant.

CAPVT XXV.

Tractandorũ argumentum.

HActenus explicuimus æquationes cubicas, in quibus cubus afficitur ſub quadrato, atque adeo tertius terminus deeſt; Reliquum eſt, vt æquationes illas eiuſdem ordinis tractemus, in quibus omnes termini extant.

Huiuſmodi autem æquationes, non magno labore explicantur; ſi tamen ad ſimpliciorem naturam reuocentur, auferendo ſecundum terminum, itaut æquationes euadant cubicæ quidem, ſed affectæ ſub latere.

Duplex via ad has explicandas æquationes.

Verum enim verò maioris eruditionis cauſa, duplicem viam in earum explicatione calcabimus. Primò enim vniuerſali quadam ratione reductis ad ſimpliciorem formam, earum radices exhibere docebimus. Secundò peculiarem methodum aperiemus, qua quidem inſtructus Analyſta vniuſcuiuſque æquationis ad huiuſmodi genus pertinentis, radicem aſſequetur.

In his poſſo non mediocriter elucet Recentiorum ingenium, ſiquidem opus tam præclarum, atque ſubilime, generoſo animo aggreſſi, ad finem optatum ſumma felicitate perduxerunt.

De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur tam adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, quàm adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

SI fuerit æquatio, in qua cubus afficitur tàm adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, quàm adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Præceptum.

Tollendus eſt ſecundus æquationis terminus, vt noua conſurgat æquatio itidem cubica; vbi ſecundus terminus deſit. Id autem fit diuidendo coefficientem longitudinem per numerum dimenſionum poteſtatis; quotiens verò eſt adhibendos, pro augmento radicis æquationis propoſitæ, itaut radix, minus huiuſmodi quotiente, ſumi debeat pro vera radice propoſitæ æquationis. Huius autem cubo addendum ſolidum ſub eadem effecta radice, & coefficiente plano, inſuper ſub eius quadrato, & coefficiente longitudine, denique numerus abſolutus: habita ratione ſignorum †, & —, in additione perficienda; aggregatum enim, æquationem exhibebit, ſine ſecundo termino. Hac autem explicata iuxta præcepta iam traditâ; innoteſcet radix, à qua ſi dempſeris incrementum, quo aucta vera radix æquationis propoſita intelligebatur, proueniet radix ipſa, quæſita eiuſdem propoſitæ æquationis.

Præceptum vniuerſim enunciatum.

Vniuerſim verò fit diminuendo veras radices, quantitate cognita ſecundi termini diuiſa per numerum dimenſionum primi, ſi vnus ex hiſce duobus terminis, notatus fuerit ſigno †, & alter ſigno —; Aut augendo illas eadem quantitate, ſi vterq; eodem ſigno fuerit affectus; quod etiam inferiùs tangemus.

Propoſita

Propoſita ſit æquatio $1\,C \dagger 15\,Q \dagger 20\,R - 4128 = 0$. *Exemplum I.*

Diuidatur 15, coefficiens longitudo, ſiue numerus quadratotum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis cubicæ; & fiet quotiens 3, quo intelligatur aucta radix propoſitæ æquationis; itaut ſic adaucta illa ſit e, atque adeo ipſa ſit $e - 5$, effinge cubum ex $e - 3$, eius quidem quadratum eſt $e^2 - 10\,e \dagger 25$.

At verò cubus eſt $e^3 - 15\,e^2 \dagger 75\,e - 125$. Sumatur igitur hic cubus, loco vnius cubi è radice propoſitæ æquationis. Deinde ducatur $e^2 - 10\,e \dagger 25$, in 15, numerum quadratorum, & proueniet $15\,e^2 - 150\,e \dagger 375$. Mox autem ducatur $e - 5$, in 20, numerum radicum, & proueniet $20\,e - 100$; Sic omnia in vnum colligantur, & aggregato intelligatur addi -4128. Horum ſumma erit $1\,e^3 * - 55\,e - 3978 = 0$.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & e & -5 \\
 & & e & -5 \\
\hline
 & & -5\,e & \dagger 25 \\
 & e^2 & -5\,e & \\
\hline
 & e^2 & -10\,e & \dagger 25 \\
 & & e & -5 \\
\hline
 & -5\,e^2 & \dagger 50\,e & -125 \\
e^3 & -10\,e^2 & \dagger 25\,e & \\
\hline
e^3 & -15\,e^2 & \dagger 75\,e & -125 = 0
\end{array}
$$

Hæc omnia cernere licet ex hoc adiuncto paradigmate, & quidem, huius ęquationis, ſeu poteſtatis affectæ exhibenda eſt radix, iuxta præcepta ſuperiùs tradita, æaque deprehendetur 17. Quoniam autem e, valet 17; proinde $e - 5$, quod æquabatur verę radici 1 R, erit 12.

$$
\begin{array}{rrrrl}
e^3 & -15\,e^2 & \dagger 75\,e & -125 & \text{pro} \dagger 1\,C \\
 & \dagger 15\,e^2 & -150\,e & \dagger 375 & \text{pro} \dagger 15\,Q \\
 & & \dagger 20\,e & -100 & \text{pro} \dagger 20\,R \\
 & & & -4128 & \text{pro} - n. \\
\hline
e^3 * & & -55\,e & -3978 = 0. &
\end{array}
$$

Itaque initio æquationis, & affectæ poteſtatis radix erit 12.

Hoc igitur pacto explicanda eſt radix propoſita.

Sit aliud exemplum. Æquatio propoſita ſit $1\,C \dagger 18\,Q \dagger 30\,R - 9184 = 0$. *Exemplum.*

Diuidatur 18, numerus quadratorum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis, *II.*
& fit quotiens *6*.

Intelligatur radix æquationis aucta hoc incremento *6*, itaut hæc ſic adaucta ſit e, vnde $e - 6$, ſit æqualis 1 R, radici propoſitæ æquationis.

Quadratum ex $e - 6$, eſt $e^2 - 12\,e \dagger 36$, cubus eſt $e^3 - 18\,e^2 \dagger 108\,e - 216$. Intelligatur igitur $e^3 - 18\,e^2 \dagger 108\,e - 216$, & huic additum ſit $\dagger 18\,e^2 - 216\,e \dagger 648$, factum ex $e^2 - 12\,e \dagger 36$, quadrato in $\dagger 18$, numerum quadratorum.

Inſuper his addi intelligatur $\dagger 30\,e - 180$, factum ex $e - 6$, in 30, numerum radicum Denique his additum ſit -9184, numerus abſolutus, ſumma autem erit $e^3 * - 78\,e - 8932$, quæ æquabitur 0.

$$
\begin{array}{rrrrl}
e^3 & -18\,e^2 & \dagger 108\,e & -216 & \text{pro} \dagger 1\,C \\
 & -18\,e^2 & -216\,e & \dagger 648 & \text{pro} \dagger 18\,Q \\
 & & \dagger 30\,e & -180 & \text{pro} \dagger 30\,R \\
 & & & -9184 & \text{pro} - n. \\
\hline
e^3 * & & -78\,e & -8932 = 0. &
\end{array}
$$

His igitur habitis explicetur æquatio, iuxta Artis pręcepta, & ea reperietur 22; Itaque e æquabitur 22. Quoniam vero $e - 6$, erat æqualis 1 R, nempe radici primo poſitæ æquationis, ſupponebatur enim eius radix adaucta numero *6*, ita vt ipſa ſic adaucta diceretur e, ac proinde vera radix erit $e - 6$, ob id pręducta radix erit $22 - 6$, nempe 16. Hoc igitur artificio induſtrioſè huiuſmodi æquationis genus explicari poteſt.

SCHO-

SCHOLION.

Hic diligẽter aduertẽ, quo ſenſu intelligendum ſit præceptum ſupra poſitum, ſimulq; uniuerſale præceptum inſinuatur.

DE explicatione æquationis ſic præceptum intelligendum eſt. Præſcriptum opus ſit diminuendo veras radices quantitate cognita ſecundi termini, diuiſa per numerum dimenſionum primi, ſi vnus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno abundantiæ, & alter ſigno defectus. Aut augendo illas eadem quantitate, ſi vterque eodem ſigno affectus fuerit; vt in ſuperibus caſibus &c.

Ad hanc pragmatiam, præſtat omnes terminos ex vna parte conſtituere comparandos cum o. ex altera exiſtente.

De explicanda æquatione in qua cubus afficitur abiunctione tam ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano quàm ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

RAdix æquationis propoſitæ intelligatur diminuta numero, qui prouenit diuiſa coefficiente longitudine, ſeu numero quadratorum per numerum dimenſionum poteſtatis, & ea; ita tractatur, vt à latere vides.

Sit æquatio $1\,C - 6\,Q - 10\,R - 744 = 0$.

Proueniet autem $e^3 * - 22\,e - 780 = 0$.

Cuius radix inuenta iuxta præcepta iam tradita, erit 10. Quoniam autem ſup-

$$
\begin{array}{r}
e + 2 \\
e + 2 \\
\hline
2e + 4 \\
e^2 + 2e \quad\;\; \\
\hline
e^2 + 4e + 4 \\
e + 2 \\
\hline
2e^2 + 8e + 8 \\
e^3 + 4e^2 + 4e \quad\;\; \\
\hline
e^3 + 6e^2 + 12e + 8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrl}
e^3 + & 6e^2 + & 12e + & 8 & \text{pro} + 1\,C \\
 & -6e^2 - & 24e - & 24 & \text{pro} - 6\,Q \\
 & & -10e - & 20 & \text{pro} - 10\,R \\
 & & & -744 & \text{pro} - n. \\
\hline
e^3 * & & -22e - & 780 = 0. &
\end{array}
$$

poſuimus radicem æquationis initio propoſitæ eſſe diminutam numero 2, qui fit ex diuiſione 6, numeri quadratorum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis, ac proinde

inde e † 2, æquari prædictæ radici. Intelligatur addi 2, ad 10; vt proueniat 12; fiet enim radix quæſita 12.

Adnotatio. Vides autem æquationem 1 C — 6 Q — 10 R — 744 ⫗ 0, ita proponi vt omnes termini ex vna parte conſtituti, collati ſit cum 0, exiſtente ex alia parte, cum alioquin æquatio hæc ita propoponeretur 1 C — 6 Q — 10 R ⫗ 744. Præſtat autem, ad hanc pragmatiam perficiendam, terminos omnes ex vna æquationis parte collocare, quod in ſuperiori Scholio aduertimus.

Exemplum. Sit deinde exemplum alterum, nempe data ſit explicanda æquatio 1 C — 9 Q — 12 R — 1600 ⫗ 0.

Diuidatur 9, numerus quadratorum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis, fiet quotiens 3. Intelligatur diminuta radix æquationis propoſitæ, decremento, huiuſmodi, puta 3, itaut radix ita diminuta ſit e, at verò aſſumens 3, fiat e † 3, æqualis 1 R, huius quadratum eſt e^2 † 6 e † 9, atqui cubus eſt e^3 † 9 e^2 † 27 e † 27.

```
                e † 3
                e † 3
            -----------
            † 3 e † 9
       e² † 3 e
       ----------------
       e² † 6 e † 9
                e † 3
   ---------------------
       3 e² † 18 e † 27
 e³ † 6 e² † 9 e
 ------------------------------------
 e³ † 9 e² † 27 e †   27  pro † 1  C
    — 9 e² — 54 e —   81  pro — 9  Q
           — 12 e —   36  pro — 12 R
                  — 1600  pro — n.
 ------------------------------------
     e³ * — 39 e — 1690 ⫗ 0.
```

Itaque diſponantur omnia, vt à latere conſtat. & colligetur æquatio huiuſmodi e^3 * — 39 e — 1690 ⫗ 0.

Explicatio. Huius autem æquationis radix colligitur 13, ex ijs, quæ ſuo loco tradita ſunt; cum autem propoſitæ æquationis radici, ſupponeretur e † 3, æqualis; Sitque huius æquationis radix ipſi e, æqualis, ob id illius radix erit 13 † 3, nempe 16, Hoc itaque artificio huiuſmodi æquationis genus explicatur.

Quoniam primus terminus eſt affectus ſigno abundantiæ; & ſecundus ſigno defectus, itaut vterque non ſit eodem ſigno affectus; propterea radix intelligitur diminuta numero, qui prouenit diuiſo numero quadratorum per numerum dimenſionum poteſtatis &c.

Exemplum. Quod ſi æquatio fuerit in qua poteſtas affirmatè ſub quadrato, at verò negatè ſub latere cuiuſmodi eſt hæc 1 C † 6 Q — 40 R — 2112 ⫗ 0. Quandoquidem

```
 e³ — 6 e² † 12 e —    8  pro † 1  C
    † 6 e² — 24 e †   24  pro † 6  Q
           — 40 e †   80  pro — 40 R
                  — 2112  pro — n.
 ------------------------------------
     e³ * — 52 e — 2016 ⫗ 0.
```

vterque terminus, tàm ſcilicet primus, quàm ſecundus eodem ſigno †, afficitur; proinde

proinde, diuiſo 6, numero quadratorum per 2, numerum dimenſionis poteſtatis, vt proueniat 2, radix æquationis intelligi debet aucta binario, itaut e — 2, ſit æqualis 1 R. Tractetur igitur radix iuxta prædicta, & colligatur æquatio huiuſmodi e^3 * — 52 e — 2016 ⫫ o.

Huius autem affectæ poteſtatis radix eſt 14; propterea initio propoſitæ æquationis radix erit 12.

Caſus alter. Quod ſi denique æquatio fuerit, in qua cubus afficitur negatè ſub quadrato, & affirmatè ſub latere. Vt ſi eſſet 1 C — 9 Q † 40 R — 1344 ⫫ o.

Diuidatur numerus quadratorum per numerum dimenſionum poteſtatis, vt ſupra: Mox autem intelligatur radix æquationis multata numero, qui prouenit ex diuiſione prædicta, & procedatur vt in præcedentibus.

Itaque e † 3, erit æqualis 1 R, at quadratum ex e † 3, eſt e^2 † 6 e † 9, & cubus eſt e^3 † 9 e^2 † 27 e † 27, diſponantur omnia more conſueto; nempe ducatur e^2 † 6 e † 9, quadratum ex e † 3, ducatur inquam in — 9, numerum quadratorum

e † 3
e † 3
―――――
3 e † 9
e^2 † 3 e
―――――
e^2 † 6 e † 9
e † 3
―――――
3 e^2 † 18 e † 27
e^3 † 6 e^2 † 9 e
―――――

e^3 † 9 e^2	† 27 e	† 27	pro † 1	C
— 9 e^2	— 54 e	— 81	pro — 9	Q
	— 440 e	† 20	pro — 40	R
		— 912	pro —	n.

e^3 * † 13 e — 846 ⫫ o.

affectum ſymbolo —, & fiet — 9 e^2 — 54 e — 81. Inſuper ducatur e † 3, in † 40, numerum radicum affectum nota †, & fit 440 e † 120. Denique ſcribatur — 912, ex his colligetur æquatio e^3 * † 13 e — 864 ⫫ o.

Cuius radix eſt 9, quare e valet 9, cum verò e † 3, ſit æqualis 1 R, ex hypotheſi, proinde ad habendam radicem æquationis propoſitæ addere oportet 3, ad 9, vt fiat 12. Itaque radix initio æquationis propoſitæ erit 12,

De explicanda æquatione in qua de ſolido ſub latere, & coefficiente plano, addito ad ſolidum ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine negatur Cubus.

EAdem ſunt obſeruanda præcepta, quibus hactenus vſi ſumus, facilè enim ijs rem abſoluemus.

Propoſita

Propoſita ſit æquatio $6Q \dagger 80R - 1C = 96$, & induat hanc formam, nempe $\dagger 6Q \dagger 80R - 1C - 96 = 0$, quæ coincidit cum hac $\dagger 6Q - 80R - 1C = 96$.

Diuidatur 6, numerus quadratorum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis; quotiens autem ſit decrementum, quo intelligenda eſt radix multari. Si itaque radix ſupponatur e, & huic addatur 2, vt fit $e \dagger 2$, idq; intelligatur æquari 1 R; procedendum eſt autem vt ſupra.

$$
\begin{array}{r}
e \dagger 2 \\
e \dagger 2 \\
\hline
2e \dagger 4 \\
e^2 \dagger 2e \quad\;\; \\
\hline
e^2 \dagger 4e \dagger 4 \\
e \dagger 2 \\
\hline
2e^2 \dagger 8e \dagger 8 \\
e^3 \dagger 4e^2 \dagger 4e \quad\;\; \\
\hline
e^3 \dagger 6e^2 \dagger 12e \dagger 8 \\
-e^3 - 6e^2 - 12e - 8 \text{ pro } - 1C \\
\dagger 6e^2 \dagger 24e \dagger 24 \text{ pro } \dagger 6Q \\
\dagger 80e \dagger 160 \text{ pro } \dagger 80R \\
-96 \text{ pro } - n. \\
\hline
-e^3 * \dagger 92e \dagger 80 = 0. \\
\text{ſeu } 80 \dagger 92e * - e^3 = 0.
\end{array}
$$

Cubus erit $e^3 \dagger 6e^2 \dagger 12e \dagger 8$, quadrato exiſtente $e^2 \dagger 4e \dagger 4$, productum verò ſub $\dagger 6$, numero quadratorum, qui eſt affectus ſigno †, & $e^2 \dagger 4e \dagger 4$, quadrato ipſo, erit $6e^2 \dagger 24e \dagger 24$, productum ſub $\dagger 80$, numero radicum, & $e \dagger 2$, radice, erit $\dagger 80e \dagger 160$. Quoniam autem cubus afficitur ſymbolo —, propterea ſcribatur $-e^3 - 6e^2 - 12e - 8$, & omnibus diſpoſitis iuxta.

Artis præcepta colligetur æquatio $80 \dagger 92e * - e^3 = 0$.

Huius porro æquationis radix eſt 10, cumque ſupponeretur $e \dagger 2$, æquari 1 R, & e, vt dixi eſt æqualis 10, ob id 12, æquabitur 1 R; Itaque æquationis initio propoſitæ radix eſt 12.

Propoſita ſit rurſus æquatio explicanda $12Q \dagger 100R - 1C - 576 = 0$, & operandum vt antea. Nempe diuidatur 12, numerus quadratorum per 3, numerum dimenſionum poteſtatis; quotiens autem eſt 4, quo intelligatur multata radix æqua-

$$
\begin{array}{r}
-e^3 - 12e^2 - 48e - 64 \text{ pro } - 1C \\
\dagger 12e^2 \dagger 96e \dagger 192 \text{ pro } \dagger 12Q \\
\dagger 100e \dagger 400 \text{ pro } \dagger 100R \\
-576 \text{ pro } - n. \\
\hline
-e^3 * \dagger 148e - 48 = 0. \\
\text{ſeu } 148e - e^3 - 47 = 0.
\end{array}
$$

tionis. Supponatur, radix quædam e, & intelligatur defficere à vera radice per 4, itaut vera radix ſit $e \dagger 4$, diſpoſitiſq; omnibus, prout Artis præcepta requirunt colligetur æquatio $148e - e^3 - 48 = 0$.

Huius autem æquationis radix eſt 12, quemadmodum colligitur obſeruatis præ-

 ceptis,

ceptis, quæ ſuperiùs tradidimus; Itaque e, æquabitur 12, ergo e † 4, æquabitur 16. erat autem e † 4, æqualis 1 R, proinde 1 R, æquabitur 16. Quamobrem initio propoſitæ æquationis radix erit 16.

Huiuſmodi itaque methodo, æquationes omnes, pertinentes ad hoc genus, explicari, atque reſolui poſſunt.

Sed hæc ad altioris etiam ordinis æquationes extenditur; proprerea de hac iterum inferiùs redibit ſermo. Interim aggrediemur methodum peculiarem pro explicandis æquationibus cubicis in quibus omnes termini extant, atq; omnes diligenter perſequemur, cum id magnum in Arte momentum habeat.

Cæterùm rectè initio nos pronunciauimus illud, nimirum.

Supradictorũ comprobatio. Tollendus eſt ſecundus æquationis terminus, vt noua conſurgat æquatio itidem cubica, vbi ſecundus terminus deſit. Id autem fit diuidendo coefficientem longitudinem per numerum dimenſionum poteſtatis; quotiens verò eſt adhibendus, pro augumento radicis æquationis propoſitæ, itaut radix, minus huiuſmodi quotiente, ſumi debeat pro radice propoſitæ æquationis. Huius autem cubo addendum ſolidum ſub prædicta radice, & coefficiente plano, inſuper ſub eius quadrato, & coefficiente longitudine, denique numerus abſolutus; habita ratione ſignorum †, & —, in additione perficienda; aggregatum enim, æquationem exhibebit, ſine ſecundo termino. Hac autem explicata iuxta præcepta iam tradita; innoteſcet radix, à qua ſi dempſeris incrementum, quo aucta vera radix æquationis propoſitæ intelligebatur, proueniet radix ipſa quæſita eiuſdem propoſitæ æquationis.

Hoc itaque præceptum contractum eſt ad huiuſmodi genus æquationis, cum alioquin illud vniuerſim enunciari poſſet, quod inferiùs etiam manifeſtum fiet, hunc in modum, nimirum.

Epilogiſmus vniuerſi præcepti. Cum tollendus eſt ſecundus æquationis terminus, opus perficitur diminuendo veras radices quantitate cognita ſecundi termini, diuiſa per numerum dimenſionum primi, ſi vnus ex hiſce duobus termiuis notatus fuerit ſigno †, & alter ſigno —, aut augendo illas quidem eadem quantitate, ſi vterque eodem ſigno fuerit affectus.

Peculiaris methodus ad eadem præſtanda traditur, ac aperitur.

Proponitur methodus peculiaris ad ſuperiora præſtanda. QVid Artifex operetur cremento, vel decremento radicis, atque adeo tranſmutatione æquationis in ſimpliciorem ablato ſecundo ipſius æquationis termino iam ſupra aliqua ex parte vidimus, copioſiùs eadem de re verba in ſequentibus facturi; & quidem hucuſque illarum æquationum explicationem commemorata methodo opitulante tractauimus, in quibus poteſtas triplici tantùm dimenſione conſtat; cum alioquin adhiberi ad æquationes altioris ordinis commodè poſſit, qua de re nobis in ſequentibus ſupererit differendum.

Quoniam æquationes cubicæ iu quibus nimirum omnes termini extant, peculiari methodo reſolutiua, etiam per reductionem ad ſimpliciores explicari feliciſsimè poſſunt; ob id hoc argumentum verſare diligenter nunc noſtræ erunt partes. In horum autem conſideratione primò ab eis, quæ apud alios reperimus exordium ducemus.

Cardani propoſitum. Cardanus ſibi proponens explicare æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, & coefficiente plano, item ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine; quamuis alia formula æquationem concipiat, dicendo cubum, quadratum, & poſitiones æquari numero, hoc nihil eſt, cùm in idem recidat; ſibi inquam proponens hoc æquationis genus explicare regulam his ferè verbis memoriæ literiſque prodidit. Demonſtrationes ommittimus, ſunt enim Mathematico candore, vt ita dicam, deſtitutæ.

Duc

Cardani Regula.

Duc tertiam partem numeri quadratorum ad cubum, addeque numero, inde duc numerum quadratorum in ſui tertiam partem, & producti differentia à numero rerum, eſt numerus rerum addendarum eubo, vbi productum fuerit minus numero rerum propoſitarum, vel addendarum numero, vbi productum fuerit maius numero rerum propoſitarum.

Si igitur differentia eſt nulla, producti, & numeri rerum, erit eubus æqualis numero iam inſinuato, inde ſumpta radice cubica numeri, minue ex ea tertiam partem numeri quadratorum; & reſiduum eſt rei æſtimatio; quod ſi poſitiones, & cubus æquentur numero, duces numerum poſitionum in tertiam partem uumeri quadratorum, & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubum, & res iam inuentas æquales numero iam aggregato, inde ab æquatione minue tertiam partem numeri quadratorum, & reſiduum eſt æſtimatio.

Quod ſi productum fuerit, maius numero rerum, due differentiam, quæ eſt numerus rerum in tertiam partem numeri quadratorum: & productum minue ex numero, quem habebas, aggregato, & ſi nihil ſupereſt, habebis cubum æqualem rebus iam propoſitis tantum; quare deducendo ad minorem denominationem, habebis quadratum æquale uumero, & res erit ℞ Q, numeri rerum à qua minue tertiam partem numeri quadratorum, & reſiduum erit æſtimatio rei.

Quod ſi iu detractione producti ex numero rerum in tertiam partem numeri quadratorum à numero aggregato, ſuperſit, numerus ille eum rebus iam propoſitis æquatur eubo, inde ab æſtimatione; minue tertiam partem uumeri quadratorum, & reſiduum eſt æſtimatio quæſita.

Sed ſi productum numeri rerum in tertiam partem quadratorum maius eſſet numero iam aggregato, differentia eſt numerus, qui cum cubo, æquatur rebus iam propoſitis; inde habita æſtimatione minue tertiam partem numeri quadratorum, & reſiduum eſt æſtimatio rei.

Cardanus idem, aggrediens explicationem æquationis in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, & coefficiente plano, itemque multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine, regulam his verbis tradidit.

Cardani Regula.

Primo ſtatuas numerum rerum ſemper, vt in praecedenti eapitulo, & eſt vt ducas, numerum quadratorum in tertiam ſui partem, & differentia huius producti, à numero rerum, eſt numerus rerum, quæ ſi nulla ſit habebimus eubum æqualem numero ſi autem productum ſit minus numero rerum, differentia erit numerus rerum, quæ cùm cubo ęquantur numero, & ſi productum fuerit maius, habebimus res æquales cubo, & tunc ſi numeri erunt æquales, erit cubus, æqualis rebus; & ſi qui producitur ex numero rerum in tertiam partem uumeri quadratorum, fuerit minor numero æquationis eum additione, erit cubus æqualis rebus, & numero;

Quod ſi productus numerus ex rerum numero in tertiam partem numeri quadratorum fuerit maior numero æquationis eum ſua additione habebimus res, æquales eubo, & numero.

Numerus autem æquationis ſic habetur; Due priorem numerum rerum, in tertiam partem numeri quadratorum, & producti accipe differentiam, ab aggregato numeri æquationis, & dupli cubi tertiæ partis numeri quadratorum differentia erit numerus addendus cubo. Si primum puoductum fuerit maius aggregato, vel rebus, ſi fuerit minus, vel numerus æqualis cubo, vbi uullæ ſint res. Inde habita æſtimatione, eam adde, vel minue tertiæ parti nnmeri quadratorum, prout in exemplis docebimus, & habebis quæſitam æſtimationem.

Alia regula apud ipſum.

Einſdem Regula altera.

Si numerus rerum æqualis eſt producto ex numero quadratorum in ſuam tertiam partem, duc tertiam partem numeri quadratorum ad cubum ℞ C, differentiæ huius, & numeri æquationis adde tertiæ parti numeri quadratorum, vbi cubus ſit minor numero, aut minue, vbi ſit maior, & totum eſt æſtimatio rei; manifeſtum eſt autem, quòd vbi eubus tertiæ partis numeri quadratorum, & numerus ſint æquales, non addemus, nec minuemus, ſed tertia pars quadratorum erit ipſa rei æſtimatio.

Si verò ſit æquatio in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, & dato coefficiente plano, & adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataq; coefficiente longitudine, hanc regulam tradit Cardanus.

Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, aggregatum erit uumerus rerum, inde due numerum, in tertiam partem numeri qnadratorum, & producti ſume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo tertiæ partis uumeri quadratorum; Quæ ſi nulla eſt, habebis cubum æqualem rebus, ſi verò ſit productum minus aggregato; differentia eſt nu-

merus

merus, qui cum rebus æquatur cubo, quod ſi productum fuerit maius aggregato, differentia eſt numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æſtimatione tertiæ partis numeri quadratorum, reſiduum eſt æſtimatio vera quæſita.

Cum autem æquatio fuerit in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, & coefficiente plano, itemq; multa ſolidi ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine. Cardanus hanc tradidit regulam.

Cardani Regula. *Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, & productum adde numero rerum, aggregatum erit numerus rerum æqualium cubo, pro numero autem duc numerum rerum ſecundum in tertiam partem numeri quadratorum, & productum adde numero æquationis, à quo minue cubum tertiæ partis numeri quadratorum, reſiduum eſt numerus, qui cum rebus æquatur cubo, inde inuenta æſtimatione, adde ei tertiam partem numeri quadratorum, & habebis veram æſtimationem.*

Cùm verò æquatio fuerit, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, & dato coefficiente plano, & multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataq; coefficiente longitudine. Cardanus hanc regulam tradit.

Cardani Regula. *Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, & conſtabitur numerus rerum, hunc duc in tertiam partem numeri quadratorum, & producti ſume differentiam ab aggregato ex numero æquationis, & cubo tertiæ partis numeri quadratorum, quæ ſi nulla eſt, erunt res æquales cubo; Si verò productum fuerit maius aggregato, differentia eſt numerus, qui cum rebus æquatur cubo, & ſi aggregatum fuerit maius producto, differentia eſt numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æſtimatione, addes eam tertiæ parti numeri quadratorum, & conſtabitur vera æſtimatio. Sue mineris tamen, quod quando capitulum hoc peruenerit ad capitulum cubi æqualis rebus, & numero, addenda erit vera æſtimatio eius, & ex his, quæ fictæ ſunt minor, per minus tertiam partem numeri quadratorum, vt habeas vtramque æſtimationem capituli, cubi, & numeri æqualis rebus, & quadratis cum capitulum cubi æqualis rebus, & numero, vnam tantum veram æſtimationem habeat.*

Quando autem æquatio fuerit in qua de ſolido ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine, negatur ſolidum ſub latere, & coefficiente plano, itemq; cubus. Cardanus hanc regulam tradidit.

Cardani regula. *Duc numerum quadratorum in ſui tertiam partem, & à producto minue numerum rerum; quod ſi fieri nequit caſus eſt impoſſibilis in vera æſtimatione, reſiduum itaq; erit numerus rerum, inde multiplica primum numerum rerum in tertiam partem numeri quadratorum, & productum adde numero æquationis, huius aggregati, & dupli cubi tertiæ partis numeri quadratorum differentiam accipe quæ ſi nulla eſt, habes cubum æqualem rebus ſolum ſiu duplum cubi tertiæ partis numeri quadratorum maius eſt, differentia eſt numerus addendus rebus, ſi duplum cubi minus eſt aggregato, differentia eſt numerus addendus cubo, inde æſtimationi inuentæ adde tertiam partem numeri quadratorum, vt habeas æſtimationem veram.*

Quando deniq; de ſolido ſub latere negatur ſolidum ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine, itemque cubus. Hanc regulam tradit Cardanus.

Cardani regula. *Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, fiet numerus rerum ſecundus, ab hoc minue quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, & reſiduum duc in tertiam partem numeri quadratorum, & totum productum adde numero æquationis, & conſtabitur numerus, qui cum cubo æquabitur rebus iam aſſignatus, inde ab eius æſtimationibus minue tertiam partem numeri quadratorum, reſidua ſunt quæſitæ æſtimationes.*

Quamuis huius ordinis æquationes, nimirum affectionis multiplicis, & in quibus Poteſtas haud plurium, quàm trium dimenſionum eſt; ſublato ſecundo termino, ad ſimpliciorem formam redactæ ſuperioribus præceptis reſolui poſſint; nihilominus, & præcepta quidem attulimus, & alia peculiaria, hìc afferre lubet, quibus

munitus

munitus Analyſta, tuto earum explicationem aggreditur.

At verò te monitum hìc volo, idem eſſe numerum quadratorum, ac coefficientem longitudinem ſubquadraticam, & numerum radicum, idem ac planum coefficiens ſublaterale; inſuper idem numerum abſolutum ac comparationis homogeneum &c.

Vnde quandoque nos æquiualentia geminamus, quandoque autem vitandi cauſa tedij negligimus; ſi inſuper aliquando audis ex numero in numerum ſolidum fieri, non explicata numerorum conditione, intelligas eorum vnum eſſe per modum lateris, numerus enim ille, alter vt planus in hypotheſi habitus eſt, vel quia erat quadratum alicuius lateris, vel quia erat coefficiens ſublaterale, atq; adeo faciebat ad conſtitutionem homogenei alicuius in æquatione ſolida, vel quia erat duorum planorum differentia &c. Hæc tibi perſpecta eſſe volui, & in ſupradictorum, & in deinceps dicendorum gratiam ne nos negligentiæ redarguas.

De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur tàm adiunctione ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano, quàm adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

AD comparationis homogeneum addatur ſolidum à plano coefficiente ſublaterale, ſeu numero radicum, in trientem coefficientis longitudinis ſubquadratica: ſeu numeri quadratorum, inter aggregatum hoc, & duplum cubum ex prædicto triente, ſumatur differentia, pro comparationis homogeneo noua æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. Differentia verò inter planum coefficiens ſublaterale, & triplum quadratum à triente prædicto ſit planum coefficiens ſublaterale, ſeu numerus radicum noua æquationis. Huius enim noua æquationis radix multata iam dicto triente, initio propoſita æquationis radicem exhibebit. Præceptum.

Sit æquatio propoſita 1 C † 6 Q † 25 R = 1064.

Triens coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum eſt 2, quo cubicè ducto fit 8; cuius duplum eſt 16, ſeruandum. At verò ad 1064, comparationis homogeneum, addatur 42, ſolidum à 2, triente iam dicto in 21, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum fit 1106, inter hoc, & 16, duplum cubum trientis, differentia eſt 1090, numerus abſolutus ſeu comparationis homogeneum nouæ æquationis. Triens autem idem, quadraticè ductus facit 4, cuius triplum eſt 12; Differentia verò inter 21, planum coefficiens ſublaterale, ſeu numerum radicum, & 12, eſt 9, pro coefficiente plano ſublaterale, ſeu numero radicum nouæ æquationis in qua cubus afficitur ſub latere. Itaque erit 1 C † 9 R = 1090. Huius æquationis radix prout ſuo loco docuimus, eſt 10; quæ multata triente iam dicto 2, exhibet 8, radicem veteris æquationis. *Exemplum I.*

Propoſita ſit æquatio 1 C † 15 Q † 80 R = 4848.

Tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125; huius duplum eſt 250, inter hoc autem, & 5248, aggregatum ex 4848, comparationis homogeneo, & 400, ſolido à 5, triente iam dicto, in 80, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, eſt 4998, pro comparationis homogeneo, ſeu numero abſoluto, nouæ æquationis. *Exemplum. II*

At verò differentia inter 75; triplum quadratum prædictum trientis, & 80, numerum radicum eſt 5; Itaque 5, erit coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum

radicum nouæ æquationis, quæ erit 1 C † 5 R ⊐ 4998. Huius æquationis radix eſt 17. Vt ſuo loco docuimus; quæ multata prædicto triente 5, exhibet 12; pro radice veteris æquationis.

Exemplum. III. Propoſita ſit æquatio 1 C † 18 Q † 70 R ⊐ 3500.

Tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ ſeu numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus eſt 216, huius duplum eſt 432; Inter quod, & 3920, aggregatum ex 3500, numero abſoluto, atque 420, producto à 6, triente prædicto in 70, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum; differentia eſt 3488, comparationis homogeneum, ſeu numerus abſolutus nouæ æquationis.

Differentia inter 108, triplum quadratum e 6, triente numeri quadratorum, & 70, numerum radicum eſt 38, coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Itaque erit 1 C — 38 R ⊐ 3488. Huius æquationis radix vt ſuo loco docuimus eſt 16, quæ multata triente prædicto 6, exhibet veteris æquationis radicem 10.

Obſerua in hoc caſu, vt in præcedentibus duplum cubum eſſe minus aggregato &c. æquationem eſſe negatiuam, ſeu poteſtatem eſſe negatè, directè tamen affectam, eſt autem triplum quadratum trientis maius numero radicum, vbi in caſibus præcedentibus triplum quadratum trientis erat minus numero radicum.

Exemplum. IV. Propoſita ſit æquatio 1 C † 30 Q † 60 R ⊐ 3699.

Tertia pars numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000. At inter hoc, & 4299, aggregatum ex 3699, comparationis homogeneo, & 600, ſolido à prædicto triente 10, in 60, coefficiens planum ſublaterale ſeu numerum radicum eſt, 2299, comparationis homogeneum, ſiue numerus abſolutus nouæ æquationis. Differentia inter 300, triplum quadratum trientis 10, & 60, numerum radicum, eſt 240, coefficiens planum, ſeu numerus radicum nouæ æquationis, quæ erit 1 C — 240 R ⊐ 2299.

Huius æquationis radix eſt 19; vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradita ſunt; hæc autem multata triente iam dicto, exhibet 9, pro radice veteris æquationis.

Obſerua duplum cubum eſſe minus aggregato &c. & triplum quadratum trientis eſſe maius numero radicum, æquationem autem eſſe directè negatiuam.

Ad huius præcepti demonſtrationem illud facere videtur.

THEOREMA.

Sit numerus A, cuius latus cubicum B, huius quadratum ſit C, quod ductum in D, producat E, quo addito ad A, facit F; Sit autem G, quo ducto in B, proueniat H; at vero hoc addito ad F, proueniat I; Sit autem ipſius D, triens L, qui ductus in G, producat K, quo addito ad I, proueniat M, ſit verò ex K, cubus N, cuius duplum O, quo ſubtracto ex M, remaneat P.

Sit autem numerus Q, cuius cubus R, ſitq; S, quadratum ex L, cuius triplum ſit T; quo ſubtracto ex G, remaneat V, quo multiplicato per Q, proueniat X; hoc autem addito ad R, proueniat P.

Oſtendendum eſt Q, æqualem eſſe B, plus L.

Ad

A	B	C	D	E	F
1728	12	144	15	2160	3888
G	H	I	K	L	M
110	1320	5208	550	5	5758

N	O	P	Q	R
125	250	5508	17	4913

S	T	V	X
25	75	35	595

Ad huius Theorematis demonſtrationem præmittendum eſt,

L E M M A.

SI fuerit Binomium, itaut cubus primi nominis, plus ſolido à quadrato eiuſdem nominis primi in triplum nomen ſecundum, vnà cum ſolido ab eodem nomine primo in planum quoddam, æqualis ſit cuidam numero, nempe comparationis homogeneo. At verò cubus numeri cuiuſdam plus ſolido ab eodem in planum iam dictum, minus ſolido ab eodem in triplum quadratum nominis ſecundi, æqualis fuerit ſuperiori comparationis homogeneo, plus ſolido à nomine ſecundo in prædictum planum, minus duplo cubo ſecundi nominis. Ille numerus aſſumptus vtriuſq; nominis aggregatum erit.

Demonſtratio

Sit Binomium conſtans ex duobus nominibus B, L. Sit autem ex B, cubus A; plus E, ſolido à C, quadrato ipſius B; in D, vnà cum H ſolido ex B, in G, planum, æqualis I. At verò eſto Q, cuius cubus R, vnà cum X, ſolido abs Q, in V, differentiam inter T, triplum S, quadratum ex L, & G, æqualis ſit I, plus K, ſolido ab L, in G, planum, minus O, duplo cubo eiuſdem L.

A	B	C	D	E
1728	12	144	15	2160
G	H	I	K	L
110	1320	5208	550	5
O	Q	R	S	T
250	17	4913	25	75
V	X			
35	595			

Dico Q, æqualem eſſe aggregato ex B, & L. Et quidem iuxta Specioſam Analyſin, vt loquamur. Si $a^3 + 3\,b\,a^2 + d\,pl\,a$, æquetur z ſol. Sit autem e æqualis $a + b$, etiam $e^3 + d\,pl.\,e - 3\,b^2\,e$, æquabitur z ſol. $+ d\,pl.\,b - 2\,b^3$. Effícta enim radix eſt e, æqualis $a + b$, ita fit, vt e excedat a interuallo b; atque adeo $e - b$, æquetur a. Ex $e - b$, quadratum eſt $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, at cubus eſt $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$, quadratum autem prædictum, ductum in $3\,b$, coefficientem longitudinem ſubquadraticam, eſt $3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e + 3\,b^3$, quo addito ad $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$, nempe cubum ex $e - b$, fit $e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3$; huic autem addito $d\,pl.\,e - d\,pl.\,b$, nempe ſolido à coefficiente longitudine ſublaterali d plano in $e - b$; proueniet $e^3 + d\,pl.\,e - 3\,b^2\,e + 2\,b^3 - d\,pl.\,b$; quod æquabitur $a^3 + 3\,b\,a^2 + d\,pl.\,a$; ſed hoc æquabatur z ſol. ergo $e^3 + d\,pl.\,e - 3\,b^2\,e + 2\,b^3 - d\,pl.\,b$; æquabitur z ſol. &

per antitheſin fiet æquatio e^{3} † d pl. e — 3 b^{2} e ⊐ z ſol. † d pl. b — 2 b^{3}, expediret fortaſſe adhibere ſymbolum anceps, vbi opus eſt, ad vitandam ἀμφιβολίαν.

Vnde fit vt ſi ex B, cubus A, plus E, ſolido à C, quadrato ipſius B, in D, vnà cum H, ſolido ex B, in G, æqualis ſit I. Quod etiam ex Q, aggregato vtriuſque nominis B, L, cubus R, plus X, ſolido à Q, in V, differentiam inter G, & T, triplum S, quadratum ipſius L, æqualis ſit I, plus K, ſolido ab L, in G, minus O, duplo cubo ipſius L.

Atq; adeo ſi ex B, cubus A, plus E, ſolido à C, quadrato ipſius B, in D, vnà cum H, ſolido ex B, in G, æqualis ſit I; Sit autem numerus quiſpiam, cuius cubus auctus ſolido ab eodem numero in V, differentiam inter G, & T, triplum S, quadratum ipſius L, æqualis ſit I, plus K, ſolido ab L, in G, minus O, duplo cubo eiuſdem L; hunc numerum æqualem eſſe aggregato vtriuſque nominis B, L. Neceſſe eſt &c.

Latus igitur, cuius cubus auctus, ſolido ab ipſo in differentiam inter triplum quadratum à nomine ſecundo, & planum aliquod, æqualis eſt comparationis homogeneo, plus ſolido à ſecundo nomine in planum prædictum, minus duplo cubo eiuſdem ſecundi nominis eodem comparationis homogeneo exiſtente, cui erat æqualis cubus primi nominis, plus triplo ſolido à ſecundo nomine in quadratum primi vnà cum ſolido à primo nomine in planum iam dictum; latus inquam illud æquale eſt aggregato vtriuſq; nominis.

Lemmatis autem ſuperioris veritate oſtenſa facillimum erit Theorema ipſum demonſtrare.

Theorematis demonſtratio.

Quandoquidem Q, eſt latus, cuius cubus R, vnà cum X, ſolido abs Q, in V, differentiam inter T, triplum S, quadratum ex L, & G, æqualis eſt P, nempe I, plus K, ſolido ab L, in G, minus O, duplo cubo eiuſdem L, ergo, ex eo, quod præmiſſum eſt, Lemmate, erit Q, æqualis B, plus L. Siue aggregato duorum B, & L, Quod initio proponebatur oſtendendum.

SCHOLION.

Ex ſupra demõſtratis quiſque intelligat quo pacto quæ ſequuntur oſtẽdi poſſint.

IN ijs, quæ ſequuntur ſimiles demonſtrationes contexere cuique facillimum erit, ſi nimirum, & quæ ſuperiùs attulimus iam, & quæ paulo antea explicuimus diligenter aduerterit.

Nota circa prædicta.

Illud porro hic non præteribo, nimirum cuiuſq; caſus aptari poſſe demonſtrationi, conſentaneum Theorema vt, cum exempligratia, prouenit transformata æquatio negatiua; Theorema enim allatum de affirmatiua procedit. Non enim hic in animo eſt ſingula percurrere; ſatis enim id oſtendiſſe, vnde conſtare cætera poſſint.

Placet autem exemplum, quo in demonſtrando vſi ſumus, vlteriùs proſequi.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 15 Q † 110 R ⊐ 5208.

Exemplum poſitum, vlteriùs Auctor proſequitur.

Tertia pars coefficientis longitudinis ſubqudraticæ ſeu numeri quadratorum eſt 5, cuius cubus eſt 125, huius duplum eſt 250, ſeruandum. Deinde ad numerum 5208, comparationis homogeneum addatur 550, ſolidum à prædicto triente 5, in planum coefficiens ſublaterale 110, & inter aggregatum 5758, & numerum 250, duplum cubum prædictum differentia eſt 5508, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere.

At verò triens numeri quadratorum eſt 5, cuius quadratum eſt 25; huius triplum eſt 75, differentia autem inter 110, coefficiens planum, ſiue numerum radicum, & 75, prædictum eſt 35, pro coefficente plano ſublaterale ſiue numero radicum nouæ æquationis, quæ erit 1 C † 35 R ⊐ 5508. Huius autem æquationis radix eſt 17, quæ multata prædicto triente 5, dat 12, pro radice veteris æquationis &c.

Obſerua

Obſeruatio.

Obſerua nouam hanc æquationem eſſe, in qua cubus afficitur affirmatè ſub latere. Vbi triplum quadratum è triente numeri quadratorum eſt minus numero radicum; nam 75, minor eſt numero 110; ille eſt triplum quadratum è 5, triente numeri 15, quadratorum, hic autem eſt numerus radicum.

At ſi proponatur æquatio 1 C † 18 Q † 100 R = 3800.

Exemplum ſecundum ad eadem explicanda.

Hæc artificio ſuperiùs explicato ad hanc redigitur, nempe 1 C — 8 R = 3968. Huius æquationis radix eſt 16; quæ multata 6, triente numeri 18, qui eſt numerus quadratorum veteris æquationis, relinquit 10, pro radice eiuſdem ęquationis antiquæ. Hìc autem vt cernis triplum quadratum è triente numeri quadratorum, cuiuſmodi eſt 108, maius eſt quàm 100, numerus radicum; duplum autem cubi è 6, triente numeri 18, cuiuſmodi eſt 432, minus eſt quàm 4400, aggregatum ex 3800, comparationis homogeneo, & 600, ſolido ab eodem triente in 100, numerum radicum.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 180 Q † 10 R = 12112.

Exemplum tertium ad ſupradictorum maiorem declarationem.

Tertia pars numeri quadratorum eſt 60, cuius cubus eſt 216000, huius duplum eſt 432000, ſeruandum. At verò ad 12112, comparationis homogeneum addatur 600, ſolidum à 10, coefficiente plano, ſiue numero radicum in 60, trientem prædictum, fit 12712, at verò duplum cubi iam dictum eſt maius quàm 12712, propterea ſubtrahi non poterit, ſed potiùs 12712, ſubtrahere oportebit ex 216000, duplo iam dicto cubo, & remanet 419288, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. Differentia autem inter 10, numerum radicum, & 10800, triplum quadratum à prædicto triente eſt 10790, pro coefficiente plano, ſiue numero radicum nouæ æquationis, quæ erit negatiua inuersè hoc modo 10790 R — 1 C = 419288. Huius æquationis radix eſt 68, vt conſtat ex ſuo loco traditis; proinde hæc multata prædicto triente 60, exhibet 8, pro radice veteris æquationis.

Obſeruatio.

Obſerua in huiuſmodi caſu, duplum cubum è triente numeri quadratorum eſſe maius aggregato ex comparationis homogeneo, & ſolido à numero radicum in trientem numeri quadratorum; triplum autem quadratum è triente prædicto eſſe maius numero radicum, & æquationem nouam fieri negationis inuerſæ.

De explicanda æquatione in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano; & adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Præceptum.

SVmatur differentia inter comparationis homogeneum, & duplum cubum à triente longitudinis coefficientis ſubquadratica, ſeu numeri quadratorum, plus ſolido ab eodem triente in planum coefficiens ſublaterale, ſeu numerum radicum, eaque ſit comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At vero aggregatum ex triplo quadrato eiuſdem trientis, & numero radicum fiat planum coefficiens ſublaterale æquationis nouæ. Huius enim æquationis radix, multata prædicto triente radicem æquationis propoſitæ exhibebit.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 12 Q — 20 R = 1120.

Exemplo præceptum explicatur.

Tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, cui ſi addideris 80, productum ex 4, triente iam dicto, in 20, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, fit 208, inter hoc autem, & 1120, comparationis homogeneum, vel numerum abſolutum differentia 912, eſt comparationis homogeneum, ſeu numerus abſolutus

nouæ æquationis; in qua coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum, erit 68, aggregatum ex 20, numero radicum, & 48, triplo quadrato trientis prædicti. Itaque fiet æquatio 1 C — 68 R = 912. Huius æquationis radix eſt 12, vt conſtat ex ſuprà traditis, quæ multata triente iam dicto 4, exhibet 8, radicem veteris æquationis.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 21 Q — 60 R = 612.

Exemplum ſecundum ad idem. Tertia pars numeri quadratorum eſt 7, cuius cubus eſt 343, huius duplum eſt 686; cui ſi addatur 420, productum ex 60, numero radicum in 7 trientem, fit 1106, differentia verò inter 612, comparationis homogeneum, & 1106, eſt 494, comparationis homogeneum nouæ æquationis. At quadratum trientis prædicti 7, eſt 49, cuius triplum eſt 147; cui addito 60, numero radicum fit 207, coefficiens planum ſublaterale nouæ æquationis, quæ erit cubica, affecta ſub latere, negationis tamen inuerſæ, vnde erit 207 R — 1 C = 494. Huius autem æquationis radix eſt 13, quæ multata triente prædicto 7, relinquit 6, pro radice veteris æquationis.

Obſeruatio. Obſerua comparationis homogeneum veteris æquationis eſſe minus aggregato &c. & æquationem nouam eſſe huiuſmodi, vt auulſa inſit poteſtas.

Exemplum tertium. Ita ſi fuerit æquatio 1 C † 18 Q — 60 R = 504, fit enim noua æquatio 168 R — 1 C = 288, cuius radix eſt 12, ſed multata triente iam dicto 6; dat 6, pro radice veteris æquationis.

Propoſita ſit æquatio 1 C † 18 Q — 32 R = 672.

Exemplum quartum ad idem. Tertia pars numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus eſt 216, huius duplum eſt 432, ſeruandum. At verò ſolidum ab eodem triente 6, in 32, planum coefficiens ſublaterale ſiue numerum radicum eſt 192, quo addito ad 432, fit 624. Differentia autem inter 672, comparationis homogeneum, & aggregatum prædictum eſt 48; comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò triplum quadratum è 6, triente numeri quadratorum eſt 108, numerus autem radicum eſt 32, quo addito ad 108, fit 140, pro nnmero radicum nouę æquationis; erit igitur æquatio 1 C — 140 R = 48. Huius æquationis radix eſt 12, quæ multata triente 6, dabit 6, pro radice veteris æquationis.

Præceptum ſuprà poſitum oſtendi poteſt imitatione ſuperioris. Præceptum ſuperiùs allatum demonſtrari poſſet imitatione ſuperioris; neque enim aliunde petenda eſt demonſtrationis ratio, quiſque etenim inſiſtens ijs, quæ ſupra declarauimus, oſtenſurus eſt, & hoc, & quæ præcepta ſequntur. Quamobrem ſuperioribus inſtructus, Theoremata enunciabit opitulante Lemmate, in confirmationem eorum, quibus vniuerſa hæc perficitur pragmatia. Si igitur a^3 † 3 b a^2 — d pl. a æquetur z ſol. ſit autem a † b, æqualis e, etiam e^3 — 3 b^2 — d pl. e æquabitur z ſol. — 2 b^3 — d pl. b. Effecta enim radix eſt e, æqualis a † b, ita fit vt e excedat a, interuallo b; atque adeo e — b, æquetur a, ex e — b, quadratum eſt e^2 — 2 b e † b^2, at cubus eſt e^3 — 3 b e^2 † 3 b^2 e — b^3, ſi verò huic addatur 3 b e^2 — 6 b^2 e † 3 b^3, nempe ſolidum ab ipſo e^2 — 2 b e † b^2, in 3 b, fiet e^3 — 3 b^2 e † 2 b^3, à quo ſi ſubtraxeris d pl. e — d pl. b, ſolidum ab e — b, in d pl. fiet e^3 — 3 b^2 e † 2 b^3 — d pl. e † d pl. b, quod æquabitur a^3 † 3 b a^2 — d pl. a, ſed hoc erat æquale z ſol. ergo e^3 — 3 b^2 e † 2 b^3 — d pl. e † d pl. b, æquabitur z ſol. ergo per antitheſin fiet e^3 — 3 b^2 e — d pl. e = z ſol. — 2 b^3 — d pl. b. Vnde Lemma conſentaneum Theoremati oſtendi poſſet, ac proinde Pręceptum ipſum demonſtrari.

Quod autem de hoc dicimus præcepto, ſuo modo de cæteris intelligendum eſt.

De

De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, & multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

SVmatur duplus cubus è triente coefficientis longitudinis ſubquadratica, ſeu numeri quadratorum, addaturque comparationis homogeneo, inter aggregatum, & ſolidum ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, ſumatur differentia, qua fiat comparationis homogeneum noua aquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò differentia inter triplum quadratum à pradicto triente, & numerum radicum, fiat coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum noua aquationis. Huius aquationis radix reperiatur, hac enim adaucta pradicto triente, vel ab eodem ſubtracta, radicem veteris aquationis repraſentabit. *Praceptum.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 6 Q † 20 R = 1104.

Triens numeri quadratorum eſt 2, cuius cubus eſt 8, huius autem duplum eſt 16, quo addito ad 1104, fit 1120, inter hoc autem, & 40, productum ex prædicto triente 2, in 20, numerum radicum, differentia 1080, eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò quadratum à prædicto triente eſt 4, cuius triplum eſt 12, inter hoc, & 20, numerum radicum differentia 8, eſto coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, eaque erit 1 C † 8 R = 1080. Huius æquationis radix eſt 10, quæ adaucta prædicto triente 2, facit 12, pro radice, veteris æquationis. *Exemplo praceptum illuſtratur.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 12 Q † 28 R = 80.

Tertia pars numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum 128, additum ad 80, facit 208. Inter hoc autem aggregatum, & 112, productum à triente iam dicto 4, in 28, numerum radicum, ſumatur differentia 96; pro comparationis homogeneo nouæ æquationis cubicæ ſub latere. At verò quadratum è prædicto triente eſt 16, cuius triplum eſt 48, inter hoc autem, & 28, numerum radicum differentia eſt 20, pro coefficiente plano ſublaterale nouæ æquationis. Itaq; fiet 1 C — 20 R = 96. Huius æquationis radix eſt 6, quæ adaucta prædicto triente 4, facit 10, pro radice veteris æquationis. *Exemplum ſecundum ad idem.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 24 Q † 30 R = 6300.

Triens numeri quadratorum eſt 8; cuius cubus 512, huius duplum eſt 1024, quo addito ad 6300, fit 7324, inter hunc autem numerum, & 240, factum ab eodem triente 8, in 30, numerum radicum differentia eſt 7084, comparationis homogeneum æquationis nouæ, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò quadratum ab eodem triente eſt 64, cuius triplum eſt 192, inter hoc autem, & 30, numerum radicum differentia eſt 162, numerus radicum nouæ æquationis, quæ erit 1 C — 162 R = 7084. Huius æquationis radix eſt 22, vt conſtat ex ijs, quæ ſuo loco tradita ſunt; ergo hæc aucta eodem triente 8, repræſentabit veteris æquationis radicem 30. Itaque 30, eſt initio propoſitæ æquationis radix. *Exemplum tertium.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 18 Q † 88 R = 80.

Triens numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus 216, huius duplum eſt 432, addendum *Exemplum quartum.*

dendum 80, comparationis homogeneo, vt fiat 512. Inter hoc aggregatum, & 528, productum à prædicto triente, in 88, numerum radicum eſt 6, comparationis homogeneum nouæ æquationis in qua cubus afficitur ſub latere. Differentia verò inter 88, numerum radicum, & 108, triplum quadratum à prædicto triente 6, eſt 20, numerus radicum nouæ æquationis, quæ proinde erit 20 R — 1 C = 16. Cuius æquationis radix eſt 4, quę aucta prædicto triente 6, facit 10, radicem veteris æquationis.

Obſeruatio. Obſerua comparationis homogeneum eſſe minus aggregato &c. & numerum radicum eſſe minorem triplo quadrato trientis; fieri autem æquationem inuerſæ negationis, radicem autem æquationis antiquæ comparari incremento trientis numeri quadratorum eiuſdem veteris æquationis ſupra radicem æquationis nouæ; huius enim radix aucta prædicto triente, exhibet veteris æquationis radicem.

Sit iterum 1 C — 24 Q † 160 R = 192.

Exemplum quintum. Triens numeri quadratorum eſt 8, huius cubus eſt 512, cuius duplum eſt 1024, quo addito ad 192, comparationis homogeneum, fit 1216, inter hoc autem, & 1280, productum ab eodem triente 8, in 160, numerum radicum differentia eſt 64, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ, in qua eſt affectio ſub latere. At verò quadratum ab 8, triente iam dicto eſt 64, cuius triplum eſt 192, inter quod, & 160, numerum radicum differentia eſt 32, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerus radicum nouæ æquationis, quæ proinde erit 32 R — 1 C = 64.
Huius radix eſt 4, quę aucta prędicto triente 8, dat 12, pro radice veteris ęquationis.

Sit æquatio 1 C — 24 Q † 164 R = 240.

Exemplum ſextum. Triens numeri quadratorum eſt 8, cuius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024, quo addito ad 240, fit 1264, inter hoc autem, & 1312, productum ab eodem triente 8, in 164, numerum radicum differentia eſt 48, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ affectionis negatiuæ.

Quadratum autem trientis eſt 64, cuius triplum eſt 192, inter hoc autem, & 164, numerum radicum differentia eſt 28, numerus radicum nouæ æquationis quę erit 28 R — 1 C = 48. Huius æquationis radix eſt 4, quæ aucta triente iam dicto 8, facit 12, radicem veteris æquationis.

Propoſita ſit æquatio 1 C — 30 Q † 200 R = 336.

Exemplum ſeptimum. Triens numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus 1000, huius duplum 2000, quo addito ad 336, fit 2336. Inter hoc autem, & 2000, productum ab eodem triente 10, in 200, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum eſt 336, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ affectionis ſub latere. At quadratum eiuſdem trientis eſt 100, cuius triplum eſt 300, inter hoc, & numerum radicum differentia eſt 100, numerus radicum nouæ æquationis, quæ proinde erit 100 R — 1 C = 336. Huius ęquationis radix eſt 4, quæ ſubtracta ex 10, triente prædicto relinquit 6, radicem veteris æquationis.

Quædam hic obſeruantur. Præſtat obſeruare, dari æquationem, in qua cubus negatè afficitur ſub quadrato, affirmatè ſub latere; itaut, addito duplo cubo è triente coefficientis longitudinis ſubquadraticę, ſeu numeri quadratorum ad comparationis homogeneum, fiat aggregatum, maius ſolido ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale, & triplum quadratum trientis maius ſit numero radicum; contingere autem, vt noua ęquatio ſit negatiua indirectè, vt ſuprà, & directè vt hìc; ſi enim ſit 1 C — 18 Q † 100 R = 336.

Explicatio. Triens plani coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus 216, huius duplum eſt 432, quo addito ad 336, fit 768, inter quod, & 600, productum ab eodem triente in 100, coefficiens planum ſublaterale ſeu numerum radicum, differentia eſt 168, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ &c. in qua cubus afficitur ſub latere.

Quadratum eiuſdem trientis eſt 36, cuius triplum eſt 108, inter quod, & 100,

numerum

numerum radicum differentia eſt 8, numerus radicum nouæ æquationis, quę proinde erit 1 C — 8 R ≍ 168. Huius æquationis radix eſt *6*, quæ aucta triente dicto *6*, facit 12, radicem æquationis veteris. In priori comparatur radix veteris æquationis, ſubtracta radice nouæ æquationis, è triente. In poſteriori, aditione eiuſdem radicis ad trientem.

Propoſita ſit æquatio 1 C — 30 Q † 280 R ≍ 704.

Triens numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, quo addito ad 704, fit 2704, inter quod, & 2800, productum ab eodem triente 10, in 280, numerum radicum, differentia *96*, eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus eſt affectus ſub latere. At verò quadratum trientis eſt 100, cuius triplum eſt 300, inter quod, & 280, numerum radicum differentia 20, eſt numerus radicum nouæ ęquationis; quæ propterea erit 1 C — 20 R ≍ *96*. Huius radix eſt *6*, quæ ſubtracta ex 10, triente iam dicto, relinquit 4, radicem veteris æquationis. *Exemplum octauum.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 30 Q † 332 R ≍ 1248.

Triens numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, quo addito ad 1248, fit 3248, inter quod, & 3320, productum ſiue ſolidum ab eodem triente 10, in coefficiens planum ſublaterale 332, differentia eſt 72, comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. Trientis eiuſdem quadratum eſt 100, cuius triplum eſt 300, inter quod, & 332, coefficiens planum ſub laterale differentia 32, erit planum coefficiens, ſiue numerus radicum nouæ ęquationis, quę propterea erit 1 C † 32 R ≍ 72. Huius æquationis radix eſt 2, quę ſubtracta ex ſupradicto triente 10, relinquit 8, radicem æquationis initio propoſitæ. *Exemplum nonum.*

Hęc diſtinctiùs, & copioſiùs in Specioſa tractabimus.

De explicanda ęquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, itemque multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Svmatur duplus cubus è triente coefficientis longitudinis ſubquadratica, ſiue numeri quadratorum, & addatur comparationis homogeneo; deinde huic aggregato addatur ſolidum à coefficiente plano ſublaterale, ſiue numero radicum, in trientem prædictum, & aggregatum ex his, eſto comparationis homogeneum noua aquationis cubica affecta ſub latere. At verò aggregatum ex triplo quadrato trientis numeri quadratorum, & numero radicum, ſit coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum noua aquationis. Huius enim radix adaucta prædicto triente, veteris aquationis radicem repraſentabit. *Præceptum.*

Propoſita ſit æquatio 1 C — 6 Q — 10 R ≍ 744.

Triens numeri quadratorum eſt 2, cuius cubus eſt 8, huius duplum eſt 16, quo addito ad 744, fit 760, huic autem addatur 20, productum à 2, triente iam dicto in 10, numerum radicum; & fit 780, comparationis homogeneum nouę ęquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò quadratum prædicti trientis 2, eſt 4, cuius triplum eſt 12, quo addito ad 10, numerum radicum fit 22, numerus radicum, nouę æquationis, quæ propterea erit 1 C — 22 R ≍ 780. Huius autem *Exemplo præceptum illuſtratur.*

æquationis

æquationis radix eſt 10, quæ aucta triente 2, iam dicto facit 12, pro radice veteris æquationis.

Exemplum ſecundum ad idem.

Propoſita ſit æquatio $1\,C - 18\,Q - 30\,R = 200$.

Triens numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus eſt 216, huius duplum eſt 432; quo addito ad 200, comparationis homogeneum fit 632, cui ſi addatur 180, ſolidum à prædicto triente in 30, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, fit 812, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ affectæ ſub latere. Sed triplum quadratum à prædicto triente 6, eſt 108, cui ſi addatur 30, numerus radicum fit 138, coefficiens planum ſublaterale nouæ æquationis, quæ propterea erit $1\,C - 138\,R = 812$. Huius æquationis radix eſt 14, quæ aucta prædicto triente, facit 20, radicem veteris æquationis.

De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano, afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine itemque multa cubi.

Præceptum.

SVmatur tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum, eiuſque duplus cubus addatur comparationis homogeneo, cui addatur ſolidum ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum. Et huiuſmodi aggregatum eſto comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò aggregatum ex triplo quadrato trientis numeri quadratorum, & numero radicum ſit coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum eiuſdem nouæ æquationis. Huius enim radix multata triente iam dicto, exhibet veteris æquationis radicem.

Exemplo præceptum explicatur.

Propoſita ſit æquatio $100\,R - 30\,Q - 1\,C = 72$.

Tertia pars numeri quadratorum eſt 10, eius cubus eſt 1000, cuius duplum eſt 2000, quod addatur comparationis homogeneo 72, fitque 2072, cui addatur 1000, ſolidum à triente iam dicto 10, in 100, planum coefficiens ſublaterale, ſeu numerum radicum, fit 3072, pro comparationis homogeneo nouæ æquationis. At verò triens iam dictus erat 10, cuius quadratum eſt 100, huius triplum eſt 300, quo addito ad 100, numerum radicum fit 400, coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, quę proinde erit $400\,R - 1\,C = 3072$. Huius autem æquationis radix eſt 12, quæ multata trientę ſuperiùs dicto 10, dat 2, pro radice veteris æquationis.

Digitized by Google

De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoq; coefficiente plano, & præterea multa cubi.

SVmatur tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum, eiuſque duplus cubus addatur ſolido abs triente iam dicto in planum coefficiens, ſiue numerum radicum, inter hoc aggregatum, & comparationis homogeneum, differentia ſit comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ, affecta ſub latere. At verò aggregatum è triplo quadrato trientis, & numero radicum, ſit coefficiens planum, ſiue numerus radicum æquationis nouæ. Itaque huius æquationis radix adinuenta, aucta tamen prædicto triente, vel ab eodem ſubtracta, veteris æquationis radicem exhibebit. Præceptum.

Sit æquatio 18 Q† 92 R — 1 C ⊐ 1720. Exemplum.
Triens numeri quadratorum eſt 6, cuius cubus eſt 216, huius duplum eſt 432, ſeruandum. At verò ſolidum à prædicto triente 6, in 92, numerum radicum, eſt 552, hoc addito ad 432, fit 984. At differentia inter hoc aggregatum, & 1720, comparationis homogeneum eſt 736, comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus negatur de ſolido ſub latere, & plano. At vero ad 92, numerum radicum, addito 108, triplo quadrato è triente 6, fit 200, coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, quæ erit 200 R — 1 C ⊐ 736.

Huius æquationis radix eſt 4, quæ aucta triente ſuprà dicto 6, facit 10, pro radice veteris æquationis.

Propoſita ſit æquatio 24 Q† 100 R — 1 C ⊐ 2928. Exemplum.
Triens numeri quadratorum eſt 8, cuius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024; ſeruandum. At verò ſolidum ab eodem triente 8, in 100, numerum radicum eſt 800, quo addito ad 1024, fit 1824. Differentia verò inter hoc aggregatum, & comparationis homogeneum 2928, eſt 1104, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ. Sed triplum quadratum à prædicto triente eſt 192, quo addito ad 100, coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, fit 292.

Numerus radicum æquationis nouæ, quæ propterea erit 292 R — 1 C ⊐ 1104. Huius æquationis radix eſt 4, quæ aucta triente prędicto facit 12, radicem ęquationis initio propoſitæ.

Obſerua, in vtroque exemplo comparationis homogeneum maius eſſe aggregato ex vtroque ſolido ſuprà dicto, quorum vnum ſcilicet duplum cubi è triente, aliud vero fit à triente in coefficiens planum ſublaterale, & inſuper radicem veteris æquationis comparati, augendo radicem æquationis nouæ triente numeri quadratorum ipſius veteris æquationis; cum autem contrà euenit, eſto exemplum.

Sit æquatio propoſita 30 Q† 100 R — 1 C ⊐ 1464. Exemplum.
Triens numeri quadratorum eſt 10, cuius cubus eſt 1000, huius duplum eſt 2000, cui addatur 1000, ſolidum ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale, & fit 3000. Atqui differentia inter hoc aggregatum, & comparationis homogeneum eſt 1536. Sed quadratum à prædicto triente eſt 100, cuius triplum eſt

300, quo addito ad 100, planum coefficiens ſublaterale, fit 400, coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Itaque fiet æquatio 400 R — 1 C = 1536. Huius æquationis radix eſt 4, quæ ſubtracta ex prædicto triente, relinquit 6, radicem veteris æquationis.

Obſerua autem aggregatum è duplo cubo trientis, & ſolido ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale maius eſſe comparationis homogeneo, & radicem veteris æquationis comparari, ſubducendo radicem nouæ æquationis ex triente iam dicto.

Exemplum IV. Sit æquatio 60 Q + 140 R — 1 C = 13504.

Triens numeri quadratorum eſt 20, cuius cubus eſt 8000, huius duplum eſt 16000, cui ſi addatur 2800, ſolidum ab eodem triente in 140, numerum radicum fit 18800, inter hoc autem aggregatum, & 13504, comparationis homogeneum differentia 5296, eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis, in qua cubus negatur de homogeneo ſub latere. Sed quadratum ex eodem triente eſt 400, cuius triplum eſt 1200, quo addito ad 140, numerum radicum, fit 1340, coefficiens planum ſublaterale nouæ æquationis. Itaque erit 1340 R — 1 C = 5296. Huius ęquationis radix eſt 4, quæ ſubtracta ex eodem triente 20, relinquit 16, radicem veteris æquationis.

Obſerua aggregatum è duplo cubo ipſius trientis, & ſolido ab eodem triente in numerum radicum, ſeu coefficiens planum ſublaterale, maius eſſe comparationis homogeneo, & radicem veteris æquationis comparari ſubtrahendo radicem æquationis nouæ ex triente numeri quadratorum veteris æquationis.

De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, itemq; multa cubi.

Præceptum. *Sumatur tertia pars coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum, inter eius autem duplum cubum, & aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido à triente prædicto in coefficiens planum ſublaterale, ſeu numerum radicum, ſumatur differentia, quæ ſit comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ ſub latere. At vero differentia inter triplum quadratum è triente numeri quadratorum, & numerum radicum, ſit coefficiens planum ſublaterale, ſiue numerus radicum nouæ æquationis. Huius autem radix aucta triente iam dicto, vel ab eodem ſubtracta, facit veteris æquationis radicem.*

Exemplum. Propoſita ſit æquatio 24 Q — 60 R — 1 C = 1008.

Triens coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſeu numeri quadratorum eſt 8, huius cubus eſt 512, huius duplum eſt 1024, ſeruandum. At ſolidum abs 8, triente iam dicto in 60, planum ſublaterale, numerum radicum, eſt 480, quo addito ad 1008, comparationis homogeneum, fit 1488, differentia verò inter hoc aggregatum, & 1024, ſuprà ſeruatum eſt 464, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ affectæ ſub latere. Sed quadratum ex eodem triente eſt 64, cuius triplum eſt 192, inter hoc autem, & 60, numerum radicum differentia eſt 132, numerus radicum nouæ æquationis, vnde fit 132 R — 1 C = 464.

Huius ęquationis radix eſt 12, quę aucta triente iam dicto 8, facit 12, radicem veteris æquationis.

Sit

Sit æquatio $12\,Q - 19\,R - 1\,C \sqsupset 10$. *Exemplum.*
Triens numeri quadratorum eſt 4, cuius cubus eſt 64, huius duplum eſt 128, ſeruandum, at verò 76, eſt ſolidum ab eodem triente 4, in 19, coefficiens planum ſublaterale, quo addito ad 10, comparationis homogeneum fit 86, inter hoc verò, & 128, ſeruatum duplum cubi trientis, differentia eſt 42, comparationis homogeneum nouæ æquationis cubicæ. Sed differentia inter 19, coefficiens planum ſublaterale, & 48, triplum quadrati è 4, triente, eſt 29, numerus radicum nouæ æquationis, quæ proinde erit $1\,C - 29\,R \sqsupset 42$.
Huius radix eſt 6, quæ aucta triente 4, iam dicto, dat 10, radicem æquationis antiquæ.

Sit æquatio $30\,Q - 100\,R - 1\,C \sqsupset 264$. *Exemplum.*
Triens coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, ſiue numeri quadratorum eſt 10, cuius quadratum eſt 100, cubus autem 1000, huius duplum eſt 2000, ſeruandum; at verò ſolidum ab eodem triente in 100, planum coefficiens ſublaterale, ſiue numerum radicum eſt 1000, quo addito ad 264, comparationis homogeneum, ſiue numerum abſolutum, fit 1264, inter hoc autem, & 2000, duplum cubum ſuprà ſeruatum differentia eſt 736, comparationis homogeneum, ſiue numerus abſolutus nouæ æquationis, in qua cubus afficitur ſub latere. At verò, cùm quadratum trientis ſit 100, eius triplum eſt 300, planum verò coefficiens ſublaterale, ſiue numerus radicum eſt 100, horum differentia eſt 200, coefficiens planum, ſiue numerus radicum nouæ æquationis, in qua cubus &c. Itaque æquatio erit $200\,R - 1\,C \sqsupset 736$. Huius æquationis radix eſt 4, vt ſuo loco explicuimus; proinde ſubtracta à 10, triente iam dicto, relinquet 6, radicem antiquæ æquationis.

Proponuntur cætera, quibus inſtructus Analyſta, difficultates implicatiores in æquationibus explicandis facilè de medio tollit.

CAPVT XXVI.

Nonnulla ſuperſunt ad æquationum explicationem

QVAMVIS hactenus tradita, ita conferant ad æquationes explicandas, vt vix aliud videatur deſiderandum; tamen adhuc nonnulla ſuperſunt, ſine quorum notitia haud licet omne genus æquationis tractandum ſuſcipere; De his igitur nobis hic ſequitur differendum.

Plurimum Analyticæ pragmatiæ vitium negationis officit; propterea curandum eſt, vt inde nullum incommodum immineat Analyſtæ; Aliqua igitur eſt adhibenda tranſmutatio, per quam emendantur æquationes, in quibus affectionum homogenea validiora de poteſtate negantur.

Obſeruanda quædam.

Applicandum igitur eſt comparationis homogeneum ad radicem quæſitam, vt alia quædam incerta radix oriatur, ſub cuius ſpecie primùm propoſitam æquationem dirigere, & nouam ordinare liceat, ita enim fiet, vt affectiones illinc negatæ tranſeant hic in affirmatas, & contra ſalua ipſa numerorum ſymmetria.

Huius operationis vtilitas ex infrà dicendis facilè conſtabit.

Perficitur autem hunc, qui ſequitur, in modum.

Et quidem quantum ad æquationes quadraticas.

Exemplum. Explicatio.

Propoſita ſit æquatio $a^2 - b\,a = z$ plano.

Effinge radicem eſſe $\frac{\text{z planum}}{\text{a}}$, cuius quadratum eſt $\frac{\text{z plano-planum}}{\text{a}^2}$, & quoniam b a negatur de a^2; proinde b ducatur in $\frac{\text{z planum}}{\text{a}}$, & fiet $\frac{\text{b in z planum}}{\text{a}}$ negandum de $\frac{\text{z plano-plano}}{\text{a}^2}$ vnde $\frac{\text{z plano-planum}}{\text{a}^2} - \frac{\text{b in z planum}}{\text{a}}$, æquabitur z plano, & per antitheſin fiet $\frac{\text{z plano-planum}}{\text{a}^2} =$ z plano † $\frac{\text{b in z planum}}{\text{a}}$, Omnibus ductis in a, proueniet $\frac{\text{z plano-planum in a}}{\text{a}^2} =$ z plano in a † b in z planum; Omnibus ductis in a^2 fiet z plano-planũ in a = z plano in a^2 † b in z planũ in a^2, & per antitheſĩ fiet z planum in a^2 † b in z planũ in a^2 = z plano-plano in a, per hypobibaſmũ proueniet z planum in a^2 † b in z planũ in a = z plano-plano. Inſtituto paraboliſmo omnibus ſcilicet applicatis ad z planum, & proueniet a^2 † b a = z plano. Itaque æquatio illa, in qua poteſtas affecta erat per negationem, tranſmutata eſt in illam, quæ eſt per affirmationem affecta, eodem comparationis homogeneo retento, & nullo modo coefficiente variata ſub eodem omnino gradu parodico; vt priùs.

Exemplum. Explicatio.

Proponatur $a^3 -$ b plano a = z ſolido.

Quandoquidem æquatio, eſt in qua poteſtas afficitur negatè, ac proinde reſpuit Artificis *ευμηχανίαν*.

Propterea tranſmutanda eſt in aliam, quæ obuia reſolutioni ſit, euiuſmodi eſt in qua poteſtas affirmatè afficitur; quare $\frac{\text{z ſolidum}}{\text{a}}$ eſto e planum, ergo $\frac{\text{z ſolidum}}{\text{e plano}}$ erit a, quare ex ijs quæ proponuntur $\frac{\text{z ſolido-ſolido-ſolidum}}{\text{e plano-plano-plano}} - \frac{\text{b plano in z ſolidum}}{\text{e plano}}$, æquabitur z ſolido.

Ductis omnibus in e plano-plano-planum z ſolido-ſolido-ſolidum — b plano in z ſolidum in e plano-plano-planum, æquabitur z ſolido in e plano plano-planum.

Omnibuſque diuiſis per z ſolidum, & congrua adhibita antitheſi, e plano-plano-planum † b plano in e plano-planum, æquabitur z ſolido ſolido.

Vel e plani-cubus † b plano in e plani quadratum æquabitur z ſolidi quadrato.

Hæc autem æquatio explicabilis eſt, ex ijs, quæ ſuperiùs docuimus, eſt enim in illa

illa, poteſtas cubica affecta ſub data coefficiente affirmatè. Si igitur innoteſcat e planum, ad hoc autem applicatum fuerit z ſolidum, proueniet a, de qua primùm quærebatur. In his porrò, qui inuoluitur analogiſmus eſt.

Vt a ad ℞ c z ſolidi, ita ℞ c z ſolido-ſolidi ad a^2 — b plano, hoc eſt ad e planum.

Quod ſi contingar in propoſita primùm cubica æquatione homogeneum comparationis in ſua ſoliditate irrationale, ſed facultate velut quadratica rationale, ea aſſymmetria in æquatione noua euaneſcet.

Quando homogeneum comparationis fuerit in ſua ſoliditate irrationale.

Deinde proponatur $a^4 - b\,a^3 - d$ pl. a^2, æquari z plano-plano. Sit verò explicanda æquatio.

Exemplum ad æquationẽ quadrato-quadraticam.

Quandoquidem poteſtas eſt affecta negatè, atque adeo minus reſolutioni idonea, ob id in illam eſt tranſmutanda, quæ obuia ſit Analyſtæ. Quamobrem $\frac{\text{z plano-planum}}{\text{e}}$ eſto e ſolidum ergo $\frac{\text{z plano-planum}}{\text{e ſolido}}$, æquabitur a. Igitur ex ijs, quæ proponuntur

$$\frac{\text{z plano-plano-plano-plano-plano-plano-planum}}{\text{e ſolido-ſolido-ſolido-ſolido}} - \frac{\text{b in z plano-plano-plano-planum}}{\text{e ſolido-ſolido-ſolido}} - \frac{\text{d plano in z plano-plano-planum}}{\text{e ſolido-ſolido}},$$

æquabitur z plano-plano; Omnibus autem ductis in e ſolido-ſolido ſolido-ſolidum z plano-plano-plano-plano-plano-plano-plano-planum — b in z plano-plano-plano-plano-plano-planum in e ſolidum — d plano in z plano-plano-plano-planum in e ſolido-ſolidum, æquabitur z plano-plano in e ſolido-ſolido-ſolido-ſolidum. Omnibuſque per z plano-planum diuiſis, & antitheſi adhibita, e ſolidi quadrato-quadratum — d plano in z plano-planum in e ſolidi quadratum † b in z plano-plano-plano-planum in e ſolidum; æquabitur z plano-plani-cubo.

Quod ſi contingat in propoſita primùm æquatione quadrato-quadratica homogeneum comparationis eſſe in ſua plano-planitie irrationale, ſed facultate veluti cubica rationale, ea aſſymmetria in æquatione noua euaneſcet.

Quando homogeneum comparationis eſt in ſua plano-planitie irrationale facultate tamen rationale.

Præceptum igitur eſto.

Præceptum, & eius prima pars.

Et primò quidem de comparationis homogeneo, quod in quadratis affectis inuariatum conſiſtat.

In cubis ducatur quadraticè. In quadrato-quadratis cubicè. In quadrato cubis quadrato-quadraticè. In cubo-cubis quadrato-cubicè &c.

Secunda pars.

Secundò homogenea ſub gradibus afficientia negatè, in homogenea ſub gradibus reciprocis afficientia affirmatè tranſeant; & contra afficientia affirmatè in afficientia negatè. Itaque affectio mutationem ſubeat.

Tertia pars.

Tertiò affectionis ſub latere inuariata conſiſtat coefficiens, affectionis ſub quadrato ducatur in homogeneum comparationis.

Coefficiens affectionis ſub cubo, in homogenei comparationis quadratum.

Coefficiens affectionis ſub quadrato-quadrato in homogenei comparationis cubum.

Coefficiens affectionis ſub quadrato-cubo in homogenei comparationis quadrato-quadratum &c.

Quarta pars.

Quartò ad cognitam radicem Poteſtatis nouiter adæquatæ applicetur homogeneum comparationis, pertinens ad æquationem propoſitam; reſtituet enim latus primò quæſitum.

De his multùm Artifex gloriari poteſt; abſtruſiſſima ſiquidem illa, quorum ignoratione, non parùm erubeſcebat, pertinaci demum labore magna cum admiratione mortalium eſt aſſecutus. Multùm profectò, qui præceſſerunt Analyſtæ, & temporis, & induſtriæ ad horum conſecutionem impenderunt, quantum tamen perdificile fuerit, hæc è tenebris in lucem prodere; ſatis intelliges, cùm, etſi plurimum in hoc puluere verſati fuerint, nihil tamen adepti ſunt, quod ad opus conduceret.

Cæterùm ſuperiora placet numeris tractare.

Ad quadraticas æquationes, quod attinet.

Propoſita ſit æquatio $1\,Q - 6\,R = 16$.

Exemplum de [illegible] quadratica.

Hæc æquatio negatiuæ cùm ſit affectionis, minus idonea eſt ad Analyticam explicationem, quare oportet illam ad affirmationem reducere, hoc enim pacto facilè

Digitized by Google

cilè ex præceptis in Arte reſolutiua traditis, licebit illam explicare.

Explicatio propoſiti. Effinge autem comparationis homogeneum, nempe 16, applicatum ad 1 R, hoc eſt $\frac{16}{1R}$, eſſe 1 R, & quidem fiet 1 Q † 6 R = 16. Huius æquationis radix eſt 2, quamobrem $\frac{16}{2}$, hoc eſt 8, erit radix primùm quæſita. Hæc autem vt meliùs intelligas, quandoquidem effingis $\frac{16}{1R}$ eſſe 1 R, & quoniam in æquatione Poteſtas eſt quadratum, efforma quadratum ex $\frac{16}{1R}$, huius quadratum eſt $\frac{256}{1Q}$, & quoniam erat 1 Q — 6 R, propterea $\frac{16}{1R}$, duc in 6, vt fiat $\frac{96}{1R}$ quo negato de $\frac{256}{1Q}$ fiet $\frac{256}{1Q}$ — $\frac{96}{1R}$, hoc autem æquabitur 16, & per antitheſin fiet $\frac{256}{1Q}$ = 16 † $\frac{96}{1R}$. Omnibus ductis in 1 R fiet $\frac{256R}{1Q}$ = 16 R † 96. Omnibus deinde ductis in 1 Q, fiet 256 R = 16 C † 96 Q, & per hypobibaſmum fiet 256 = 16 Q † 96 R, ſeu 16 Q † 96 R = 256. Inſtituto autem paraboliſmo, fiet 1 Q † 6 R = 16. Itaque æquatio illa, in qua poteſtas erat negatè affecta, in illam tranſmutata eſt, in qua eadem Poteſtas affirmatè ſub eodem gradu afficitur.

Exemplum alterum. Propoſita deinde ſit æquatio 1 Q — 12 R = 64. Effinge $\frac{64}{1R}$ eſſe 1 R, & non diſſimili modo ac ſuprà reperies æquationem 1 Q † 12 R = 64.

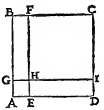
Huius æquationis radix eſt 4. Proinde $\frac{64}{4}$, hoc eſt 16, erit radix, de qua primùm quærebatur.

Explicatio. Siquidem Poteſtas eſt quadratum, ſume quadratum ex $\frac{64}{1R}$ illud autem eſt $\frac{4096}{1Q}$, de quo negandum eſt $\frac{768}{1R}$, productum ex 12, in $\frac{64}{1R}$, reſiduum autem $\frac{4096}{1Q}$ — $\frac{768}{1R}$ æquabitur 64, & per antitheſin fiet $\frac{4096}{1Q}$ = 64 † $\frac{768}{1R}$, Omnibus ductis in 1 R, fiet $\frac{4096R}{1Q}$ = 64 R † 768. Omnibus ductis in 1 Q, proueniet 4096 R = 64 C † 768 Q, ſeu 64 C † 768 Q = 4096 R, & per hypobibaſmum fiet 64 Q † 768 R = 4096.

Inſtituto paraboliſmo prouenit 1 Q † 12 R = 4096. Itaque æquatio negatæ affectionis tranſmutata eſt in eam, quæ eſt affectionis affirmatæ ſub eodem gradu.

Obſeruatio. Vides igitur quàm induſtrioſus ſit iſte modus tranſmutandi æquationes negatę affectionis, quo in æquationes affectionis affirmatæ tranſmutantur; Idque tanta facilitate cum fiat, mirum eſt multis non innotuiſſe, qui alioquin ſedulò cum huiuſmodi ſtudijs operam nauarent, per ſalebroſas vias greſſus direxerunt.

Demonſtratio Geometrica quantum ad quadraticas æquationes: Sed hæc oſtendi poterunt. Sit recta A D, repræſentans radicis pretium, cuius quadratum A B C D, ſit æquationis Poteſtas. Sit autem A D, diuiſa in E, itaut E D, ſit coefficiens longitudo ſublateralis. Ex E, ducta ſit E F, parallela alterutri ipſarum A B, D C. Quoniam igitur A D, eſt radicis valor, cuius quadratum eſt A B C D, & eſt E D, coefficiens longitudo ſublateralis, ſub hac, & ſub D C, ſeu A D, radicis valore, fiet planum de poteſtate negatum; atque adeo cùm quadratum A B C D, minus rectangulo E F C D, æquale ſit A B F E; ſitque quadratum minus plano ex radicis valore in coefficientem longitudinem æquale numero abſoluto; ob id A B F E, erit numerus abſolutus, ſiue comparationis homogeneum. Intelligatur A G, æqualis ipſi A E, ductaque ſit G H I, parallela alterutri ipſarum B C, A D. Manifeſtum eſt, rectangulum A F, ſi applicetur ad latus A B, fieri magnitudinem ortiuam A E, cuius quadratum A G H E, (eſt * enim A G H E, quadratum, quemadmodum H F C I; eſt quadratum ipſius E D, exiſtente quadrato A B C D) vnà cùm rectangulo G B F H, contento ſub G B, ſeu F H, vel H I, hoc eſt E D, coefficiente, & G H, ſiue A E, eſt æquale ipſi A F, cui erat æquale quadratum A B C D, minus rectangulo ſub eadem coefficiente E D, & D C, ſeu A D. Rectè igitur præceptum ſe habet quantum ad quadraticas æquationes.



2. Carol. 4. ſecundi.

Vides enim comparationis homogeneum inuariatum conſiſtere. Et contrariam haberi affectionis notam. Item coefficientem ſub latere non mutari. Denique dum

ad

ad cognitam radicem poteſtatis applicatur homogeneum comparationis pertinens ad æquationem propoſitam, comparari latus primò quæſitum.

Theorema autem poſſet hunc in modum Arithmeticè enunciari.

THEOREMA.

SI fuerit numerus, à cuius quadrato ſubtractum ſit productum ab eodem in aliquam eius partem, reſiduum autem applicatum fuerit ad eundem numerum, quantitas erit ortiua, cuius quadratum, vnà cum producto à numero propoſito in eandem ipſius numeri partem, prædicto reſiduo æquale erit.

Demonſtratio

Sit numerus A, cuius quadratum B, à quo ſi dempſeris C, productum ex eodem A, in D, partem eiuſdem A, remaneat E, quo applicato ad A, proueniat F, ſit autem G, productum ex F, in D, & ei addito H, quadrato ipſius F, proueniat I; Dico I, æqualem eſſe E &c.

B	C	E	G
64	48	16	12
A	D	F	H
8	6	2	4
	I		
	16		

Hæc autem facilè demonſtrari poſſunt. Quoniam A, eſt latus, cuius quadratum B, à quo ſubtracto C, nempe producto ex A, in D, remanet E, quo applicato ad A, prouenit F; erit F, pars altera, quæ cum D, conſtituit A; Quoniam igitur F, multiplicando ſeipſum facit H, erit vt vnitas ad F, ita F, ad H, & quia F, ductus in D, facit G, ergo vt vnitas ad F, ita D ad G, quare vt F, ad H, ita D, ad G, & permutando vt F, ad D, ita H, ad G, & componendo vt F, plus D, ad D, ita H, plus G, ad G, & conuertendo vt G, ad H, plu G, ita D, ad F, plus D, ſed I, eſt æqualis H, plus G, ergo vt G, ad I, ita D, ad F, plus D, hoc eſt ita D, ad A, ſed vt D, ad A, ita C, ad B, ergo vt G, ad I, ita C, ad B, ſed vt C, ad B, ita G, ad E, ergo vt G, ad I, ita G, ad E, ergo I, erit æqualis E. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Ad cubicas æquationes, quod attinet.

Propoſita ſit æquatio 1 C − 94 R = 60.

Exemplum I.

Effinge $\frac{60}{1R}$ eſſe 1 R, & fiet 1 C † 94 Q = 3600. Huius autem æquationis radix eſt 6. Quamobrem $\frac{60}{6}$, hoc eſt 10, erit radix primò quæſita.

Quoniam enim effingitur $\frac{60}{1R}$, eſſe 1 R, fiat cubus ex $\frac{60}{1R}$, & eſt $\frac{216000}{1C}$, at verò productum ex 64, in $\frac{60}{1R}$, eſt $\frac{5640}{1R}$, quo ſubtracto ex $\frac{216000}{1C}$, remanebit $\frac{216000}{1C}$ − $\frac{5640}{1R}$ = 60, & per antitheſin fiet $\frac{216000}{1C}$ = 60 † $\frac{5640}{1R}$. Omnibus ductis in 1 R, fiet $\frac{216000}{1C}$ R = 60 R † 5640. Omnibus ductis in 1 C, fiet 216000 R = 60 QQ † 5640 C, ſeu quod idem eſt 60 QQ † 5640 C = 216000 R, & per hypobibaſmum fiet 60 C † 5640 Q = 216000. Inſtituto paraboliſmo, proueniet 1 C † 94 Q = 3600; fit autem paraboliſmus, omnia applicando ad 60, numerum poteſtatis.

Propoſita ſit æquatio 1 C − 60 R = 32.

Exemplum II.

Effinge $\frac{32}{1R}$, eſſe 1 R, & fiet 1 C † 60 Q = 1024. Huius æquationis radix eſt 4. Proinde $\frac{32}{4}$, hoc eſt 8, erit radix primùm quæſita.

Quoniam enim $\frac{32}{1R}$, ſupponitur radix, eius cubus eſt comparandus, is autem eſt $\frac{32768}{1C}$, à quo ſubtrahendum eſt $\frac{1920}{1R}$, nempe productum ex 60, in $\frac{32}{1Q}$, remanet autem $\frac{32768}{1C}$ − $\frac{1920}{1R}$, quod æquabitur 32, & per antitheſin, fiet $\frac{32768}{1C}$ = 32 † $\frac{1920}{1R}$. Omnibus ductis in 1 R, fiet $\frac{32768\ R}{1C}$ = 32 R † 1920. Omnibus ductis in 1 C, fiet 32768 R = 32 QQ

32 QQ † 1920 C, ſeu quod idem eſt 32 QQ † 1920 C = 32768 R, & per hypobibaſmum fiet æquatio 32 C † 1920 Q = 32768. Inſtituto paraboliſmo, per applicationem omnium ad 32, numerum poteſtatis, & fiet 1 C † 60 Q = 1024.

Exemplum III. Propoſita ſit ęquatio 1 C — 140 R = 48.

Effinge $\frac{48}{1R}$, eſſe 1 R, & fiet æquatio 1 C † 140 Q = 2304. Huius æquationis radix eſt 4. Itaque $\frac{48}{4}$, hoc eſt 12, erit radix primò quæſita.

Quoniam enim $\frac{48}{1R}$, ſupponitur radix, eius cubus eſt comparandus, is autem eſt $\frac{110592}{1C}$, à quo ſi ſubtraxeris $\frac{6720}{1R}$, nempe productum ex 140, numero radicum in $\frac{48}{1R}$, remanebit $\frac{110592}{1C}$ — $\frac{6720}{1R}$, quod æquabitur 48, & per antitheſin, fiet $\frac{110592}{1C}$ = 48 R † $\frac{6720}{1R}$. Omnibus ductis in 1 R, fiet $\frac{110592 R}{1C}$ = 48 R † 6720. Omnibus ductis in 1 C, fiet 110592 R = 48 QQ † 6720 C, ſeu quod idem eſt 48 QQ † 6720 C = 110592 R 48 QQ † 6720 C = 110592 R, & per hybobimaſmum, fiet 48 C † 6720 Q = 110592. Omnibus diuiſis per 48, quod eſt paraboliſmum perficere, fiet † 1 C † 140 Q = 2304.

Exemplum IV. Propoſita ſit æquatio, quam etiam ſuperiùs attulimus, agentes de Poteſtatum numeroſa reſolutione; erat autem huiuſmodi 1 C — 16 R = 46080.

Effinge $\frac{46080}{1R}$, eſſe 1 R, & fiet 1 C † 16 Q = 21233 66400. Huius autem ęquationis radix Analyticè elicita reperitur 1280, quamobrem $\frac{46080}{1280}$, hoc eſt 36, erit radix primùm quæſita.

Et eodem modo ac ſuptà huiuſmodi æquatio tractati poteſt.

Exemplum V. Propoſita ſit æquatio 1 C — 96 R = 40.

Effinge $\frac{40}{1R}$, eſſe 1 R. Ita enim 1 C † 96 Q, æquabitur 1600. Huius autem æquationis radix eſt 4. Proinde $\frac{40}{4}$, ſeu 10, erit radix primò quæſita.

Exemplum VI. Propoſita ſit æquatio 1 C — 10 R = ℞ 48.

Effinge $\frac{℞\,48}{1R}$, eſſe 1 R, & fiet 1 C † 10 Q = 48. Huius æquationis radix eſt 2. Quare $\frac{℞\,48}{℞\,4}$, ſeu ℞ 12, erit radix, de qua primùm quęrebatur. Nam ſi radix eſt ℞ 12, eius cubus eſt ℞ 1728, productum verò à 10, in ℞ 12, eſt ℞ 1200, qua dempta ex ℞ 1728, remanet ℞ 48. Vides autem quomodo in noua æquatione aſſymmetria illa, qua alioquin æquatio propoſita laborabat, de medio ſublata ſit.

Hæc etiam demonſtrationibus firmari poſſunt. Et quidem Arithmeticè, vt perſpicuè conſtat; Geometricis namq; finibus non comprehenduntur; ſit enim ſolidi, cuiuſmodi eſt comparationis homogeneum, ductio quadratica, quamobrem ſit aſcenſus ad immaginarias quantitates, à quibus ſe ſe Geometram abſtinere, ſuprà notauimus, niſi tamen vnitatis vſum in Arte recipiat. De hoc tamen in ſecunda huius operis Parte diſſerendum.

Ad horum autem demonſtrationem faceret; quod ſequitur.

THEOREMA.

SI fuerit numerus, cuius cubus multatus producto ab ipſo in alium quempiam aſſumptum faciat reſiduum. Hoc ſi applicetur ad numerum prædictum, ortiuæ quantitatis cubus, vnà cum producto, ab eiuſdem quantitatis ortiuæ quadrato in illum aſſumptum numerum, æqualis eſt reſidui prædicti quadrato.

Sit numerus A, cuius cubus B, multatus numero C, producto ex A, in D, relinquat E, quo applicato ad A, proueniat F, cuius cubus ſit G, cui addito I, producto ex D, in H, quadratum ipſius F, proueniat K; Sit autem L, quadratum ipſius E.

Dico K, æqualem eſſe L.

B	C	E	G	I
512	96	416	140608	32448
A	D	F	H	K
8	12	52	2704	173056

L
173056

Hoc Theorema demonſtrari facilè poteſt, imitatione eorum, quæ ſuperiùs attulimus.

Quod ſpectat ad Quadrato-quadraticas æquationes.

Propoſita ſit æquatio 1 QQ — 3 C — 8 Q = 50.

Effinge $\frac{50}{1R}$ eſſe 1 R, proinde 1 QQ † 400 Q † 7500 R, æquabitur 125000, & fiet 1 R 10. Quamobrem $\frac{50}{10}$, ſeu 5, erit radix primò quæſita. *Explicantur æquationes quadrato-quadratica.*

Propoſita enim cum ſit æquatio 1 QQ — 3 C — 18 Q = 50, & efficta ſit radix $\frac{50}{1R}$, oportet $\frac{50}{1R}$, quadraticè multiplicare, at verò quadrato-quadratum ex $\frac{50}{1R}$, eſt $\frac{625000}{1QQ}$, de hoc autem oportet negare $\frac{375000}{1C}$, nempe productum ex 3, numero cuborum, in $\frac{125000}{1C}$, cubum ex $\frac{50}{1R}$. Denique oportet ſubtrahere $\frac{20000}{1Q}$, nempe productum ab 8, in $\frac{2500}{1Q}$, quadratum ipſius $\frac{50}{1R}$, fit igitur æquatio $\frac{625000}{1QQ}$ — $\frac{375000}{1C}$ — $\frac{20000}{1Q}$ = 50. Omnibus ductis in 1 QQ, fit $\frac{625000 R}{1QQ}$ — $\frac{375000 R}{1C}$ 20000 = 50 Q. Rurſus omnibus ductis in 1 C, fiet $\frac{625000 QC}{1QQ}$ — 375000 Q — 20000 Q = 50 QC. *Cùm æquatio eſt in qua quadrato-quadratum afficitur ſub quadrato, & cubo.*

Deniq; ductis omnibus in 1 QQ; fit 6250000 QC — 375000 CC — 20000 QQC = 50 CCC, & per antitheſin fit 50 CCC † 375000 CC † 20000 QQC = 625000 QC, & per hypobibaſmum fit 50 QQ † 375000 R † 20000 Q = 625000.

Inſtituto paraboliſmo per applicationem omnium ad 50, numerum maioris poteſtatis, & prouenit 1 QQ † 400 Q † 7500 R = 125000. Huius autem æquationis radix eſt 10, quamobrem $\frac{50}{10}$, hoc eſt 5, erit radix primò quæſita.

Propoſita ſit æquatio 1 QQ — 4 C — 11 Q = 36.

Effinge $\frac{36}{1R}$, eſſe 1 R, proinde 1 QQ † 396 Q † 5184 R, æquabitur 46656. Sit autem huius æquationis radix 6. Quamobrem $\frac{36}{6}$, ſeu etiam 6, erit radix primò quæſita. *Æquatio quadrato-quadratica, in qua nimirum quadrato-quadratum afficitur ſub quadrato, & cubo rurſus explicatur.*

Nouæ autem æquationis radicem eſſe 6, facilè conſtat ſi quidem eius quadrato-quadratum eſt 1296. At verò quadratum idem 36, ductum in 396, facit 14256, numerum quadratorum, ductus autem 6, in 5184, numerum radicum, facit 31104, at ſumma ex 14256; 31104, & 1296, eſt 46656; nempe comparationis homogeneum.

Propoſitæ etiam æquationis radix eſt 6, eius enim quadrato-quadratum eſt 1296, à quo ſi dempſeris 864, productum ex 4, numero cuborum in 216, cubum ex 6, remanet 432, à quo ſi dempſeris 396, productum ex 11, numero quadratorum in 36, quadratum ipſius 6, remanet 36, comparationis homogeneum.

Quod ſi fuerit æquatio in qua numerorum aſymmetria interceſſerit; ſic procedendum.

Cùm in huiuſmodi æquationibus irrationale numeri interceſſerint, atq; adeo æquatio ipſa numerorum aſymmetria laborat.

Propoſita ſit æquatio 1 QQ — 8 R = ℞ c 80.
Effinge $\frac{\text{℞ c 80}}{\text{1 R}}$, eſſe 1 R, & eueniet æquatio 1 QQ † 8 e = 8. Huius autem æquationis radix eſt 2. Propterea $\frac{\text{℞ c 80}}{\text{2}}$, hoc eſt ℞ c 10, erit radix, de qua primùm quærebatur.

Multum etiam incommodi vocum affert Αμφιβολια de qua inferiùs ſecunda huius operis parte diſſeremus. Remedium igitur aliquod eſt adhibendum, cuius præſidio æquationes alioquin inexplicabiles, commodè poſſint enodari.

Eſt autem climacticus deſcenſus, idem quod deſcēſus ſcalaris.

Dum igitur aliqua proponitur æquatio, ope ſuæ correlatæ per irregularem deſcenſum climacticum ad depreſſiorem reducitur. Atque adeo hac Artificis induſtria in æqualitatibus inuersò negatis vitatur amphibolia, atque dyſmecania. Itaquidem in cubicis quadrato-quadraticis, & ex inde per binos alternos climacticos gradus alioquin in quadraticis quadrato-quadraticis, & ex inde per binos alternos gradus huiuſmodi artificium locum non habet. Ad aliud propterea confugiendum.

Præceptum autem ſit huiuſmodi.

Præceptum.

Primò poteſtati radicis quæſitæ addiciatur poteſtas radicis æqualta; ſiquidem talium poteſtatum aggregatum diuiſionem recipit in prædicto climacticarum ordine.
Secundò homogeneum comparationis, unà cum translatis affectionum homogeneis, & addita poteſtate comparetur affecta magnitudini, quæ eandem diuiſionem recipiat; huiuſmodi enim comparatione inciditur in æqualitatem, correlatam, vel affirmatam, vel negatam directè.

Exemplo res illuſtratur.

Hæc autem vt intelligantur.
Proponatur b planum a — a^3, æquari z ſolido, & per metatheſin fiet a^3 = b plano a — z ſolido. Vtrique parti addatur e^3, ergo a^3 † e^3, æquabitur b plano a † e^3 — z ſolido.

Prima ipſius æquationis pars nempe b planum a † e^3, diuiſionem recipit ab a^3 † e^3. Dum enim ad laterum aggregatum, applicatur aggregatum cuborum, oritur aggregatum quadratorum minus rectangulo à lateribus, quamobrem applicatione facta, prouenit a^2 — e a † e^2.
Reliquum eſt, vt altera æqualitatis pars, nempe b planum a † e^3 — z ſolido, applicata ad a † e, faciat planum aliquod, iam ortis reliquis comparandum. Id quidem aſſequemur ſi in locum ipſius e^3 — z ſolido ſubſtituatur b planum e, proueniet enim b planum, ſi enim b planum a † b plano e, applicetur ad a † e, prouenit b planum, æquiualeat igitur ſubſtitutionis gratia. Data itaque hypotheſi quod e^3 — z ſolido, æquetur b plano e, per antitheſin fiet e^3 — b plano e = z ſolido. Quamobrem a^2 — e a † e^2, æquabitur b plano.
At verò ex ſupra explicatis innoteſcat e, erat enim æquatio e^3 — b plano e = z ſolido, cuius radix ex præceptis paulo antea traditis, nequit ignorari, eaque dicatur d, ergo a^2 — d a † d^2, æquabitur b plano. Omnibuſq; ordinatis ſecundum Artis præcepta d a — a^2, æquabitur d^2 — d plano.
Ex his facilè intelliges Theorema. Si b planum a — a^3, æquetur z ſolido etiam e^3 — b plano e, æquetur z ſolido. Innoteſcat autem e, eſſe d, igitur d a — a^2 æquabitur d^2 — b plano. His porto habitis, quæ in ſequentibus accuratis demonſtrationibus perſequemur, numeris mox explicabimus.

Exemplum.

Propoſita ſit æquatio 52 R — 1 C = *96*.
Igitur ex modo traditis fiet 1 C — 52 R = *96*. Huius autem æquationis radix eſt 8; qui erit numerus radicum æquationis quadraticæ, inuerſæ negationis. In qua comparationis homogeneum eſt 12, nempe inuentę radicis quadratum, minus numero radicum datæ æquationis. Proinde æquatio erit 8 R — 1 Q = 12. Huius

ius æquationis duplex eſt radix nempe 2, & 6. Vtraque autem ſatisfacit æquationi propoſitæ $52\ R - 1\ C = 96$.

Hæc vt meliùs intelligas; proponatur æquatio $52\ a - a^3$ æquatio 96, ex ijs igitur, quæ proponuntur adhibita metatheſi a^3, æquabitur $52\ a - 96$. Vtrique parti addatur e^3, ergo $a^3 + e^3$, æquabitur $52\ a + e^3 - 96$. Prima æquationis pars $e^3 + e^3$, diuiſionem recipit ab $a + e$, vt diximus, prouenit autem aggregatum quadratorum minus rectangulo à lateribus, itaque proueniet $a^2 - e\ a + e^2$. Reliquum eſt vt altera æqualitatis pars applicata ad $a + e$, faciat aliquod datum planum ortis reliquis comparandum, id autem fiet ſi in locum $e^3 - 96$; ſubſtituatur $52\ e$, prouenict enim 52, ſi enim $52\ a + 52\ e$, applicetur ad $a + e$, prouenit 52. Cum igitur $e^3 - 96$, æquetur ex hypotheſi $52\ e$ per antitheſin fiet $e^3 - 52\ e = 96$. Cuius æquationis radix, ex antea traditis innoteſcit 8, vt dicemus. Itaque $a^2 - e\ a + e^2$, æquabitur 52. Nota ſit e, nempe 8, ex præceptis traditis; ergo $a^2 - 8\ a + 64$, æquabitur 52, & ordinata æquatione ſecundum Artem fiet $8\ a - a^2 = 64 - 52$. Hoc aſt $8\ R - 1\ Q = 12$. Cuius æquationis duplex eſt radix 2, & 6, quarum vtraque propoſitę æquationi ſatisfacit, nempe $52\ R - 1\ C = 96$.

Supradictorum uberior explicatio.

Vides autem æquationem negationis inuerſæ omnibus retentis euadere negationis directæ, cuius radix inuenta, ſit radicum numerus æquationis quadraticæ, inuerſæ quidem negationis, cuius comparationis homogeneum eſt quadratum inuentæ radicis.

Animaduerſio.

Quod ſi propoſita fuerit æquatio, in qua datur affectio ſub quadrato. Vt $b\ a^2 - a^3 = z$ ſolido. Ex ijs, quæ proponuntur adhibita metatheſi, fiet æquatio in qua a^3 æquabitur $b\ a^2 - z$ ſolido addito vtrique æquationis parti e^3, fiet $a^3 + e^3 = b\ a^2 + e^3 - z$ ſolido. At z ſol. $- e^3$, æquetur $b\ e^2$. Hoc eſt $e^3 + b\ e^2$, æquetur z ſolido, & $a^3 + e^3$, æquabitur $b\ a^2 - b\ e^2$. Solidum autem affectum adiunctione cubi oportet reducere, quamobrem omnia applicentur ad $a + e$, igitur $a^2 - e\ a + e^2$, æquabitur $b\ a - b\ e$. Innoteſcat autem e, eſſe d, ex ijs, quę ſuperiùs explicuimus, nempe inſtituatur Analyſis æquationis ſuperioris $e^3 + b\ e^2 = z$ ſolido. Ordinetur æquatio quadratica $b\ a + d\ a - a^2 = d^2 + b\ d$.

Cùm affectio eſt ſub quadrato.

Æquatio proindè inuerſè negata, in affirmatam eiuſdem ordinis tranſmutata eſt, itaut data radice nouæ æquationis, fiat irregularis deſcenſus in æquationem depreſſiorem. Ex his illud intelliges Theorema.

Si $b\ a^2 - a^3$, æquetur z ſolido, & $e^3 + b\ e^2$, æquetur z ſolido, at verò e, innoteſcat eſſe d, erit $b\ a + d\ a - a^2$, ęquale $b\ d + d^2$.

Theorema.

Quæ vt numeris tractentur de more.

Propoſita ſit æquatio $42\ Q - 1\ C = 3200$.

Igitur $42\ Q + 1\ C$, æquatur 3200. Huius æquationis radix eſt 8. Addatur 8, ad 42, numerum quadratorum, fiet 50. pro numero radicum æquationis quadraticæ auulſæ. Et ad 336, productum ex 8, radice inuenta in 42, numerum quadratorum, addatur 64, quadratum inuentæ radicis, vt fiat 400, pro comparationis homogeneo iam dictæ æquationis quadraticæ; quæ propterea erit $50\ R - 1\ Q = 400$. Huius radix eſt duplex 10, & 40, & vtraque æquationem propoſitam ſoluit.

Numeris eadem explicantur.

Propoſita ſit æquatio $42\ a - a^3 = 3200$; per metatheſin fiet $a^3 = 42\ a^2 - 3200$. Addito autem vtrique æquationis parti e^3, fiet $a^3 + e^3 = 42\ a^2 + e^3 - 3200$. At $3200 - e^3$, æquetur $42\ e^2$, hoc eſt $e^3 + 42\ e^2$, æquetur 3200, & $a^3 + e^3$, æquabitur $42\ a^2 - 42\ e^2$. Diuidantur omnia per $a + e$, igitur $a^2 - e\ a + e^2$, æquabitur $42\ a - 42\ e$. Analyſi autem inſtituta ſuperioris æquationis $e^3 + 42\ e^2 = 3200$; nota fiet e, eaque ſit 8.

Recentiorum methodo idem abſoluitur.

Proinde $42\ a + 8\ a - a^2$, æquabitur $336 + 64$, hoc eſt $50\ a - a^2$ æquabitur 400. Seu fiet æquatio $50\ R - 1\ Q = 400$.

Vides autem æquationem negationis inuerſæ omnibus retentis euadere affirmatiuam, cuius radix inuenta ſit radicum numerus æquationis quadraticæ inuerſę quidem negationis; & comparationis homogeneum eſſe quadratum inuentæ radicis.

Animaduerſio.

 Quod

Quod ſi fuerit æquatio quadrato-cubica; & primo ſit affectio ſub latere. Sic procedendum.

Cùm æquatio fuerit quadrato cubica, & affectio ſub latere.

Proponatur b pl.pl. $a - a^5$, æquari z plano ſolido.

Exemplum.

Fiat quadrato-quadratum ex $e - a$; & ſingularia efformata plano-plana ſimpliciter, nec repetita quidem erunt $e^4 - a\, e^3 \dagger a^2 e^2 - a^3 e \dagger a^4$. Ducantur autem in $e \dagger a$, & fit $e^5 \dagger a^5$. At verò ex ijs, quæ proponuntur a^5, valet b pl.pl. $a -$ z plano ſolido, ergo $e^5 \dagger e^5$, ęquabitur $e^5 \dagger$ b plano-plano $-$ z plano-ſolido. Vtraque pars applicetur ad $e \dagger a$, & ex prima æquationis parte prouenit $e^4 - a\, e^3 - a^2 e^2 - a^3 e \dagger a^4$. Cùm verò non conſtet proueniens ex ſecunda, comparetur huiuſmodi plano-ſolido, vt plano-planum ortiuum non poſſit ignorari. Propterea b pl.pl. $e \dagger$ b pl.pl. a æquabitur alteri eius parti, nempe $e^5 \dagger$ b pl.pl. $a -$ z plano-ſolido. Vtrinque ſublata affectione ſub a gradu, & adhibita antitheſi, $e^5 -$ b pl.pl. e, æquabitur z plano-ſolido. Cùm autem innoteſcat e, eſſe d, dicendum $d^4 - d^3 a \dagger d^2 a^2 - d\, a^3 \dagger a^4$; æquari b plano-plano, & æqualitate ordinata ſecundum Artem $d^3 a - d^2 a^2 \dagger d\, a^3 - a^4$, æquabitur $d^4 -$ b plano-plano. Vnde Theorema.

Si b pl.pl. $a - a^5$, æquetur z plano-ſolido, & $e^5 -$ b pl. pl. e, æquetur z plano-ſolido; & innoteſcat e, eſſe d, vtrique $d^3 a - d^2 a^2 \dagger d\, a^3 - a^4$, æquabitur $d^4 -$ b pl.pl.

Numeris idē tractatur.

Numeris hoc modo. Propoſita ſit æquatio 176 R $-$ 1 Q C $\sqsupset$ 320; ergo 1 Q C $-$ 176 R, æquabitur 320. Huius radix eſt 4. Huius autem cubus eſt 64, & erit numerus radicum nouæ æquationis quadrato-quadraticæ, at verò eiuſdem 4, quadratum eſt 16, eritque numerus quadratorum. Deinde idem 4, erit numerus cuborum. Denique afferendum 1 QQ; hac lege ex ſupra traditis, quod radicum numerus gerat ſignum abundantiæ, at numerus quadratorum ſignum deffectus, numerus cuborum ſignum abundantiæ; denique poteſtas gerat ſignum deffectus. Igitur fiet æquatio 64 R $-$ 16 Q $\dagger$ 4 C $-$ 1 QQ $\sqsupset$ 80.

Huius autem radix Analyticè elicitur a, quamobrem initio æquationis propoſitę radix erit 2.

Cùm proponitur æquatio inuerſa negationis, fit æquatio negationis directa.

Cæterùm, cùm proponitur æquatio inuerſæ negationis, fit æquatio negationis directæ cuius radix eſt adhibenda, ad opus perficiendum, elicitur autem radix iuxta præcepta ſuperiùs tradita.

Hìc ſupereſſet modum tradere explicandi æquationem illam quadrato-quadraticam, & quidem hac de re ſuperiùs multa ſcripſimus, paulò infra induſtrioſiùs tamen idem argumentum tractabimus.

Propoſita ſit ęquatio $176\, a - a^5 \sqsupset 320$; operando iuxta præſcripta comperiemus $e^5 - 176\, e \sqsupset 320$; Cuius radix adinuenitur 4. Huius cubus, puta 64, erit numerus radicum, & 16, eiuſdem quadratum erit numerus quadratorum, & idem 4, erit numerus cuborum, vnde fiet $64\, e - 16\, e^2 \dagger 4\, e^3 - e^4 \sqsupset 256 - 176$, hoc eſt 80. Huius radix eſt 2, quanta eſt illa quæ propoſitæ æquationi ſatisfacit.

Quomodo hæc pragmatia inſtituatur.

Cæterùm pragmatia vt ſupra, inſtituitur. Supponitur enim $e - a$, ex quo effingitur quadrato-quadratum, vnde ſingularia efficta plano-plana ſimpliciter ſumpta, & non repetita ſunt $e^4 - a\, e^3 \dagger a^2 e^2 - a^3 e \dagger a^4$, ducantur in $e \dagger a$, fit $e^5 \dagger a^5$. Sed a^5, valet $176\, a - 320$, propterea $e^5 \dagger a^5$, æquabitur $e^5 \dagger 176\, a - 320$. Vtraq; pars applicetur ad $e \dagger a$, & ex prima æquationis parte oritur $e^4 - a\, e^3 \dagger a^2 e^2 - a^3 e \dagger a^4$.

Ortum autem ex ſecunda cum non conſtet, comparetur cùm huiuſmodi plano-ſolido itaut plano-planum inde ortiuum ignorari nequeat; ob id $176\, e \dagger 176\, a$, æquabitur alteri eius parti, nempe $e^5 \dagger 176\, a - 320$. Et vtrinque deleta affectione ſub a, gradu, & antitheſi adhibita, fiet $e^5 - 176\, e$, quod æquabitur 320. Innoteſcat autem e eſſe 4; etenim $256 - 64\, a \dagger 16\, a^2 - 4\, a^3 \dagger a^4$, æquabitur 176, & æqualitate ordinata $64\, a - 16\, a^2 \dagger 4 a^3 - a^4$, æquabitur $256 - 176$, hoc eſt 80.

De his vberius infra tractandum.

Sed vt diximus, de his fuſiori calamo ſuo loco tractabimus, vbi pariter conabimur remedium afferre aduerſos fractionis vitium, præter ea, quę ſuo loco ſcripſimus de Iſomœria diſputantes, ſic etiam, & numerorum aſymmetria nauſeam mouet, vnde renuit analyſin, Aduerſus illam nonnulla diximus, & alia in ſequentibus dice-

mus

mus. Hìc tamen non prætеribo ſilentio, pauca quædam de depreſſione æquationum in medium afferre, ſiue quadrato-quadratica ſit æquatio, ſiue cubica.

Illa æquatio deprimi poteſt ad quadraticam per medium cubicarum.

Illa quidem ad quadraticam deprimi poteſt per medium cubicarum à radice plana, & hæc ad quadraticam itidem à radice ſolida æquatio igitur in qua quadrato-quadratum afficitur ſub latere per medium cubicæ radicem habentis planam, deprimenda ſit ad quadraticam.

Propoſita ſit æquatio a^4 † b ſol. a = z plano-plano, & ex ijs quæ proponuntur a^4, æquabitur z plano-plano — b ſolido a, at verò vtrique æquationis parti addatur $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4, & proueniet a^4 † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4 = z plano-plano — b ſolido a † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4. Omnibus autem ſubquadraticè diuiſis, illic orietur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2.

At verò ipſi a^4, adiecta fuerunt in ſupplementum duo illa plano-plana $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4, quæ deficiebant alioquin à geneſi quadrati canonicè inſtituta à duobus radicibus planis; ex a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2, fit a^4 † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4; Si verò pars æquationis altera diuidi ſubquadraticè poſſet, fieret a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Diuidendo enim a^4 † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4, per a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2, fit quotiens a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2.

Quid agendū tractatur.

Effinge igitur quadratum à radice plana, cui altera illa æquationis pars comparetur, vt ei tandem radici planæ æquale fiat a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Sitque quadratum abs $\frac{\text{b ſolido}}{2\,e}$ — e a. Hoc enim modo in comparatione euaneſcent affectiones ſub a, vel gradibus, & incidetur in æquationem de e, quò tendit operatio, erit autem quadratum effictum $\frac{\text{b ſolido-ſolidum}}{4\,e^2}$ † $e^2 a^2$ — ſolido a, comparandum, & æquandum z plano-plano — b ſolido a † $e^2 a^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4.

Deletis vtrinque affectionibus $e^2 a^2$ — b ſolido a, & omnibus in 4 e^2, ductis e^6 † 4 z plano-plano e^2, æquabitur b ſolido-ſolido. At innoteſcat e^2, eſſe d^2, ergo $\frac{\text{b ſolidum}}{2\,d}$ — d a, æquabitur a^2 † $\frac{1}{2}$ d^2, & ordinata æquatione iuxta Artis præcepta fiet a^2 † d a = $\frac{\text{b ſolido}}{2\,d}$ — $\frac{1}{2}$ d^2.

Itaque ſi a^4 † b ſolido a, æquetur z plano-plano, & e quadrati-cubus † 4 z plano-plano e^2, æquetur b ſolido-ſolido. Innoteſcat e eſſe d, & a^2 † d a æquabitur $\frac{\text{b ſolido}}{2\,d}$ — $\frac{1}{2}$ d^2.

Numeris idē tractatur.

Eadem numeris tractemus.

Propoſita ſit æquatio a^4 † 4320 a = 27216. Iuxta ſuperiùs tradita, proueniet æquatio e quadrati-cubus † 108864 e^2 = 18662400. Huius autem æquationis radix eſt 12. Propterea iuxta ſuperiùs tradita, fiet æquatio a^2 † 12 a = 108. Huius æquationis radix eſt 6. Proinde 6, erit radix æquationis initio propoſitæ, Cæterum ex æquatione illa e quadrati-cubus † 108864 e^2 = 18662400, elicitur radix Analyticè, ex ijs, quæ nos in ſuperioribus ſcripſimus, eſt enim æquatio cubi affecti ſub quadrato.

Explicatio

Verumenim verò ipſius æquationis e quadrati-cubus † 108864 e^2 = 18662400, radicem eſſe 12, facilè conſtat; quandoquidem cubus ex 144, quod eſt quadrarum ipſius 12, eſt 2985984, cui ſi addatur 15676416, productum ex 108864, in 144, fit 18662400, comparationis homogeneum ipſius æquationis. At verò ęquationis propoſitæ a^4 † 4320 a = 27216, radicem eſſe 6, ex eo liquet, quòd quadrato-quadratum ex 6, eſt 1296, cui ſi addatur 25920, productum ex 4320 in 6, fit 27216, comparationis homogeneum æquationis propoſitæ.

Alia ſuperiùs tractanda.

Dari etiam poſſet æquatio a^4 — b ſolido a = z plano-plano. Item b ſolido a — a^4 = z plano-plano. Præpterea a^4 † 2 b a^3 = z plano-plano. Deinde 2 b a^3 — a^4 = z plano-plano; & aliæ etiam, de quibus, cum iterum in Specioſa, ſit agendum, ab earum conſideratione abſtinendum in præſentiarum duximus.

Solum hìc adijciam aliquid de cubicarum æquationum depreſſione ad quadraticas à radice ſolida.

Cubus affectus ſub latere affirmatè ad quadratum radicem habens ſolidam idemq; affectū reducitur.

Propoſitum igitur ſit cubum affectum ſub latere affirmatè ad quadratum radicem habens ſolidam, idemque affectum reducere.

Propoſitum ſit a^3 † b plano a, æquari 2 z ſolido, & ſit faciendum quod imperatur; Itaque e^2 † a e, ęquetur b plano. Ex huiuſmodi æquationis conſtitutione, b planum, intelligitur rectangulum ſub duobus lateribus quorum minus eſt e, differentia à maiori eſt a, ergo $\frac{\text{b planum} - e^2}{e}$, erit a. Quamobrem $\frac{\text{b plano plano-planum — 3 in b plano-planum † 3 ea in b planum — e⁶}}{e^3}$ † $\frac{\text{3 b planoplano — 3 b plano in e}^2}{e}$, æquabitur 2 z ſolido.

z ſolido. Omnibus autem per e^3 ductis, & ordinatis ſecundum Artis præcepta, fiet e cubi-quadratum † 2 z ſolido in e^3 ⊐ b plani-cubo.

Huiuſmodi autem æquatio eſt quadrati affirmatè affecti radicem habens ſolidam. Vnde colligitur.

Si a^3 † 3 b plano a, æquetur 2 z ſolido, & ℞ b plano-plano plani † z ſolido-ſolido æquetur d^3, certe $\frac{\text{b planum} - \text{da}}{\text{d}}$, ſit a. Quæ numeris illuſtrari poterunt.

Exemplum. Propoſita ſit ęquatio a^3 † 192 a ⊐ 4032. Sitque faciendum propoſitum, & e^3 † a e æquetur 64. Quid autem ſit 64, conſtat ex dictis, intelligitur enim fieri per multiplicationem duorum laterum, quorum minus eſt repręſentatum per e, differentia verò à maiori repręſentatur per a, itaut $\frac{64 - e^2}{e}$ ſit a. Quamobrem $\frac{262144 - 12288\, e^2 + 1924 - e^6}{e^3}$ † $\frac{12288 - 192\, e^2}{e}$, ęquabitur 4032, comparationis homogeneo ęquationis propoſitę. Omnibuſque ductis in e^3, & obſeruatis pręceptis Artis, fiet ęquatio e cubi quadratum † 4032 e^3 ⊐ 262144.

Itaque ſi a^3 † 192 a, ęquetur 4032, & 4326400, compoſiti ex 4064256, nempe quadrato ex 2016, & ex 262144 quęquidem radix eſt 2080, minus 2016, ęquetur 64, & 64 — 16, hoc eſt $\frac{48}{4}$, ęquabitur a.

Auctor ſe copioſius acturũ alibi pollicetur. De hoc tamen accuratiùs, atque copioſius in Specioſa differendum erit. Hæc ſufficiat attuliſſe, pro explicatione propoſiti.

Quando cubus eſt affectus ſub latere negatè. Si verò cubus affectus fuerit ſub latere negatè, hunc qui ſequitur in modum ad planum ſub radice ſolida, multatum quadrato reducetur.

Oportet autem in æquatione propoſita, cubum è triente coefficientis affectionis, cedere ſolidi comparationis ſubquadrato-quadrato.

Exemplum. Propoſita igitur ęquatio ſit a^3 — 3 b plano a, ęquari 2 z ſolido, & oportet facere, quod eſt propoſitum. Sit a e — e^2 ⊐ b plano. Ex huiuſmodi æquationis conſtitutione, b planum intelligetur rectangulum ſub duobus lateribus, quorum maius, vel minus eſt e. Summa verò minoris, re maioris a, ergo $\frac{\text{b planum} - e^2}{e}$, ęquabitur a. Quare $\frac{\text{b plano-plano-planum} + e^2 \text{ in } 3 \text{ b plano-planum} + e^4 \text{ in } 3 \text{ b planum} - e^6}{e^3}$ — $\frac{3 \text{ b plano-plano} - 3 \text{ b plano in } e^2}{e}$, ęquabitur 2 z ſolido.

Omnibus autem in e^3 ductis, & ſecundum Artem ordinatis 2 z ſolidum in e^3 — e^6, cubi quadrato æquabitur b plani cubo.

Hæc autem ęquatio eſt negationis inuerſę, cuius radix eſt ſolida. Deteominatio autem problematis conſtet, nempe ſolidi quadratum pręſtare debere b plani-cubo.

Igitur ſi a^3 — 3 b plano a, æquetur 2 z ſolido; fiet

℞ c z ſolidi † ℞ z ſolido-ſolidi — b pl.pl.pl. ✠ ℞ c z ſolidi — ℞ z ſolido-ſolidi — b plano plano-plano

Quamobrem ſi ſit 1 C — 81 R ęquetur 756, quandoquidem 378 † 351, eſt 729, cuius latus cubicum eſt 9, & 278 — 351, eſt 27, cuius latus cubicum eſt 3, propterea 9 † 5, nempe 12, radix erit quæſita.

Affectæ

Affectæ multipliciter, quæ ſunt æquationes explicantur.

CAPVT XXVII.

Explicatio æquationum multiplicis affectionis arduum eſt opus

ET ſi quaſi laboribus deſeſſi quidquid in medium allatis hucuſque, videbatur addi poſſe nos prætermittendum duceremus, tamen quia non eò videbatur Ars deducta, quò ſpectabat induſtria; propterea, maximè conſentaneum eſt viſum de explicandis æquationibus multiplicis affectionis pauca quędam ſubijcere, eo vel maximè quia nobile quoddam eſt argumentum, atque dignum, in quo ſedulus Analyſta verſetur. Accedit quòd ardua res, eſt plena ſanè difficultatibus, quibus ire obuiam excelſi, generoſique animi eſt. Quod ſi laborioſum eſt opns, tamen, vt Euripidi placuit.

Σὺν μυρίοις τὰ καλὰ γίγνεται πόνοις.

Et plauſibile quidem eſt labores ſuſcipere, nam

Ὅτι πάντα τὰ ζητούμεν' ἐξευρίσκεται.

Recenſentur ea de quibus futurus eſt ſermo.

Gradum propterea facimus ad explicandas æquationes multipliciter affectas, nimirum qua arte explicetur ęquatio quadrato-quadrati, tàm ſub latere, quàm quadrato; & quidem per affirmationem vtriuſque. Inſuper qua methodo explicari poſſit æquatio, in qua quadrato-quadratum afficitur ſub latere per affirmationem, & cubo per negationem. Item quomodo poſſit æquatio illa euolui, in qua quadrato-quadratum afficitur ſub cubo per affirmationem, & latere per negationem. Præterea, qua via ſit incedendum ad explicandam æquationem, in qua quadrato-quadratum afficitur ſub cubò, quadrato, & latere per affirmationem, quę facilè ex dictis ſuperiùs, & ex adiunctis exemplis intélligi poterunt. Satis enim copioſè reſolutionem Poteſtatum numeroſam tractauimus, quantum ad ęquationes non adeo affectionibus implicatas; de quibus hoc loco diſſerere, noſtrę ſunt partes. Illud porro, deſiderandum videbatur ad numeroſam Analyſin, nempe ratio interpunctionis, quę hac in re magnum habet momentum, & inde omnis Analyſis dependet; Sed hac de re ſermonem diſtulimus, ad ſequentia, pauloq; infra propterea nobis id erit tractandum ſumma diligentia, & ne in eo defeciſſe videamur, quod præſertim in Arte reſolutiua curandum omnino eſt. Primò autem id pręſtandum duximus generali illa ratione Analyſeos, qua ſuperiùs vſi ſumus. Deinde methodum afferemus, ſatis elegantem, qua quiſque poterit ab huiuſmodi implicatiſſimis ęquationibus ſe expedire. Interim ad generalem methodum quod attinet, nil aliud pręter dicta videtur ſubijciendum; Solùm propterea quędam paradigmata, nos afferemus, ex quibus cognitu minime erit difficile, quo pacto ſit incedendum in harum æquationum explicatione, eo vel magis, quod paulo infra interpunctionis Analyticę ratio ſnbijcietur, quę ad rem de qua agimus non parum coducit.

Interpunctionis Analytica ratio magnũ in Arte momentũ habet.

Duplex reſolutionis ratio.

Præmittendum eſt autem, quod in ſuperioribus docuimus, vt obuia ſit diuiſio ad indagandum ſingulare latus ſecundum, opus eſſe Specioſa ſyntheſi quadrato-quadrati affecti, prout Problema requirit à Binomia radice; quamobrem, ſingulare latus primum eſto a, ſingulare latus ſecundum ſit e, itaut vniuerſum ſit a † e, etenim examinato Problemate, proueniet æquatio $a^4 \dagger 4\,a^3 e \dagger 6\,a^2 e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4 \dagger$ b pl. $a^2 \dagger 2$ b pl. a e † b pl. e^2 † b ſol. a † b ſol. e $=$ z plano-plano, & per antitheſin fiet $4\,a^3 e \dagger 6\,a^2 e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4 \dagger 2$ pl. a e † b pl. e^2 † b ſol. e $=$ z plano-plano $-$ a^4 $-$ b pl. a^2 $-$ b ſol. a. Vnde è diuiſoribus ſuperiores erunt 2 b pl. a * b pl. * b ſol. Inferiores verò $4\,a^3 * 6\,a^2 * 4\,a$, qui quidem ſignis dum connectuntur faciunt ſummam ad quam applicandum eſt notum reſiduum, quod alteram æquationis partem conſtituit.

Paradigma

Paradigma analyſeos quadrato-quadrati affecti tàm ſub latere, quam quadrato.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b pl.	Coefficiens planum.	2	4 0	Subquadraticum. a † e 30
			. .	Tot puncta quadratica quot quadrato-quadratica.
d ſol.	Coefficiens ſolidum.		2 2 4	Sublaterale.
			. .	Tot puncta ſimplicium laterum, quot quadratica.
z pl.pl.	Quadrato-quadratum affectum reſoluendum.	1 9 9	8 7 2 0	
		.	Q C R .	Puncta quadrato-quadratica.
		QQ1	QQ11	
a^4		8 1		Quadrato-quadratum lateris primi.
	Plano-plana ablatitia.			
b pl. a^2		2 1	6 0	A quadrato-lateris primi in coefficiens planum.
d ſol. a.			6 7 2	A latere primo in coefficiens ſolidum.
a^4 † b pl. a^2 † d ſol. a.	Summa plano-planorum ablatitiorũ.	1 0 3	2 7 2	
z pl. pl. − a^4 − b pl. a^2, − d ſol. a.	Reliquum QQ, affecti reſoluendi.	9 6	6 0 0 0	

II. Eductio

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior	Solidum expletionis à coefficiente plano in duplum lateris primi.	1	4 5 0	a † e 30 † 6	2 b pl. a.
	Coefficiens planum.		2 4 0		b pl.
	Coefficiens ſolidum.		2 2 4		d ſol.
Reliquum quadrato-quadrati affecti reſoluendi.		9 6	6 0 0 0		z pl. pl. − a^4 − b pl. a^2 − d ſol. a.
Diuiſorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	1 0	8 0 0 0		4 a^3.
	Sextuplum quadrati eiuſdem.		5 4 0 0		6 a^2.
	Quadruplum latus primum.		1 2 0		4 a.
Summa omnium diuiſorum.		1 2	8 3 8 4		2 b pl. a † b pl. † d ſ. † 4 a^3 † b a^2 † 4 a.
Plano-plana facta à diuiſoribus.	Inferioribus.	6 4	8	A latere ſecundi in quadruplum cubum primi.	4 a^3 e.
		1 9	4 4	A lateris ſecundi quadrato in quadratum ſextuplum primi.	6 a^2 e^2.
		2	5 9 2	A lateris ſecundi cubo in quadruplum latus primum.	4 a e^3.
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	e^4.
	Superioribus	8	6 4 0	A latere ſecundo in ſolidum expletionis.	2 b pl. a e.
			8 6 4 0	A quadrato lateris ſecundi in coefficiens planum.	b pl. e^2.
			1 3 4 4	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.	d ſol. e.
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo reſoluendi quadrato-quadrati affecti.		9 6	6 0 0 0		4 a^3 e † 6 a^2 e^2 † 4 a e^3 † e^4 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d ſol. e ⊏ z pl. pl. − a^4 − b pl. a^2 − d ſol. a.

Dum igitur eſt æquatio 1 QQ † 240 Q † 224 R ⊏ 1998720, fit 1 R, valor 36, vt vides,

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, ſub Latere per affirmationem, & Cubo per negationem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b.	— Coefficiens longitudo.	6	0 .	Subcubica.
d ſol.	✠ Coefficiens ſolidum.	2 4 6	5 8 4 . .	Sublaterale.
z pl.pl.	Quadrato-quadratum affectum reſoluendum.	9 9 8 . QQ 1	0 1 6 0 CQR. QQ 12	Puncta quadrato-quadratica.
a^4. d ſol. a.	Plano-plana ablatitia.	2 5 6 9 8 7	 3 3 6	QQ lateris primi. A latere primo in coefficiens ſolidum.
a^4 † d ſol. a.	Summa ablatitiorum.	1 2 4 2	3 3 6	
b a^3.	Plano-planum addititium.	3 8 4	0	A lateris primi cubo in coefficientem longitudinem.
a^4 † d ſol. a ∽ b a^3.	Exceſſus ablatitiorum.	8 5 8	3 3 6	
z pl. pl. – a^4 – d ſol. a † b a^3.	Reliquum reſoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 3 9	6 8 0	

a
40

	0	0	
℞	4	6	Tot numerales circuli quot puncta, quadrato-quadratica.
Q	16;	36	
C	64;	216	
QQ	256;	1296	

II. Eductio

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

a † e
40 † 6

Diuiſorum pars ſuperior	— Solidum expletionis à coefficiéte in triplum quadratum lateris primi.	2 8	8 0		$3ba^2$.
	— Planum expletionis à coefficiente in triplum latus primum.		7 2 0		$3ba$.
	— Coefficiens longitudo.		6 0		b.
	✠ Coefficiens ſolidum.	2 5	6 5 8 4		d ſol.
Reliquum reſoluendi affecti quadrato-quadrati.		1 3 9	6 8 0 0		z pl. pl. − a^4 − d ſol. a † b a^3.
Diuiſorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	2 5	6		$4a^3$.
	Sextuplum quadratum eiuſdem.		9 6		$6a^2$.
	Quadruplum latus primum.		1 6		$4a$.
Summa diuiſorum affectionis affirmatæ.		5 1	2 3 4 4		d ſol. † $4a^3$ † $6a^2$ † $4a$.
Summa diuiſorum affectionis negatæ.		2 9	5 2 6 0		$3ba^2$ † $3ba$ † b.
Exceſſus diuiſorum affectionis affirmatæ.		2 1	7 0 8 4		d ſol. † $4a^3$ † $6a^2$ † $4a$ − $3ba^2$ − $3ba$ − b.
Plano-plana ablatitia à diuiſoribus.	Inferioribus.	1 5 3	6	A latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi.	$4a^3e$.
		3 4	5 6	A quadrato lateris ſecundi in ſextuplum quadratum lateris primi.	$6a^2e^2$.
		3	4 5 6	A lateris ſecundi cubo in quadruplum latus primum.	$4ae^3$.
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	e^4.
	Superior.	1 4 2	9 5 0 4	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.	d ſol. e.
Summa plano-planorum ablatitiorũ.		3 3 9	6 9 6 0		$4a^3e$ † $6a^2e^2$ † $4ae^3$ † e^4 † d ſol e.
Plano-plana addititia.		1 7 6	8 0	A latere ſecundo in ſolidum expletionis.	$3ba^2e$.
		2 5	9 2 0	A quadrato lateris ſecundi in planum expletionis.	$3bae^2$.
		1	2 9 6 0	A cubo lateris ſecundi in coefficientem.	be^3.
Summa plano-planorum additítiorũ.		2 0 0	0 1 6 0		$3ba^2e$ † $3bae^2$ † be^3.
Exceſſus ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendi affecti quadrato-quadrati.		1 3 9	6 8 0 0		$4a^3e$ † $6a^2e^2$ † $4ae^3$ † e^4 † d ſol. e. $3ba^2e$ − $3bae^2$ − be^3 = &c.

Dum itaque eſt æquatio 1 QQ − 60 C † 246584 R = 9980160,
fit 1 R valor 46.

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, ſub Cubo per affirmationem, & Latere per negationem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

b.	✣ Coefficiens longitudo.	2	0	Subcubica.
			.	
d ſol.	— Coefficiens ſolidum.		2 2 4	Sublaterale. 2 40
			. .	
z pl.pl.	Quadrato-quadratum affectum reſoluendum.	6 4 1	3 8 7 2	
		.	CQR.	
		QQ1	QQ11	
a^4.	Plano-plana ablatitia.	2 5 6		QQ lateris primi.
ba^3.		1 2 8	0	A lateris primi cubo in coefficientem longitudinem.
$a^4 \dagger ba^3$.	Summa plano-planorum ablati-	3 8 4	0	
d ſol.	Plano-planum additium.		8 9 6	A latere primo in coefficiens ſolidum.
$a^4 \dagger ba^3 -$ d ſol. a.	Exceſſus ablatitiorum.	3 8 3	1 0 4	
z pl. pl. — $a^4 - ba^3 \dagger$ d ſol. a.	Reliquum reſoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 5 8	2 8	

	0	0
R	4	6
Q	16;	36
C	64;	216
QQ	256;	1296

Tot numerarales circuli quot puncta quadrato-quadratica.

II. Eductio

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior	✠ Solidum expletionis à coefficiẽte in triplum quadratum lateris primi.	9	6 0	a † e 40 † 6	$3ba^2$.
	✠ Planum expletionis à coefficiẽte longitudine in triplum latus primum.		2 4 0		$3ba$.
	✠ Coefficiens longitudo.		2 0		b.
	— Coefficiens ſolidum.		2 2 4		d ſol.
Reliquum reſoluendi affecti quadrato-quadrati.		2 5 8	2 8 3 2		z pl.pl. − a^4 − b a^3 † d ſol. a.
Diuiſorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	2 5	6		$4a^3$.
	Sextuplum quadratum eiuſdem.		9 6		$6a^2$.
	Quadruplum latus primum.		1 6		4a.
Summa diuiſorum affectionis affirmatæ.		3 6	4 1 8 0		$3ba^2$ † 3ba † b † $4a^3$ † $6a^2$ † 4a.
Diuiſor affectionis negatæ.			2 2 4		d ſol.
Exceſſus diuiſorum affectionis affirmatæ.		3 6	3 9 5 6		$3ba^2$ † 3ba † b † $4a^3$ † $6a^2$ † 4a − d ſol.
Plano-plana ablatitia à diuiſoribus. Inferioribus.		1 5 3	6	A latere ſecundo in quadruplum cubum lateris primi.	$4a^3e$.
		3 4	5 6	A quadrato lateris ſecundi in ſextuplum quadratum lateris primi.	$6a^2e^2$.
		3	4 5 6	A lateris ſecundi cubo in quadruplum latus primum.	$4ae^3$.
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris ſecundi.	e^4.
Superioribus.		5 7	6 0	A latere ſecundo in ſolidum expletionis.	$3ba^2e$.
		8	6 4 0	A lateris ſecundi quadrato in planum expletionis.	$3bae^2$.
			4 2 2 0	A lateris ſecundi cubo in coefficientem longitudinem.	be^3.
Summa plano-planorum ablatitiorũ.		2 5 8	4 1 7 6		$4a^3e$ † $6a^2e^2$ † $4ae^3$ † e^4 † $3ba^2e$ † $3bae^2$ † be^3.
Plano-planum addititium.			1 3 4 4	A latere ſecundo in coefficiens ſolidum.	d ſol. e.
Exceſſus ablatitiorum æqualis reſiduo reſoluendo affecto QQ.		2 5 8	2 8 3 2		$4a^3e$ † $6a^2e^2$ † $4ae^3$ † e^4 † $3ba^2e$ † $3bae^2$ † be^3 − d ſ. e = z p.p. − a^4 − b a^3 † d ſol. a.

Dum itaque eſt æquatio 1 QQ † 20 C — 224 R = 6413872,
1 R valor erit 46.

Ad

Ad ſequentia duo Paradigmata. Hæc ſunt præmittenda.

IN primo proponitur æquatio $1\,QQ \dagger 6\,C \dagger 4\,Q \dagger 10\,R = 31800$. Cùm fuerit deprehenſum radicem vniuerſam ex duobus ſingularibus lateribus conſtare; atque adeo Binomiam eſſe. Singularia laiera ſint a, & e; ita vt vniuerſa radix ſit $a \dagger e$.

Præparatio ſpecioſa. Huius quadratum eſt $a^2 \dagger 2\,a\,e \dagger e^2$, eiuſdem cubus, eſt $a^3 \dagger 3\,a^2\,e \dagger 3\,a\,e^2 \dagger e^3$; eiuſdem quadrato-quadratum eſt $a^4 \dagger 4\,a^3\,e \dagger 6\,a^2\,e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4$. Coefficiens autem ſub cubo, ſit f, ſub quadrato, ſit b planum, ſub latere, ſit d ſol. Comparationis homogeneum ſit z pl.pl. Loco igitur quadrato-quadrati, ſubſtituatur effectum ex Binomia radice iam dicta; illud autem eſt $a^4 \dagger 4\,a^3\,e \dagger 6\,a^2\,e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4$. Cubus autem nimirum $a^3 \dagger 3\,a^2\,e \dagger 3\,a\,e^2 \dagger e^3$, ducatur in f, longitudinem, & proueniet $f\,a^3 \dagger 3\,f\,a^2\,e \dagger 3\,f\,a\,e^2 \dagger f\,e^3$. Ducatur autem quadratum, nempe $a^2 \dagger 2\,a\,e \dagger e^2$, ducatur inquam in b pl. & proueniet $b\,pl.\,a^2 \dagger 2\,b\,pl.\,a\,e \dagger b\,pl.\,e^2$. Deinde ducatur $a \dagger e$, in d ſol. & proueniet $d\,ſol.\,a \dagger d\,ſol.\,e$. Horum aggregatum eſt.

$$\left.\begin{array}{l} a^4 \dagger 4\,a^3\,e \dagger 6\,a^2\,e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4 \\ \dagger f\,a^3 \quad \dagger 3\,f\,a^2\,e \dagger 3\,f\,a\,e^2 \dagger f\,e^3 \\ \qquad \dagger b\,pl.\,a^2 \dagger 2\,b\,pl.\,a\,e \dagger b\,pl.\,e^2 \\ \qquad\qquad \dagger d\,ſol.\,a \dagger d\,ſol.\,e \end{array}\right\} = z\,pl.pl.$$

Ad indagandum ſingulare latus ſecundum quo pacto ſit inueſtigandus diuiſor. Horum inquam aggregatum, æquale eſt z pl.pl. comparationis homogeneo. Cùm autem fuerit elicitum latus ſingulare primum, & ex ipſo comparationis homogeneo ſubtractis plano-planis, eo ordine, vt primùm ex eo ſubtrahatur quadrato-quadratum primi ſingularis lateris; ſecundò plano-planum ſub cubo lateris primi, & coefficiente cuborum; tertiò ſub quadrato lateris primi, & coefficiente plano quadratorum, quartò ſub latere primo, & ſolido coefficiente.

Parandus eſt diuiſor ad ſecundum ſingulare latus indagandum acceptis his, quę ſequuntur, & in vnam ſummam collectis.

Diuiſores.

$$\begin{array}{l} \ 4\,a^3 \\ \dagger\ 6\,a^2 \\ \dagger\ 4\,a \\ \dagger\ 3\,f\,a^2 \\ \dagger\ 3\,f\,a \\ \dagger\ f \\ \dagger\ 2\,b\,pl.\,a \\ \dagger\ b\,pl. \\ \dagger\ d\,ſol. \end{array}$$

Diuiſores in vnum colligendi, vt inſtitui diuiſio poſſit ad indagandum ſingulare latus ſecundũ. Ad horum igitur aggregatum, fieri debet applicatio illius reſidui, vt inde proueniat ſingulare latus ſecundum.

Paradigma

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris.

PRopoſita ſit æquatio 1 QQ † 6 C † 4 Q † 10 R ⊐ 31800.	1 2
A numero 31800, ſubtrahe Quadrato-quadratum primæ figuræ 1, & eſt 1.	31800 1
A reſiduo.	21
Subtrahe 6, numerum factum à cubo primæ figuræ in numerum Cuborum.	6
A reſiduo annexa ſequente figura.	158
Subtrahe 4, numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	4
A reſiduo annexa ſequente figura,	154
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum Radicum.	10
A reſiduo inuenta ſecunda figura.	1530
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in ſecundam.	80
A reſiduo.	73
Subtrahe ſextuplum quadrati primę figurę ductum in quadratum ſecundę.	24
A reſiduo.	490
Subtrahe Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum ſecundæ.	32
A reſiduo.	4580
Subtrahe Quadrato-quadratum ſecundæ figuræ.	16
A reſiduo.	4564
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & ſecunda figura.	36
A reſiduo.	964
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato ſecundæ figuræ.	720
A reſiduo.	244
Subtrahe cubum ex ſecunda figura ductum in numerum Cuborum.	48
A reſiduo.	196
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ, & ſecundæ figuræ in numerum Quadratorum.	160
A reſiduo.	36
Subtrahe numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	16
A reſiduo.	20
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura ducta in numerum Radicum; & nihil remanet.	20
Ad indagandam ſecundam ipſam figuram paratur diuiſor modo infrà poſito; Aduerte autem nomine primæ figuræ intelligi latus primum quod ſi radix conſtet pluribus figuris, quàm duabus; primæ duę funguntur munere vnius, vt ſæpe dictum eſt.	00

Quadruplus Cubus primæ figuræ.	4
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	6
Quadruplum primæ figuræ.	4
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	18
Triplum primæ figuræ ductum in numerum cuborum.	18
Numerus Cuborum.	6
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8
Numerus Quadratorum.	4
Numerus Radicum.	10
Summa, & diuiſor.	6710

Paradigma item aliud analyſeos Quadrato-quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris.

PRopoſita ſit æquatio 1 QQ † 12 C † 10 Q † 16 R ⫽.	2 4 503808
A numero 503808, ſubtrahe Quadrato-quadratum primæ figuræ 2, & eſt 16.	16
A reſiduo.	343
Subtrahe 8, cubum primæ figuræ 2, ductum in 12, numerum Cuborum.	96
A reſiduo annexa ſequente figura.	2478
Subtrahe 4, quadratum primæ figuræ ductum in 10, numerum Quadratorum.	40
A reſiduo annexa ſequente figura.	24380
Subtrahe 2, primam figuram ductam in 16, numerum Radicum.	32
A reſiduo inuenta ſecunda figura.	243348
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in ſecundam.	128
A reſiduo verò.	115348
Subtrahe ſextuplum quadrati primę figurę ductum in quadratum ſecundę.	384
A reſiduo autem.	77708
Subtrahe Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum ſecundæ.	512
A reſiduo verò.	71968
Subtrahe Quadrato-quadratum ſecundæ figuræ.	256
A reſiduo.	717712
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & ſecunda figura.	576
A reſiduo.	14112
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato ſecundæ figuræ.	11152
A reſiduo.	2592
Subtrahe cubum ex ſecunda figura ductum in numerum Cuborum.	768
A reſiduo.	1824
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ, & ſecundæ figuræ in numerum Quadratorum.	160
A reſiduo.	224
Subtrahe numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	160
A reſiduo.	64
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura ducta in numerum Radicum;	64
	00

In præcedenti Paradigmate licet intueri methodum inſtituendi analyſin æquationis in qua QQ, afficitur adiunctione, cubi, quadrati, & lateris. Solùm ſupereſt adnotare modum indagandi ſecundam figuram; Aduerte diuiſorem parari hac methodo.

Quadruplus Cubus primæ figuræ 2.	32
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	24
Quadruplum primæ figuræ.	8
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	144
Triplum primæ figuræ ductum in numerum cuborum.	72
Numerus Cuborum.	12
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	40
Numerus Quadratorum.	10
Numerus Radicum.	16
Summa, & diuiſor. per quem	50038

Diuiſo 243488, *fit quotiens, ſecunda figura* 4, *ſatisfaciens &c.*

Si

Si itaque fuerit propoſita quædam æquatio, in qua 1 QQ † 12 C † 10 Q † 16 R ⊏ 503808. Rectè dicemus vnius radicis pretium eſſe 24; huius enim quadrato-quadratum eſt 331776, & eiuſdem cubus eſt 13824; quapropter 12 C, valebunt 165888. Inſuper 10 Q (quoniam quadratum ipſius 24, eſt 576) eſt 5760, demum 16 R, pretium erit 384. Porrò hi numeri ſi in vnam ſummam colligantur, fiet numerus 50808, qui in æquatione munere comparationis homogenei fungitur. Hæc autem cernere licet in adiuncto exemplo; quamobrem de his hactenus. *Epilogiſmus.*

331776
165888
5760
384
50808

S C H O L I O N.

Qvoniam ſyntheſis dictat analyſin, haud erit difficile, qua hactenus explicauimus iuxta methodum Vietaam, demonſtrationibus confirmare, cuiuſcunque enim allata poteſtatis affecta ſyntheſin perpendendo, licebit analyſin cognoſcere, & eandem rectè ſecundum præſcriptam methodum ordinatam eſſe demonſtrare. Nos quidem ſolùm in æquationibus quadraticis, demonſtrationes attulimus, prætermittentes in reliquis, quandoquidem nimiùm opus excreſcebat, eoque libentiùs eas prætereundas ſilentio duximus, quod ex animaduerſione ſyntheſeos, quemadmodum dicebamus, ipſas conijcere citra difficultatem cuicunque licebit. Quod autem de poteſtatibus affectis aſſerimus, de puris quoque, & multò faciliùs intelligendum volumus: quamobrem operæ pretium duximus, ibi Theoremata illa ſynthetica adnotare; quandoquidem iuxta illa fuit inſtituta analyſis. Seu de his hactenus, qua arte commemoratæ æquationes explicari poſſint intercedentibus numeris irrationalibus &c. (quemadmodum adnotauimus quoque nos in ſuperioribus) hucuſq; deprehenſum non erat; licuit aliquando, fauente Deo, methodum adeo ſublimem adinuenire. *Cæterùm methodorum demonſtrationes prætermittuntur, nec immerito, cùm facilè eas animaduerſione ſyntheſeos quiſque poſſit conijcere.*

Cæterùm de reductione æquationum copioſiùs agendum foret: at quoniam hac de re iterum in Algebra Specioſa rediturus eſt ſermo; proinde nos contemplationem hanc in præſentia prætermitemus, in præcitato loco de eadem ſermonem habituri. Ex æquationibus explicatis, cuicunque licebit aduertere methodum procedendi in alijs æquationibus: plurimùm autem conferet ad analyſin rectè inſtituendam, aduertere pretium figuræ; ex hac enim obſeruatione non erit operoſum intelligere locum ipſi figuræ debitum; vnde ipſius reſolutionis ordinatio dependet; Si igitur prima figura ſit 1; radix autem vniuerſa duabus figuris conſtet, latus primum erit 10; quamobrem dum dicitur, ſumendum eſſe duplum lateris primi, illudque eſſe 2; intelligere oportet circularem comitantem figuram; quandoquidem latus erat 20; ob id 2 valebit 20; quo fit, vt figura 2 conſtitui debeat in ordine denariorum, non vnitatum, ſi foret prima figura 2; & vniuerſum latus duabus figuris conſtaret, ſignificabit 20; quamobrem duplum ipſius erit 4; aſſumens 0; vnde fit 40; eius quadratum erit 4; hoc eſt 400; quo fit, vt duplum illud lateris conſtitui debeat ſic, vt nimirum 2 cadat in loco denariorum, ſicuti 0, in loco vnitatum; ita quoque dum accipitur 4; pro quadrato illius figuræ 2; conſtitui debeat in loco centenariorum; non denariorum; neque vnitatum. Itaque in ſuperiori primo exemplo, cum diceretur e. g. ſumatur quadruplus cubus primæ figuræ 1; quoniam radix eſt 12; duabus figuris conſtans; quadratum primæ eſt 1, aſſumens 00; hoc eſt 100; quapropter eius cubus erit 1000; atque adeo quadruplus cubus erit 40000; quo fit vt 4; ad indagandam ſecundam figuram, debeat conſtitui in ordine milliariorum &c. Quod animaduertiſſe iuuabat, & mox conſtabit magis ex Analytica interpunctionis ratione. *Notanda quædam.*

Hìc iterùm inſudandum eſt nobis, aduerſus nimiam affectionem, quam Græci πολυπαθείαν dixerunt. Quando enim æquatio, ad altos gradus aſcendit; atq; loca omnia ſunt expleta; multipliciter afficiatur neceſſe eſt; At verò plurimum inde laboris Analyſtæ ſubſtinendum erit, ad illam explicandam; & certè in hoc tota videtur eius poſita induſtria; atque adeo, tantò hinc plus gloriæ ipſe conſequitur; *Iterum aſſumitur opus aduerſus nimiã affectionem, quam Græci polipathian appellant.*

quantò difficiliùs eſt rem ſatis pro dignitate tractare. Conabimur hìc breuiter hęc omnia maiori, qua poſſumus claritate in medium afferre; vt æquationes huius generis ἐυμηχανῶς explicentur.

Proponitur explicanda quadam æquatio. Tollendus eſt ſecũdus æquationes terminus.

Propoſita ſit æquatio explicanda 1 QQ — 24 C † 263 Q — 3456 R † 20736 = 0.

Primò oportebit de medio tollere ſecundum terminum, nimirum C. Diuidati; proinde 24, numerus cuborum per 4, exponentem elatioris poteſtatis, fiet quotiens 6. Alteriùs æquationis radix eſto a; propoſitæ igitur erit a † 6, cuius quadratum eſt a^2 † 12 a † 36; cubus vero eſt a^3 † 18 a^2 † 108 a † 216. At verò eiuſdem quadrato-quadratum eſt a^4 † 24 a^3 † 216 a^2 † 864 a † 1296. Inſtituenda vero eſt operatio, vt hìc à latere cernitur; Cautè procedendum eſt tamen in hac pragmatia, quandoquidem præ oculis habenda eſt ratio ſignorum deffectus, & abundantiæ, quæ vexat. Artificem, & in errorem trahit, eſt etiam magnopere aduertendum, ad hoc perficiendum, nenè, Analyſtam inſtructum eſſe debere in diuiſione inſtituenda alicuius æquationis, per incognitam quantitatem, plus vel minus quantitate, quæ abſq; fractione, vltimum æquationis terminum diuidere poſſit huiuſmodi enim Binomio ſic inſtituitur diuiſio æquationis ſex dimenſionum, quę tamen pro tribus ſummi poſſunt, ita vt ex huiaſmodi diuiſione prodeat, vel radix æquationis, quæ erit ipſius Binomij cognita quantitas.

Vſus ſignorũ †, & — ſæpè vexat Artificem.

a † 6	R
a † 6	
6 a † 36	
a^2 † 6 a	
a^2 † 12 a † 36	Q
a † 6	
6 a^2 † 72 a † 216	
a^3 † 12 a^2 † 36 a	
a^3 † 18 a^2 † 108 a † 216	C
a^2 † 12 a † 36	
a^2 † 12 a † 36	
36 a^2 † 452 a † 1296	
12 a^3 † 144 a^2 † 432	
a^4 † 12 a^3 † 36 a^2	
a^4 † 24 a^3 † 216 a^2 † 864 a † 1296	pro † 1 QQ
— 24 a^3 — 432 a^2 — 2592 a — 5184	pro — 24 C
† 263 a^2 † 3556 a † 9468	pro † 263 Q
— 3456 a — 20736	pro — 3456 R
20736	pro † N
a^4 * † 47 a^2 — 2028 a † 5580 = 0.	

Æquatio per dimenſionem ad duas dimenſiones redacta, vulgaribus præceptis explicatur.

Vel æquatio per ipſam diuiſa ad duas dimenſiones redacta; facilè vulgaribus præceptis explicatur, Ita fit vt huius radice cognita, & etiam quadrato-quadraticæ æquationis radix ignorari non poſſit.

Sex dimenſionum ęquationis radix eſt quantitas, quę ſit coefficiens ſublateralis ęquationis

tionis quadraticæ, cuius radix eſt, quæ initio æquationis propoſitæ ſatisfacit.
Supponamus igitur, æquationem illam ad hos terminos eſſe redactam.

Præparationis continuatio ad æquationis propoſitæ explicationem.

$$a^4 \; * \qquad p\,a^2 \qquad q\,a \qquad r = 0,$$

Et loco iſtius æquationis ſcribenda eſt hæc.

$$e^6 \qquad 2\,p\,e^4 \qquad \begin{matrix} \dagger\, p^2 e^2 - q^2 = 0. \\ 4\,r \end{matrix}$$

Hoc tamen obſeruandum. Si in præcedenti æquatione ſit † p; in ſecunda poni debet † 2 p; & ſi in illa eſt — p, in hac poni debet — 2 p. Contra verò ſi ibi ſit † r, hic poni debet — 4 r, quod ſi ibi ſit — r; hìc poni debet † 4 r. At verò, ſiue ibi ſit † q; ſiue — q, ſemper hìc oportet ponere — q^2. Denique ſi a^4, & e^6, afficiantur ſigno †, poni debet † p^2. Quod ſi afficerentur ſigno — ponere oporteret — p^2. Hoc igitur præcepto in memoriam reuocato; cùm æquatio illa $a^4 * \dagger\, 47\, a^2 - 2028\, a \dagger\, 5580 = 0$, ad hanc fuerit redacta $e^6 \dagger\, 94\, e^4 - 20111\, e^2 - 4112784 = 0$. Extrahenda eſt radix huius æquationis, quam reperiemus 13.

Obſeruanda quædam circa notas †, & —.

Beneficio huius inuentæ radicis, loco illius æquationis.

$$a^4 \; * \qquad p\,a^2 \qquad q\,a \qquad r = 0.$$

Has duas alias ſcribendas eſſe iam ſuperiùs adnotauimus.

$$a^2 - e\,a \dagger \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \tfrac{1}{2} p \qquad \tfrac{q}{2e} = 0.$$
$$\dagger\, a^2 \dagger\, e\,a \dagger \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \tfrac{1}{2} p \qquad \tfrac{q}{2e} = 0.$$

Habita ſemper cautione ſignorum †, & —; ita vt ſi in præcedenti æquatione ſit † p; in vtraque iſtarum duarum ponere oporteat † $\frac{1}{2}$ p, & ſi in priori habeatur — p, in poſterioribus ponere debemus — $\frac{1}{2}$ p. Et vbi habetur — e a, ponere oportet † $\frac{q}{2e}$, & vbi ſcriptum eſt † e a, ſcribere oportet — $\frac{q}{2e}$, prout nimirum habetur in prima † q. Contra verò ſi habetur ibi — q, ponere oportet — $\frac{q}{2e}$, in illa videlicet, vbi ſcriptum eſt — e a; & vbi eſt † e a, ſcribendum eſt † $\frac{q}{2e}$. Hoc præcepto in memoriam reuocato; Quandoquidem loco æquationis $a^4 * \dagger\, 47\, a^2 - 2028\, a \dagger\, 5580 = 0$, ſubſtituimus alteram illam $e^6 \dagger\, 94\, e^4 - 20111\, e^2 - 4112784 = 0$, & huius inuenta eſt radix 13. Propterea loco illius æquationis $a^4 * \dagger\, 47\, a^2 - 2028\, a \dagger\, 5580 = 0$, ſcribantur hæ.

Obſeruanda iterum circa ſigna †, & —.

$$\dagger\, a^2 - 13\, a \dagger\, 30 = 0, \quad \& \quad \dagger\, a^2 \dagger\, 13\, a \dagger\, 30 = 0.$$

Nam $\frac{1}{2} e^2 \dagger \frac{1}{2} p - \frac{q}{2e}$, idem eſt quod † 30, quod eſt magnopere obſeruandum.

Hic diligenter obſerua.

Et per antitheſin reuocata ſecunda æquatione ad hanc formam $13\, a - a^2 = 30$. Radicem huius extrahentes; reperiemus eam 3. Quamobrem illius ſuperioris æquationis $a^4 * \dagger\, 47\, a^2 - 2028\, a \dagger\, 5580 = 0$, radix erit 3. Cumque diceremus a † 6, æquari 1 R. Proinde æquationis illius 1 QQ — 24 C † 263 Q — 3456 R † 20736 = 0, radix erit 9. Propoſitam igitur æquationem explicuimus.

Radicis quæſita exhibitio.

Illud porro animaduertendum eſt; nimirum ſi hæc æquatio, ad formam Vietæam reuocetur, hunc in modum ſe habere.

$$24\,C \dagger 3456\,R - 263\,Q - 1\,QQ = 20736.$$

Vel $3456\,R - 263\,Q \dagger 24\,C - 1\,QQ = 20736$.

Quamobrem hæc æquatio eſt, in qua 1 QQ, afficitur negatè.

Explicatur æquatio, quæ iam ſupra habita eſt. Pagina 388.

** Vel loco a, adhibendo e, aut aliam vocali &c.*

Propoſita olim æquatio ſit ſuperior $64\,R - 16\,Q \dagger 4\,C - 1\,QQ = 80$. Quæ ſic etiam enunciatur, nempe $64\,a - 16\,a^2 \dagger 4\,a^3 - a^4 - 80 = 0$. Et ad hanc formam reuocatur $a^4 \dagger 16\,a^2 - 4\,a^3 - 64\,a \dagger 80 = 0$.* Præſtat verò hunc in modum æqualitatem concipere, vt ex dictis cuique facile conſtare poteſt. Sit $1\,QQ \maltese 16\,Q - 4\,C - 64\,R \maltese 80 = 0$. Diuidatur numerus cuborum puta 4, per exponentem elatioris poteſtatis, fit quotiens 1.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & a & \dagger\ 1 \\
 & & & a & \dagger\ 1 \\
\hline
 & & & a & \dagger\ 1 \\
 & & a^2 \dagger & a & \\
\hline
 & & a^2 \dagger & 2\,a & \dagger\ 1 \\
 & & & a & \dagger\ 1 \\
\hline
 & & a^2 \dagger & 2\,a & \dagger\ 1 \\
 & a^3 \dagger & 2\,a^2 \dagger & a & \\
\hline
 & a^3 \dagger & 3\,a^2 \dagger & 3\,a & \dagger\ 1 \\
 & & & a & \dagger\ 1 \\
\hline
 & a^3 \dagger & 3\,a^2 \dagger & 3\,a & \dagger\ 1 \\
a^4 \dagger & 3\,a^3 \dagger & 3\,a^2 \dagger & a & \\
\hline
a^4 \dagger & 4\,a^3 \dagger & 6\,a^2 \dagger & 3\,a & \dagger\ 1 \\
\hline
a^4 \dagger & 4\,a^3 \dagger & 6\,a^2 \dagger & 4\,a & \dagger\ 1 \\
 & -4\,a^3 & -12\,a^2 & -12\,a & -4 \\
 & & \dagger\ 16\,a^2 & \dagger\ 32\,a & \dagger\ 16 \\
 & & & -64\,a & -64 \\
 & & & & \dagger\ 80 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\text{pro} \maltese\ 1\,QQ \\
\text{pro} -\ 4\,C \\
\text{pro} \dagger\ 16\,Q \\
\text{pro} -\ 64\,R \\
\text{pro} \dagger\ n.
\end{array}$$

$$a^4 * \dagger 10\,a^2 - 40\,a \dagger 29 = 0.$$

Itaq; intelligatur radix eſſe $a \dagger 1$, eius quadratum erit $a \dagger 2\,a \dagger 1$, & eiuſdem cubus erit $a^3 \dagger 3\,a^2 \dagger 3\,a \dagger 1$, & eiuſdem quadrato-quadratum erit $a^4 \dagger 4\,a^3 \dagger 6\,a^2 \dagger 3\,a \dagger 1$. Itaque pro ipſius $a \dagger 1$, quadrato-quadrato ſcribendum erit ipſum collectum multiplicatione quadrato-quadratum, nimirum $a^4 \dagger 4\,a^3 \dagger 6\,a^2 \dagger 4\,a \dagger 1$, pro $-4\,C$, ſcribendum $-4\,a^3 - 12\,a^2 - 12\,a - 4$, pro $\dagger 16\,Q$, ſcribendum $\dagger 16\,a^2 \dagger 32\,a \dagger 16$, pro $-64\,R$, oportet ſcribere $-64\,a - 64$, pro $\dagger 80$, denique ſcribendum $\dagger 80$, fiet autem ſumma de medio ſublato ſecundo æquationis termino $a^4 * \dagger 10\,a^2 - 40\,a \dagger 29 = 0$. Huius autem habitę æquationis, radix exhibeatur; quæ quidem explicatum in modum indagabitur.

Reductio æquationum quatuor dimenſionum.

Iam enim ſuperiùs inſinuauimus reductionem æquationum quatuor dimenſionum Problemate exiſtente plano, quod cumulatius ſuo loco proſequemur; etenim cum huiuſmodi fuerit æquatio, in qua incognita quantitas quatuor dimenſiones habeat, ſublatis primò ſurdis, & fractis numeris, ſi qui ſunt, perpendendum eſt, num reperiatur binomium compoſitum ex incognita quantitate plus, vel minus aliqua quantitate cognita, quæ abſque fractione vltimum terminum diuidat, quod quidem binomium totam diuidat ſummam; id enim ſi reperiatur, vel huiuſmodi binomij

cognita

cognita quantitas quæſita erit radix, vel ſaltem poſt diuiſionem hanc, relinquentur tantum in æquatione tres dimenſiones, ita vt illa deindè examinanda ſit. Quod ſi huiuſmodi binomium reperire non liceat, augendo, vel minuendo radicis valorem oportebit ſecundum terminum æquationis de medio tollere; mox autem illam ad aliam reuocare, quæ tres tantummodo dimenſiones contineat.

Tollendus eſt ſecũdus æquationis terminus.

Pars aliquota numeri abſoluti huic æquationi tanquam latus ſatisfacit, vt.

Si propoſita foret æquatio $1\,QQ + 24\,C + 263\,Q + 3456\,R - 60864 = 0$.

Primùm iuuat ſecundum æquationis terminum de medio tollere, quod vt perficere poſſimus. Diuidere debemus 24, numerum cuborum ſecundum terminum per 4, exponentem maioris poteſtatis, & fit quotiens 6, quo intelligi debet aucta radix æquationis propoſitæ.

Proponuntur æquatio explicanda.

Itaut $a - 6$, ſit æqualis 1 R, & effectis poteſtatibus ex $a - 6$, tanquam ex radice vſque ad quadrato-quadratum fiet $a^2 - 12\,a + 36$, pro quadrato $a^3 - 18\,a^2 + 108\,a - 216$, pro cubo, & $a^4 - 24\,a^3 + 216\,a^2 - 864\,a + 1296$, pro quadrato-quadrato. Vnde facta multiplicatione per ſingulas coefficientes, fiet.

$$\begin{array}{rrrrrl}
a^4 & -\,24\,a^3 & +\,216\,a^2 & -\,864\,a & +\,1296 & \text{pro} + 1\,QQ \\
 & +\,24\,a^3 & -\,432\,a^2 & +\,2592\,a & -\,5183 & \text{pro} + 24\,C \\
 & & 263\,a^2 & -\,3156\,a & +\,9468 & \text{pro} + 263\,Q \\
 & & & +\,3456\,a & -\,28736 & \text{pro} + 3456\,R \\
 & & & & -\,60864 & \text{pro} - n. \\
\hline
a^4 & * & +\,47\,a^2 & +\,2028\,a & -\,76020 & = 0.
\end{array}$$

Huius autem æquationis radix puta 14, multata 6, eo, quo intelligebatur incremento aucta, radix, fit 8, pro radice æquationis propoſitæ $1\,QQ + 24\,C + 3456\,R + 263\,Q - 60864 = 0$.

Radix æquationis propoſitæ.

Comparatur huius æquationis radix methodo iam explicata, & quidem quantitas, veluti pars aliquota numeri abſoluti ad applicationem idonea eſt 5430. Vnde facto paraboliſmo, innoteſcet radix 14, quæ multata incremento 6, prouenit 8, latus æquationis propoſitæ.

Æquationis igitur ſuperioris radix eſt 1, vti perſpicuum eſt, quod etiam manifeſtiùs cognoſcetur periculo facto in ipſa vnitate, cuius quadrato-quadratum eſt 1, cui addito 10, pretio decem quadratorum, fit 11, cui addito 29, numero abſoluto, fit 40, ex quo ſubtracto 40, pretio quadraginta radicum, remanet 0. Quoniam verò $a + 1$. Supponebatur æquari 1 R; proinde æquationis propoſitæ $1\,QQ + 16\,Q - 4\,C - 64\,R + 80 = 0$. Radix erit 2.

In his quidem cernuntur Artis myſteria, nam per diuerſas metamorphoſes, trigaſq; multiplices denique veritatem adipiſcimur.

Diuina huius Artis myſteria.

At verò cùm æquatio ad tres dimenſiones reducta eſt, & quærendus eſt valor radicis, in hoc præſertim eſt inſudandum, ſcilicet in inſtituenda diuiſione ipſius æquationis per binomium ex incognita, & cognita quantitate conſurgens. Idque fit, obſeruando vltimum terminum, & quantitates omnes ordine examinando, quæ abſq; fractione vltimum terminum diuidere poſſunt, videndum eſt enim, num aliqua ex ipſis iuncta cum quantitate incognita per ſignum abundantiæ, vel deffectus componere poſſit binomium, quod diuidat totam ſummam; quod ſi contingat (in Geometricis quidem cùm id euenit Problema dicitur planum) aut cognita quantitas huiuſmodi binomij eſt radix quæſita; aut æquatio per ipſum diuiſa ad duas dimenſiones deducta erit; Qua Arte igitur huiuſmodi applicatio perfici debeat eſt adiſcendum. Sed hac de re præſtabit in Specioſa copioſè tractare. Solum hìc breuiter inſinuabo, nempe incognitam quantitatem ſi eſt quadratum, adhiberi tamen veluti radicem, ſi quidem quadrati cubus, eſt cubo-cubus lateris, vnde quadratum eſt. Ordine igitur examinando æquationem, num diuidi poſſi per aliquod

Quando æquatio quadrato quadratica, ad æquationẽ trium dimenſionum reuocata fuerit.

Quædam obſeruatu digna

quod

quod ex binomijs iam dictis, quæ nimirum comparantur, obſeruato primùm vltimo terminorum, è diuidentibus illud diuiſio ipſa perficitur.

A quatuo triũ dimenſionum explicatur.

Itaque ſi propoſita foret æquatio $e^6 - 16e^4 - 680e^2 - 1440 = 0$; examinare oportet quantitates, quibus diuidi poteſt 1440 ſine fractione, inter reliquas autem eſt 36, quamobrem examinanda eſt æquatio, num diuidi poſſit per vnum ex binomijs, quæ fiunt ex ignota quantitate e^2, & vna ex quantitatibus diuidentibus 1440, ſine fractione, reperiemus autem diuidi poſſe per $e^2 - 36$.

$$\begin{array}{c}
+ e^6 - 16e^4 - 680e^2 - 1440 \\
- e^6 - 20e^4 - 40e^2 - 36 \\
\hline
0 - 36e^4 - 720e^2 \\
36 \qquad\quad 36 \\
\hline
e^4 + 20e^2 + 40 = 0.
\end{array}$$

Explicatur diuiſio æquationis per binomium ex ignota, notaq; quantitate ad æquationis radicem indagandam.

Initio autem facto ab vltimo termino -1440; cum diuido per -36, fit quotiens $+40$, reponendus in quotiente, deinde multiplico $+40$, per $+e^2$, & fit $+20e^2$, ac proinde in ſumma diuidenda repono $-20e^2$. Scribenda ſunt enim ſigna + vel −, contrarium ſanè illi, quod per multiplicationem producitur. At verò ad $-680e^2$, addito $-40e^2$, fit $-720e^2$, quod rurſus diuido per -36, & prouenit $+20e^2$, reponendum in quotiente. Hoc ipſum autem multiplicando per e^2, prouenit $-20e^4$, addendum termino diuidendo, qui eſt $16e^4$, ſimul autem conficiunt $-36e^4$, quod per -36, diuido, fitque quotiens $+1e^4$, quo ducto in e^2, fit $+e^6$, & ipſi $+e^6$, addendus $-1e^6$; quo facto, prouenit 0. Itaque diuiſionem ad finem deduximus, & quidem propoſitæ æquationis radix eſt 36; ſi tamen cubo-cubum interpreteris, cubum, ſiue poteſtatem trium dimenſionum, at verò ſi is reputetur ſex dimenſionum, itaut e^2, æquetur 36, radix certè erit 6, & e æquabitur 6.

Deinde propoſita ſit æquatio $e^6 - 16e^4 - 1236e^2 + 72576 = 0$.

$$\begin{array}{c}
+ e^6 - 16e^4 - 2736e^2 + 72576 = 0 \\
- e^6 - 20e^4 + 2016e^2 - 36 \\
\hline
0 - 36e^4 - 720e^2 \\
36 \qquad 36 \\
\hline
e^4 + 20e^2 - 2016 = 0.
\end{array}$$

Pragmatia diuiſionis.

Initio facto ab vltimo termino, primò diuido $+72576$, per -36, & fit quotiens -2016, deinde multiplico -2016, per $+e^2$, & fit $-2016e^2$, quamobrem in ſumma diuidenda repono $+2016e^2$, adhibendo contrarium ſignum, vt dictum eſt ſuprà.

Nota quomodo in hac pragmatia ſit adhibenda ſigna +, & −.

At verò addendo $+2016e^2$, ad $-2736e^2$, fit $-720e^2$, quod rurſus diuidere oportet per -36, & fit $+20e^2$, hoc ipſo autem multiplicato per e^2, prouenit $+20e^4$, addendum termino diuidendo, puta $-16e^4$, & fit $-36e^4$, quod per -36 diuido, & fit $+1e^4$, quotiens, quo ducto in e^2, fit $+e^6$, quo addito ad $+e^6$, prouenit 0, nam ipſi $+e^6$, additur $-e^6$. Adhibitis contrarijs ſignis, vt adnotatum fuit.

Quotiens exhibitus.

Ex hac igitur diuiſione prouenit $e^4 + 20e^2 - 2016 = 0$.

Huius autem æquationis radix, velut ęquationis duarum dimenſionum, eſt 36, elicita

eliçita præceptis vulgaribus hunc in modum, primò transformata æquatione, vt fiat $e^4 + 20\ e^2 = 2016$. Deinde accepto 10, dimidio coefficientis 20; eius quadratum 100, addatur 2016, comparationis homogeneo, & fit 2116, cuius radix quadrata eſt 46, quæ multata 10, coefficientis dimidio dat 36, pro radice vnde huius æquationis radix eſt 36, & 36, eſt etiam radix initio æquationis propoſitæ $e^6 - 16\ e^4 - 1236\ e^2 + 72576 = 0$, ſi tamen hæc reputetur trium dimenſionum adeo vt ✱ e^2, æquetur 36, alioquin ſi ſex dimenſionum repetetur, radix erit 6, atq; adeo æquabitur 6.

Elicitur radix ſuperioris æquationis trãſformata in æquationem duarum dimenſionum.

Vides itaque, quod enunciauimus, nempe, aut quantitatem cognitam ipſius binomij radicem eſſe quæſitam, autem æquationem per ipſum diuiſam ad duas dimenſiones eſſe reuocatam, itaut eius radix per ea, quæ tradiderunt. Veteres inueniri commodiſſimè poſſit &c.

Supradictorũ confirmatio.

In antecedenti autem caſu contingit radicem æquationis duarum dimenſionum eandem eſſe cum quantitate cognita, faciente binomium diuidens; propterea alia propoſita ſit æquatio $e^6 + 16\ e^4 - 832\ e^2 + 5120 = 0$.

Contingit hic radicẽ æquationis duarũ dimẽſionum, eandem eſſe cum quantitate cognita faciente binomium,

$$
\begin{array}{l}
+\ e^6 + 16\ e^4 - 832\ e^2 + 5120 = 0 \\
-\ e^6 - 24\ e^4 + 640\ e^2 - \quad 8 \\
\hline
0 - \ 8\ e^4 - 192\ e^2 \\
\quad\ \ 8 \qquad\quad 8 \\
\hline
+\ e^4 + 24\ e^2 - 640 = 0.
\end{array}
$$

Incipio igitur ab vltimo termino 5120, illumque diuido per -8, vt fiat quotiens -640, atque ita procedendo, vt ſuperiùs fecimus peruenitur ad æquationem $e^4 + 24\ e^2 - 640 = 0$. Hæc autem ad aliam formam reducatur, vt fiat per antitheſin $e^4 + 24\ e^2 = 640$. Adhibenda ſunt ſigna contraria, vt ſupra &c.

Diuiſio inſtituitur Elicitur affecta poteſtatis radix.

Cuius æquationis radix eruetur ſumendo 12, dimidium coefficientis 24, eius verò quadratum 144, addendo ipſi 640, comparationis homogeneo, aggregato enim radix 28, multata dimidio prædicto, exhibet 16, pro radice æquationis iam dictæ duarum dimenſionum, ſimulque alteriùs, quæ trium eſt dimenſionum.

Eruitur æquationis per diuiſionem habita radix.

Hoc itaque modo elicitur radix æquationis initio propoſitæ. Hæc pragmatia plurimum inſeruit ad æquationes explicandas, eſtque demonſtratu facilis.

Inſeruit autem vt dicebamus, quia cum fuerit æquatio, in qua incognita quantitas quatuor habeat dimenſiones, & ſublatis primùm ſurdis fractiſque numeris, ſi qui ſunt, deprehenſumque fuerit binomium, non inueniri compoſitum ex incognita quantitate, abſque fractione terminum vltimum diuidens, quod quidem binomium totam diuidat ſummam, tunç ad aliam æquationem reducitur, quæ tres dimenſiones tantummodo contineat, cuius radix adhibetur ad çquationem quadraticam çonſtituendam, cuius latus, eſt radix æquationis propoſitæ quatuor dimenſionum.

Si verò foret æquatio quatuor dimenſionum, cuiuſmodi eſt $a^4 + 14\ a^3 - 420\ a^2 + 6784a - 19456 = 0$. Eodem artificio, primò perpendendo quantitates diuidentes 19456, ſine fractione, & ex omnibus ſeligendo 8, itaut diuiſor euadat $a - 8$, diuiſione inſtituta, primò proueniet $a^3 + 22\ a^2 - 444\ a + 1632 = 0$, quç ſi rurſar conſideretur; reperietur diuiſibilis per idem $a - 8$, & proueniet $a^2 + 30\ a - 204 = 0$; ſiue $a^2 + 30\ a = 204$, cuius radix eſt idem 8.

Cùm æquatio fuerit quatuor dimenſionum.

At ſi foret æquatio 1 QQ + 18 C − 388 Q + 1848 R − 2304 = 0, ſeu $a^4 + 18\ a^3 - 388\ a^2 + 1848\ a - 2304 = 0$, ex quantitaribus diuidentibus -2304, ſeligatur 6, vt fiat diuiſor $a - 6$. Inſtituta diuiſione prouenit $a^3 + 24\ a^2 - 244\ a + 384 = 0$, quæ adhuc diuiſibilis eſt per idem $a - 6$, & prouenit $a^2 + 30\ a - 64 = 0$.

Proponitur explicãda æquatio &c.

$= 0$. Seu $a^2 \dagger 30\,a = 64$, cuius æquatioſiis radix eſt 2, atque adeo 2, eſt radix æquationis initio propoſitæ.

Æquatio al a proponitur,

Si deinde propoſita eſſet æquatio $a^4 \maltese 30\,a^3 - 1272\,a^2 \dagger 9920\,a - 21504 = 0$, perpendendo quantitates, quibus diuiditur 21504, ſine fractione, inter cæteras occurrit 4, fiat igitur $a - 4$, diuiſor, & inſtituta diuiſione prouenier $a^3 \maltese 34\,a^2 - 1136\,a \dagger 5376 = 0$. Hæc rurſus inuenietur diuiſibilis, nam 5376, diuiſibilis eſt per plures quantitates, quarum vna eſt idonea 6, vnde fit diuiſor $a - 6$, & inſtituta diuiſione proueniet $a^2 \dagger 40\,a - 896$, ſeu $a^2 \dagger 40\,a = 896$.

Huius æquationis radix eſt 16. Itaque, & initio propoſitæ æquationis $a^4 - 40\,a^3 - 1272\,a^2 \dagger 9920\,a - 21504 = 0$, radices erunt 16, 6, 4.

Varia, & multiplex diuiſio penes diuiſorē, quoad †, & —.

Varijs etiam modis diuiſio perfici poteſt, penens diuiſorem, vt modo intercedat ſignum †, & modo — &c.

Animaduertimus autem ſuperiùs, æquationem ſex dimenſionum, accipi poſſe pro æquatione trium dimenſionum, & eam, quæ eſt quatuor dimenſionum poſſe accipi, pro ea, quæ eſt duarum dimenſionum. Id autem intellige fieri poſſe, cum in tota ſumma non reperientur dignitates, quarum exponentes ſunt 5, 3, 1. Vt ſi fuerit æquatio hiuſmodi $e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64 = 0$. Accipi quidem poteſt prò æquatione trium dimeoſionum, in ipſa enim deſunt gradus, quorum exponentes ſint 5, 3, 1.

Dignitas argumenti exigit, vt vlterius Analyſta proſequatur.

Sed argumenti dignitas expoſcit, vt adhuc in re de qua agimus immoremur. Præſtat igitur paulo diligentius, hæc ipſa perpendere.

Propoſita ſit æquatio 1 QQ* — 24 Q — 64 R — 48 = o. quæ alioquin ſic enunciabitur $a^4 * - 24\,a^2 - 64\,a - 48 = 0$, & ad ſpecioſos terminos redacta ſic $a^4 * - p\,a^2 - q\,a - r = 0$. Itaq; his terminis continetur $a^4 \quad p\,a^2 \quad q\,a \quad r$. Si autem ad æquationem trium dimenſionum reuocata fuerit his terminis contiuebitur.

$$e^6 \qquad 2\,p\,e^4 \qquad \dagger \begin{matrix} p^2 \\ 4\,r \end{matrix} e^2 - q^2 = 0.$$

Quamobrem æquatio propoſita ad hanc redigetur,

$$e^6 - 48\,e^4 \dagger 768\,e^2 - 4096 = 0.$$

Superiorum explicatio.
** Quadratum ex 24.*
** Quadruplum ipſius 48.*

Eſt enim vt 2 p, duplum ipſius p, ita 48, duplum numeri 24, & quia 24, afficitur ſigno —, ita, & 48, gerit ſignum —, deinde, quoniam p^2, habet præfixum ſignum †, ita 576*, eodem ſigno erit affectus, ſiquidem poteſtates a^4, & e^6, eodem afficiuntur ſigno, & quoniam r, nempe 48, afficitur —, propterea 4 r, nempe 192,* ſigno †, notabitur, vt Præceptum requirit.

Itaque ad † 576, addendus eſt † 192, vt fiat 768. Denique quadratum ex q, nempe ex 64, cuiuſmodi eſt 4096, erit terminus vltimus, itaut fiat æquatio $e^6 - 48\,e^4 \dagger 768\,e^2 - 4096 = 0$. Huius autem æquationis radix eſt 4, propterea fiet æquatio quadratica his terminis contenta.

$$a^2 - e\,a \dagger \tfrac{1}{2}\,e^2 \quad \tfrac{1}{2}\,p \quad \tfrac{q}{2e} = 0.$$
$$a^2 \dagger e\,a \dagger \tfrac{1}{2}\,e^2 \quad \tfrac{1}{2}\,p \quad \tfrac{q}{2e} = 0.$$

Animaduerſio circa ſigna †, & —.

Ac proinde proueniet æquatio $a^2 - 4\,a - 12 = 0$.

Nam quantum ad ſigna †, & —, data opera prætermiſſa in ſpecioſa æquatione quando in ipſa æquatione præcedenti haberur † p, tunc in vtraque iſtarum duarum ponendum eſt $\dagger \tfrac{1}{2}\,p$, & ſi in priori habeatur — p, in his poni debet $-\tfrac{1}{2}$

p; at

p; at verò ponendum eſt $\frac{q}{2e}$, in vna vbi habetur — e a, & — $\frac{q}{2e}$, in altera, vbi habetur † e a, prout in prima habetur † q, vt contra ſi ibi habetur — q; ponendum eſt — $\frac{q}{2e}$, in illa vbi habetur — e a; & † $\frac{q}{2e}$, in altera vbi habetur † e a.

At verò illius æquationis $a^2 - 4a - 12 = 0$; Seu $a^2 - 4a = 12$, radix eſt 6, prout Artis præcepta oſtendunt. Dimidium enim numeri radicum 4, eſt 2; cuius quadratum eſt 4, quo addito ad 12, comparationis homogeneum fit 16, cuius radix 4, aucta prædicto dimidio, exhibet 6, pro radice ipſius æquationis, & 6, eſt radix æquationis quadrato-quadraticæ initio propoſitæ.

Elicitur æquationis radix

Nec diſſimiliter ſi fuerit æquatio $a^4 * - 54a^2 - 216a - 243 = 0$. Reuocabitur ad $e^6 - 108e^4 + 3888e^2 - 46656 = 0$, cuius radix 6, quę erit coefficiens in æquatione quadratica ſcribenda loco ipſius quadrato-quadraticæ. Quadratica verò erit $a^2 - 6a - 27 = 0$. Cuius latus eſt 9, nam dimidium numeri radicum eſt 3, cuius quadratum eſt 9, quo addito ad 27, fit 36, cuius radix quadrata eſt 6, quæ aucta prædicto dimidio 3, facit 9, pro radice huius, & propoſitæ æquationis quadrato quadraticæ, in qua ſcilicet ſecundus terminus deeſt.

Proponitur alia æquatio quadrato-quadratica.

Cum natura ſua æquatio quadrato-quadratica ſecundo termino caret, radix æquationis quadraticæ in qua tranſmutata eſt æquatio trium dimenſionum ortum ducens à quadrato-quadratica propoſita ſatisfacit.

Hic nota diligenter.

In ſuprapoſitis duabus æquationibus radix vera ad falſam rationem habet triplam, & hæ natura geneſeos, termino ſecundo carent, duæ autem ſunt radices reales.

Explicatur natura ſuprapoſitarũ æquationum.

Quod æquatio ſi fuerit 1 QQ — 12 C — 32 Q † 48 R † 112 = 0. Tollatur ſecundus terminus, in cuius gratiam diuidatur 12, numerus cuborum per 4, poteſtatis exponentem, & proueniet 3. Itaque ſupponatur a † 3 = 1 R, & iuxta ſuperiora comperiemus $a^4 * - 86a^2 - 360a - 275 = 0$.

$a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$	pro † 1 QQ
$- 12a^3 - 108a^2 - 324a - 324$	pro — 12 C
$- 32a^2 - 192a - 288$	pro — 32 Q
$+ 48a + 144$	pro † 48 R
$+ 112$	pro † n.

$$a^4 * - 86a^2 - 360a - 275 = 0.$$

Huius æquationis radix vt indagetur, tranſmutanda eſt in aliam trium dimenſionum, cuiuſmodi eſt $e^6 - 172e^4 + 8496e^2 - 129600 = 0$. Huius æquationis radix adinuenta, ſtatuenda eſt coefficiens longitudo ſublateralis in æquatione quadratica, vt ſuperiùs aduertimus, hunc enim in modum extracta radix huius quadraticæ æquationis, erit radix æquationis quadrato-quadraticæ, in qua terminus ſecundus deeſt, erit igitur 11, cumque ſupponeretur a † 3, æqualis 1 R, proinde æquationis initio propoſitæ radix erit 14. Cæterùm eiuſdem æquationis radix vera eſt 2.

Trāſmutatur ſuperior æquatio quadrato-quadratica in illam, quæ trium eſt dimenſionum.

Supradictæ autem æquationis, in qua ignota quantitas trium eſt dimenſionum, radix eſt 10, quæ erit vt dicebamus coefficiens ſublateralis in æquatione quadratica, inſtituenda iuxta legem præſcriptam; itaut ſi fuerit æquatio quadrato-quadratica.

$$a^4 * \quad p\,a^2 \quad q\,a \quad r = 0.$$

Loco ipſius ſcribantur.

$$a^2 - e\,a + \frac{1}{2}\,e^2 \;\frac{1}{2}\,p \;\frac{q}{2e} = 0.$$
$$a^2 + e\,a + \frac{1}{2}\,e^2 \;\frac{1}{2}\,p \;\frac{q}{2e} = 0.$$

Et quoniam æquatio quadrato-quadratica erat $a^4 * - p\,a^2 - q\,a - r = 0$; nempe

$$\overset{}{a^4} * - \overset{p}{86}\,a^2 - \overset{q}{360}\,a - \overset{r}{275} = 0.$$

Elicitur ſuperioris æquationis quadrato-quadraticæ radix.

Et æquatio trium dimenſionum erat (dico autem trium dimenſionum, etſi vt ſex haberi poſſit, ob rationem ſuperiùs allatam) $e^6 - 172\,e^4 + 8496\,e^2 - 129600 = 0$, cuius radix eſt 10. Propterea fiet æquatio quadratica $a^2 - 10\,a - 11 = 0$, eſt enim canonicè æquatio effecta $a^2 - e\,a + \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{2}\,p - \frac{q}{2e} = 0$. Quamobrem æquatio erit $a^2 - 10\,a + 50 - 43 - 18 = 0$, hoc eſt $a^2 - 10\,a = 43 + 18 - 50$, hoc eſt $a^2 - 10\,a = 11$, vt priùs. Huius autem æquationis radix eſt eruenda. Dimidium coefficientis ſublateralis eſt 5, cuius quadratum eſt 25, quo addito ad 11, fit 36, cuius latus quadratum eſt 6, quo addito ad 5, dimidium coefficientis prædictum, fit 11, radix ipſius æquationis quadraticæ; at verò idem 11, eſt radix æquationis quadrato-quadraticæ in qua ſecundus terminus deeſt, quę aucta incremento 3, facit 14, pro radice æquationis quadrato-quadraticæ initio propoſitæ. Quare hinc luculenter adiſces, huiuſmodi præceptis has æquationes quadrato quadraticas explicari.

Plerumq; contingit commemoratas æquationes per binomium diuidi non poſſe.

Plerumq; tamen contingit huiuſmodi æquationes, in quibns, ſiue ignota quantitas ſit trium, ſiue quatuor dimenſionum, diuidi non poſſe per quantitatem ignotam plus, vel minus certa aliqua quantitate diuidente numerum æquationis ſine fractione. Vt ſi propoſita ſit æquatio $a^4 * - 18\,a^2 + 47\,a - 410 = 0$, reducetur ad $e^6 - 36\,e^4 + 1964\,e^2 - 2209 = 0$. Quadrato-quadraticæ æquationis radix eſt 5; vt patet. Sed ad ęquationem trium dimenſionum quod attinet eius radix methodo ſuperiùs tradita, pro explicandis cubicis æquationibus, extrahi poteſt &c. eſt autem de genere earum, quæ Geometræ inditio ſunt Problema inde deductum ſolidum eſſe.

Has tamen æquationes, quæ per binomium diuidi non poſſunt proficiũt Geometræ.

Geometra quidem contentus id hinc collegiſſe ſiſtit, vlteriorem progreſſum negligens, vtpote minus opportunum, aduertens nullam inde laudem conſecuturum, cum non minus peccet, qui conſtructionem Problematis per rectas lineas, & circulum tentat, quàm qui ad conſtructionem eorum in quibus non eſt opus niſi circulis, conicas ſectiones adhibeat, inuita quaſi dixerim natura, eſt enim per improptia procedere.

Arithmeticus nihil inde lucratur.

Arithmeticus tamen diſcretam quantitatem conſiderandam aſſumens Problematum huiuſmodi partitione neglecta ſibi maximum onus incumbere cognoſcens magnopere triſtatur, coactus ad varia pręſidia, vel etiam ad generalem Analyſeos rationem confngere, cuius opitulatione tamen, ſi non omnimodam, & accuratam quantitatem exhibeat, approximatione minutiarum, vel limitum præfinitione contentus, qua nimirum conſtat latus inter duos terminos parum inter ſe diſtantes, excuſationem inuenit apud Mathematicum præſtantiſſimum, exiſtimantem Geometræ munus eſſe non Arithmetici præcisè quantitatem præſcribere. Sed pace tanti viri, id, & Arithmetici eſt, quamobrem oportet eſſe paratum aduerſus varia, diuerſaq; æquationum vitia. Et quidem hac de re multa nos hactenus in medium attulimus, plura deinceps allaturi.

Quorundam deffectus.

In hoc haud mediocriter defeciſſe videntur, qui vtiliſſimam alioquin hanc diſciplinam veluti nugatoriam fecerunt, numeros parum accuratè tractando. Vnde ſordidiores Matheſeos aſſeclæ, velut nullius prætij, nulliuſq; commodi, Diuinam hanc Artem deſpiciunt.

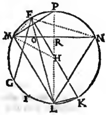
Pro eliciendis diuiſoribus.

Pauca tamen hic ab alijs accepta referemus in gratiam eorum, quibus moleſtum videtur toties periculum facere in pluribus, pluribuſque diuiſoribus, vt demum ille reperiatur, qui cum ignota quantitate binomium conſtituat, diuidens totam ſummam,

mam; præſertim cum vltimus terminus plures diuiſores admittat. Id autem operoſum non eſt adeo, ſi tamen aduerterimus quoſdam è diuiſoribus ſeligi poſſe è quibus ſi componatur binomium, per quod æquationis diuiſio minimè contingat, certum ac exploratum ſit inde Problema dependens ſolidum eſſe, quod in Geometricis magni momenti eſt, ac inſuper nullam reperiri radicem, ſiue veram, ſiue falſam, quæ numeris exprimi poſſit. Sed omnes potiùs irrationales eſſe, ac eorum pretium exprimendum, vt ſupra nos explicuimus; & ad ſuccurrendum memoriæ breuiter hìc repetemus.

Declaratur tradita doctrina, de explicãdis æquationibus cubicis per ſubtendentes arcuũ circuli cum fuerit æquatio negatiua directè.

Si igitur æquatio $a^3 = * p a + q$.
Atque hunc in modum ratiocinantur.



Sit circulus F G N, cuius radius F H, vel H K, ſit ℞ $\frac{1}{3}$ p, ideoque intelligatur inſcripta F G, quæ ſit $\frac{3q}{p}$. Mox verò arcus F M G, F N G, & G L K, in tres æquales partes diuidantur per rectas F M, F N, & F L, ex ijs, quæ ſuperiùs retulimus rectæ F M, F N, quantitatem vtriuſque falſæ radicis deſignabunt, vt F L, radicem veram repræſentabit. Ex his facilè intelliges, cùm eſt parandus diuiſor, non opus eſſe in tot diuiſoribus periculum facere, ſiquidem ſatis, ſuperq; eſt conſiderare illos, qui lineis F M, F N, & F L, proximiores ſunt, cæteris neglectis. Si igitur periculo facto in diuiſoribus, qui maximè ſunt propinqui commemoratis lineis, deptehenſumque ſit non dari quempiam idoneum ad partitionem perficiendam. Cuique perſuaſum volunt ab huiuſmodi æquatione Problema dependens omnino ſolidum eſſe, neque dari aliquam radicem, ſiue veram, ſiue falſam, quæ numero exprimi poſſit. Sed omnes irrationales eſſe, earumque eſtimationem exprimendam eſſe per quantitatem linearum F M, F N, F L. Nec diſſimiliter ſi fuerit æquario altera.

Data enim ſi fuerit æquatio $a^3 = * + p a - q$.

Traditur doctrina eadem de æquatione cubica negatiua inuersè.

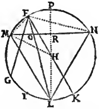
Deſcripto iterum circulo F G N, cuius radius F H, vel H K, ſit ℞ $\frac{1}{3}$p, in quo inſcripta intelligatur recta F G, qua erit $\frac{3q}{p}$, ſi diuidantur arcus F M G, F N G, & G L K, in tres æquales partes, deſignabunt F M, F N, vtramque veram radicem, at verò F L, falſam.

Si igitur non contigerit diuiſio per binomium in quo certa quantitas, ſit vna ex ijs, quæ proximiores ſunt ſupradictis lineis, enunciandum erit Problema ſolidum eſſe, nullamque radicem adinueniri, ſiue veram, ſiue falſam, quæ numero exprimi poſſit; Sed omnes irrationales eſſe, nec earum æſtimationem exprimi aliter poſſe quam per quantitatem linearum F M, F N, & F L.

De his etiam iterum redibit ſermo, vbi rem Geometricè tractare tentabimus.

Superiora exẽplis illuſtrantur ad maiorem explicationem.

Interim non pigebit adijcere, quædam ad maiorem ſupradictorum explicationem. Sit æquatio 1 C — 243 R — 208 = 0. Numerus 243, intelligatur p, & 208, ſupponatur q. Igitur H F, vel H K, ſemidiameter circuli erit ℞ $\frac{1}{3}$ p, nempe ℞ 81, hoc eſt 9. At verò F G, erit $\frac{3q}{p}$, hoc eſt $\frac{624}{243}$, ſeu $\frac{208}{81}$, nempe 2 $\frac{46}{81}$. Vt autem 1, ad 81, trientem ipſius 243, ita 2 $\frac{46}{81}$, ad 208. Huius æquationis radix vera eſt 16, itaque recta F L, erit 16; diameter F K, erit 18, &c.



Notanda quædam.

Hìc tamen aduerte, quod etiam ſuperiùs docuimus. Aut huiuſmodi æquatio cubica eſt, in qua cubus è triente numeri radicum, eſt minor quadrato à dimidio numeri abſoluti, aut eſt illi æqualis, aut eodem eſt maior.

 Quando

Quando cubus è triente numeri radicum minor eſt quadrato à dimidio termini vltimi.

Quando igitur cubus è triente numeri radicum, ſeu penultimi termini minor eſt quadrato à dimidio numeri abſoluti, ſeu vltimi termini. Tunc procedendum eſt, vt ſupra nos explicuimus; Præceptum enim tradidimus ad hoc æquationis genus explicandum; ſiue nimium radix ſit numerus rationalis, ſiue irrationalis, & de hoc exempla attulimus.

Cum cubus è triente &c. æqualis eſt quadrato à dimidio termini vltimi.

At verò ſi æquatio huiuſmodi ſit, vt in illa cubus è triente numeri radicum, ſiue penultimi termini æqualis ſit quadrato à dimidio numeri abſoluti, ſiue vltimi termini. Tunc eodem præcepto rem explicabimus. Hæc autem exemplis clariora fient.

Proponitur æquatio, & extrahitur radix.

Propoſita ſit æquatio $1\,C - 24\,R - 72 \eqcirc 0$.

Dimidium numeri abſoluti eſt 36, cuius quadratum eſt 1296, cubus à triente numeri radicum eſt 512, quo ſubtracto ex 1296, remanet 784, cuius radix quadrata eſt 28. Dimidium autem numeri abſoluti eſt 36, quo addito ad 28, fit aggregatum 64, cuius radix cubica eſt 4. At verò ab eodem dimidio numeri abſoluti, nempe ex 36, auferatur 28, radix quadrata inuenta, & fit reſiduum 8, cuius radix cubica eſt 2, quę ſi addatur 4, radici cubicę iam habitę, fit 6, radix æquationis propoſitæ in qua 512, cubus è 8, triente numeri radicum, minor eſt 1296, quadrato è 36, dimidio numeri abſoluti.

Superior æquatio nequit per ſubtenſas explicari.

At ſi fuerit æquatio iam dicta ea non poterit explicari per ſubtenſas modo ſuperiùs allato, ſiquidem p, eſt 24, & 72, eſt q, verum enim verò non poteſt inſcribi circulo recta F G, namque $\frac{3q}{p}$, idem eſt quod $\frac{216}{24}$, hoc eſt 9, & ℞ $\frac{1}{3}$ p, idem eſt ac ℞ 8, ergo circuli ſemidiameter erit ℞ 8; quare diameter erit ℞ 32. Sed F G, eſſet 9, quod fieri non poteſt.

Idem oſtenditur, cum ſemidiameter eſt numerus rationalis.

Idem cernes in hoc alio exemplo, in quo ſemidiameter eſt, numerus rationalis &c.

Proponitur alia æquatio, in qua ſemidiameter &c. eſt numerus rationalis.

Propoſita ſit æquatio $1\,C - 27\,R - 730 \eqcirc 0$.

Dimidium vltimi termini eſt 365, cuius quadratum eſt 133225, à quo ſi dempſeris 729, cubum ex 9, triente penultimi termini, remanet 132496, cuius latus quadratum eſt 364. At verò dimidium vltimi termini, nempe 365, additum ad 364, facit 729, cuius latus cubicum eſt 9, iam ab eodem dimidio ſubtrahatur 364, radix quadrata ſuperiùs inuenta, & remanet 1, cuius latus cubicum eſt 1, quod additum ad 9, latus cubicum iam inuentum, facit 10, radicem æquationis propoſitæ. Sed p, erit 27, & q, erit 730.

Itaque ſemidiameter ℞ $\frac{1}{3}$ p, erit 3, cuius duplum 6, erit diameter. At verò $\frac{3q}{p}$, erit $\frac{2190}{27}$, hoc eſt $81\frac{3}{27}$, vnde inſcripta F G, deberet eſſe $81\frac{1}{9}$, diametro exiſtente 6, quod fieri non poteſt.

Quando cubus è triente numeri radicum maior eſt quadrato à dimidio numeri abſoluti &c.

At verò ſecus ſi cubus è triente numeri radicum maior fuerit quadrato à dimidio numeri abſoluti; tunc enim iuxta præceptum ſuperiùs traditum æquatio inexplicabilis eſt; Sed rectè explicabitur vt paulo antea dicebamus per ſubtendentes arcuum alicuius circuli. Vt ſi fuerit $1\,C - 243\,R - 208 \eqcirc 0$. Seu $1\,C - 243\,R \eqcirc 208$.

Dimidium numeri abſoluti eſt 104, cuius quadratum eſt 10816, à quo ſubtrahi non poteſt, iuxta regulam 531441, cubus è 81, triente numeri radicum.

Methodo per ſubtenſas arcuum explicantur huiuſmodi æquationes.

Sed methodo modo per ſubtenſas inſinuatio facilè explicabitur; Sic numerus racum, puta 243 intelligatur p, & 208, numerus abſolutus ſit q.

Igitur H F, ſemidiameter circuli erit ℞ $\frac{1}{3}$ p, nempe ℞ 81, hac eſt 9. At verò F G, erit $\frac{3q}{p}$, hoc eſt $\frac{624}{243}$, ſeu $\frac{208}{81}$, nempe $2\frac{46}{81}$. Vt autem 1, ad 81, ita $2\frac{46}{81}$, ad 208. Huius ęquationis radix vera eſt 16, itaq; recta F L, erit 16, diameter F K, erit 18, &c.

Igitur cùm cubus è triente penultimi termini maior eſt quadrato à dimidio termini vltimi, optime æquatio per ſubtenſas explicatur.

Si verò cubus è triente, fuerit minor quadrato à dimidio nequaquam.

Cum cubus è triente &c. minor eſt quadrato à dimidio.

Quamobrem ſi fuerit æquatio $1\,C - 48\,R - 12672 \eqcirc 0$. Intelligatur per p, 48, cuius triens eſt 16, huius radix eſt 4, atque adeo circuli ſemidiameter erit 4, diameter propterea 8. Sed F G, foret 792, namq; $\frac{3q}{p}$, nempe $\frac{38016}{48}$, eſt 792. Fieri autem non poteſt, vt recta, quæ ſupponitur 792, inſcribatur circulo, cuius

diameter

diameter eſt 8. Diameter enim eſt omnium quæ in circulo poſſunt inſcribi maxima. Huius æquationis radix eſt 24, quare &c.

Quando cubus è triente penultimi termini fuerit æqualis quadrato à dimidio vltimi.

Cum autem cubus è triente penultimi termini fuerit æqualis quadrato à dimidio vltimi.

Proponitur æquatio, & explicatur.

Tunc iuxta pręceptum ſuperius, poterit explicari. Et ſi fuerit 1 C — 108 R — 432 ⫬ 0.

Dimidium vltimi termini, ſeu numeri abſoluti eſt 216, cuius quadratum eſt 46656, at verò triens penultimi termini, ſeu numeri radicum eſt 36, cuius cubus eſt 46656, qui ſubductus ex 46656, relinquit 0, cuius radix quadrata eſt 0, cui addito 216, dimidio iam dicto, fit 216, cuius radix cubica eſt 6. At verò ab eodem 216, dimidio iam dicto ſubtrahatur 0, radix quadrata primi reſidui, & remanet 216, cuius radix cubica eſt 6, quæ addita ad 6, radicem cubicam ſuperiùs habitam, facit 12, radicem æquationis propoſitæ.

Per ſubtenſas arcuum huiuſmodi æquationes poſſunt etiã explicari

Et hæc etiam per ſubtenſas commemoratas poterit explicari, nam p, intelligatur 108, & q; ſupponatur 432. Itaque ℞ $\frac{1}{3}$ p, erit ℞ 36, hoc eſt 6, & $\frac{3q}{p}$, erit 12. Quamobrem ſemidiameter F H, ſeu H K. quæ eſt ℞ $\frac{1}{3}$ p, erit 6, vnde diameter erit 12. Sed F G, erit 12, coincidit ob id F G, cum diametro. Quamobrem in huiuſmodi æquationibus inſcripta, nempe F G, cum diametro, cum quo etiam radix eiuſdem ęquationis, coincidit; quare radix in huiuſmodi æquationibus, eſt duplum latus quadratum trientis numeri quadratorum.

Idque luculenter etiam cernes in hac alia æquatione 1 C — 192 R — 1024 ⫬ 0, in qua cubus è triente penultimi termini eſt æqualis quadrato à dimidio vltimi termini, & quidem p, eſt 192; vnde ℞ $\frac{1}{3}$ p, erit ℞ 64, hoc eſt 8, igitur ſemidiameter erit 8, quare diameter erit 16. Sed q, eſt 1024, vnde $\frac{3q}{p}$, erit $\frac{3072}{192}$, nempe 16, quamobrem inſcripta F G, coincidit cum diametro, propterea, & duplum lateris quadrati trientis erit diameter, erit inſcripta, & etiam F L, radix vera, tres namq; hæ quantitates coincident, eſt enim huius æquationis radix 16.

Notanda quadam, vnde maximè innoteſcit harum explicandarũ æquationum ratio.

Hinc, quod eſt notatu digniſſimum, facilè efformabis æquationem, in qua cubus è triente penultimi termini æqualis erit quadrato à dimidio termini vltimi.

Præceptum pro efformandis æquationibus, in quibus &c.

Sit 1 C — 12 R, & oporteat inquitere radicem, itaut fiat æquatio in qua cubus è triente penultimi termini, æqualis ſit quadrato à dimidio termini vltimi. Sume trientem numeri 12, & eſt 4, cuius radix quadrata eſt 2, huius duplum eſt 4. Dico 4, eſſe latus æquationis, itaut ſi fiat ſecundum hanc rei æſtimationem, vt 1 C — 12 R ⫬ 16, huiuſmodi quidem ſit, vt dictum eſt. Huius enim radix eſt 4.

Primum exemplum, & eſt &c.

Inſuper ſit 1 C — 27 R, & oporteat inquirere radicem, itaut fiat æquatio, in qua cubus è triente penultimi termini, ęqualis ſit quadrato à dimidio termini vltimi. Triens numeri 27, eſt 9, cuius latus quadratum eſt 3, huius duplum eſt 6. Dico 6, eſſe radicem quæſitam; ſecundum quam æſtimationem, ſi formetur æquatio 1 C — 27 R — 54 ⫬ 0, erit vt quæritur, cubus enim è 9, triente numeri 27, eſt 729; at verò quadratum è 27 dimidio ipſius 54, eſt itidem 729.

Secundum exempium.

Tertium exemplum.

Sit 1 C — 48 R, & oporteat &c. Triens numeri radicum eſt 16, cuius radix quadrata eſt 4, cuius duplum eſt 8. Dico 8, eſſe radicem quæſitam, ſecundum quam æſtimationem ſi formetur æquatio 1 C — 48 R — 128 ⫬ 0. erit vt quæritur.

Vnde fit Theorema.

Theorema.

Si fuerit numerus quiſpiam; cuius cubus multatus producto ab eodem numero in quendam aſſumptum; itaut ille numerus æqualis ſit duplo lateri quadrato trientis aſſumpti numeri. Dico cubum ipſius trientis æqualem eſſe quadrato à dimidio differentia inter cubum, & prædictum productum.

Expoſitio ipſius Theorematis.

Sit numerus A, cuius cubus ſit B, qui multatus C, producto ex A, in D, relinquat E, cuius dimidium F, ſit autem G, triens ipſius D, & H, ſit eius latus quadratum, cuius duplum K, ſit æqualis A. At verò L, ſit quadratum ipſius F, & M, ſit cubus ex G.

Dico L, æqualem eſſe M.

Huius

Digitized by Google

B	C	F	G	H	L
1000	750	125	25	5	15625

A	D	E	K	M
10	75	250	10	15625

Theorema ſtudioſo lectori demonſtrãdũ relinquitur.

Huius verò Theorematis veritas facilè oſtendi poteſt imitatione eorum, quę nos in ſuperioribus Theoremata demonſtrauimus.

Epilogiſmus præcepti de explicanda radice quadrato-quadratica.

Cæterùm ex ſupra allatis facilè intelliges veritatem præcepti, de explicanda æquatione quadrato-quadratica per ablationem ſecundi termini, atq; tranſmutationem ipſius in æquationem, vbi ignota quantitas trium eſt dimenſionem atque demum per æquationem quadraticam inſtitutam beneficio inuentæ radicis. Vidimus enim cùm ſuo ortu termino ſecundo eſt deſtituta æquatio quadrato-quadratica ſic iuxta præceptum in æquationem trium dimenſionum tranſmutari, vt cum hæc per metamorphoſin quadratica euaſerit, demum huius radix æquationi quadrato-quadraticę iam dictæ ſetisfaciat; nihil autem refert, quod æquatio illa quadrato-quadratica ſecundo termino careat, natura geneſeos, an verò incremento, vel decremento radicis ablatus ſit ille ſecundus terminus, perinde enim eſt. Si itaq; præceptum traditum in æquationibus primi generis locum habet, & in ijs, quæ ſecundi ſunt generis vſurpari commodiſſimè poterit.

Quãdo æquatio trium dimenſionũ non patitur diuiſionem per binomium, ex incognita, & cognita quantitate.

Quod ſi contingat, æquationem trium dimenſionum, non pati diuiſionem per binomium ex incognita, cognitaque quantitate; profectò, id Geometræ iucundum erit, lucranti notitiam de conditione Problematis; Arithmetico autem nequaquam, cum ei potiùs labor atque ſollicitudo immineat, vtpotè deuio, ad veritatis conſecutionem; Quamobrem recedens ab initio tramite, confugit aliò, vt nempe propoſitam æquationem ευμχανῶς, explicet, atque reſoluat. Multa ſanè videntur ab Artificis induſtria ſuppeditata Specioſæ Logiſtices opitulatione, quamobrem hac de re nos ibi quædam afferemus ad inſtitutum opportuna.

Adiſce hic quid ſit radix vera quid falſa &c.

Cæterùm cum ſuperiùs non ſemel mentionem fecerimus de radice tam vera, quàm falſa, itemque immaginaria.. Non pigebit hìc paululum hærere, vt hæc explicata reddantur.

Illud igitur eſt operæ pretium aduertere, nimirum, tàm veras, quàm falſas radices, non ſemper eſſe reales, ſed aliquando immaginarias eſſe poſſe; quod vt intelligas, aduerte in æquatione quacunque poſſe à nobis intelligi plures radices, tot nimirum, quot ſunt dimenſiones incognitæ quantitatis, tot itaque nos radices imaginari poſſumus interdum tamen nulla eſt quantitas, quæ illis, quas imaginamur reſpondeat, vnde in aliqua æquatione tres exempligratia ſi fuerit trium dimenſionum, nos radices imaginari poſſumus, vna tantum exiſtente reali.

Declaratur quid ſit radix vera, quid falſa exeplis ad id idoneis.

In euius gratiam aduerte, incognitam quatitatem, in qualibet æquatione, tot diuerſas radices, ſiue pretia habere poſſe, quot ipſa incognita quantitas dimenſiones habet. Hæc autem vt meliùs intelligantur. Supponamus $a - 2$, æquari o, & rurſus $a - 3$, æquari o, multiplicetur autem $a - 2$, per $a - 3$, fiet $a^2 - 5a + 6 = 0$, vel $a^2 = 5a - 6$. In qua quidem æquatione quantitas a, valet 2, & 3. Deinde multiplicetur $a^2 - 5a + 6 = 0$, per $a - 4 = 0$, producetur $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$. In hac æquatione a, habet tres dimenſiones, atque ſimul etiam tres habet radices, ſiue pretia. Plerumque autem contingit vt e, prædictis radicibus, quædam ſint falſæ; ſiue minores nihilo, hoc eſt minores, quàm o. Si enim a, ſupponeretur importare quemdam defectum quantitatis, exempli gratia defectum numeri 2, itaut ſit $e + 2 = 0$, iam 2, erit radix falſa illius æquationis, ad cuius geneſin binomium illud facit. Non diſſimiliter ſi ſit $a + 5$, multiplicetur autem $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, per $a + 5 = 0$, fiet æquatio $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$. In hac autem æquatione poteſtas puta a^4, quatuor dimenſiones habet, eiuſdem propterea ſunt quatuor radices, quarum tres, nempe 2, 3, 4,

ſunt

Digitized by Google

ſunt veræ, vna autem falſa, nempe 5. Ita fit, vt æquationis ſumma, quæ plures continet radices, ſemper diuidi poſſit per binomium, compoſitum ex incognita quantitate, minus pretio alicuius ex veris radicibus falſis. Huiuſmodi verò diuiſione, ipſius æquationis dimenſiones diminuntur, vnde ex quadrato-quadratica, fit cubica, ex cubica, fit quadratica &c. Quod ſi ſecus eueniat inditio eſt, quantitatem hanc non eſſe valorem alicuius ex eius radicibus ſiquidem illa æquatio alias non admittit radices, præter illas &c. Præterea illud itidem aduertendum; tot in æquatione aliqua veras eſſe poſſe radices, quot variationes ſignorum †, & —, contingunt. Tot autem falſæ quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna †, vel duo ſigna —, quæ ſe inuicem ſequantur. *Hic aduerte nonnulla.*

Imo in vna eademq; æquatione fieri poterit, vt radices omnes, quæ falſę erant, euadant veræ, & quæ veræ erant euadent falſæ. *Quomodo radices omnes falſæ, euadāt veræ.*

Idque fit mutando ſigna omnia †, & —, quæ in ſecundo, quarto, ſexto, vel alijs locis, qui per numeros pares deſignantur reperiuntur, reliquis non mutatis, qui in primo, tertio, quinto, ſimilibuſque locis, quæ per impares numeros deſignantur.

Si propoſita foret æquatio $1\,QQ + 12\,C + 33\,Q - 38\,R - 168 = 0$, ablato ſecundo termino fit $a^4 * - 21\,a^2 - 20\,a * = 0$. *Proponitur æquatio quadrato-quadratica, quæ per ablationem ſecundi termini, deſtituitur vltimo.*

Itaut deſit etiam terminus vltimus. Vnde per hypobibaſmum fit æquatio $a^3 - 21\,a - 20 = 0$. Seu $a^3 - 21\,a = 20$. Cuius radix iuxta præcepta tradita elicitur 5. Superioris itaq; æquationis radix eſt 2. Nam diuiſo 12, numero cuborum per 4, exponentem poteſtatis QQ, Sit quotiens 3, ſi igitur fiat $a - 3$, æqualis 1 R, & a reperiatur 5, vtique 1 R, valebit 2. *Quando id contingat.*

Deeſt autem vltimus terminus, quando æquatio ipſa ducit ortum à radice falſa, cui ſit æquale incrementum, quo radix ipſa aucta intelligitur. Illa enim ſuperior æquatio propoſita habet radicem veram 2; eiuſdem verò ſunt radices falſæ 3, 4, & 7, at verò 3, eſt incrementum iam dictum; Quod etiam cernes in hac alia ęquatione $1\,QQ + 8\,C - 7\,Q - 122\,R - 168 = 0$. Huius enim radix vera eſt 4, at falſæ ſunt 2, 3, & 7. Quoniam autem 8, numerus cuborum diuiſus per 4, exponentem poteſtatis dat 2, pro quantitate ſit vt ſi tollatur ſecundus terminus proueniat æquatio hæc $a^4 * - 31\,a^2 - 30 * = 0$. *Aliud exemplum ad idē.*

$$\begin{array}{rrrrrl}
a^4 & -\,8\,a^3 & +\,24\,a^2 & -\,32\,a & +\,16 & \text{pro} + 1\,QQ \\
 & +\,8\,a^3 & -\,48\,a^2 & +\,96\,a & -\,64 & \text{pro} + 8\,C \\
 & & -\,7\,a^2 & +\,28\,a & -\,28 & \text{pro} - 7\,Q \\
 & & & -\,122\,a & +\,244 & \text{pro} - 122\,R \\
 & & & & -\,168 & \text{pro} + n. \\
\hline
\end{array}$$

$$a^4 * - 31\,a^2 - 30\,a * = 0.$$

Seu $a^4 * - 31\,a^2 = 30\,a$, quæ per hypobibaſmum fit $a^3 - 31\,a = 30$. Cuius radix elicitur 6, quare, quæ ponebatur 1 R, erit 4, nam intelligebatur nomine a, aucta incremento 2, vnde $6 - 2$, hoc eſt 4, erit radix illius. Hæc etiam in hac æquatione deprehendemus. Sit ergo æquatio $1\,QQ + 16\,C + 53\,Q - 46\,R - 264 = 0$. *Tertium exemplum.*

Ablato ſecundo termino, continget quod adnotauimus.

$$\begin{array}{rrrrrl}
a^4 & -\,16\,a^3 & +\,96\,a^2 & -\,256\,a & +\,256 & \text{pro} + 1\,QQ \\
 & +\,16\,a^3 & -\,192\,a^2 & +\,768\,a & -\,1024 & \text{pro} + 16\,C \\
 & & +\,53\,a^2 & -\,424\,a & +\,848 & \text{pro} + 53\,Q \\
 & & & -\,46\,a & +\,184 & \text{pro} - 46\,R \\
 & & & & -\,264 & \text{pro} - n. \\
\hline
\end{array}$$

$$a^4 * - 43\,a^2 + 42\,a * = 0.$$

Propoſitę autem æquationis, radix vera eſt 2, reliquæ 3, 4, 11, ſunt radices falſæ; at vero 4, eſt incrementum quo radix vera adaucta intelligitur. Cæterum æquatio hęc ſecundo, & vltimo termino deſtituta per hypobibaſmum reducetur ad hanc $a^3 - 43\,a + 42 = 0$; quæ per antitheſin fiet $43\,a - a^3 = 42$. Cuius radix elicitur ex præceptis ſuo loco traditis, elicitur inquam 6. *Vera exhibetur radix.*

De

De Analytica interpunctione.

CAPVT XXVIII.

Magni refert Analyſtam noniſſe rationem interpũctionis Analyticæ.

MAGNI quidem intereſſe Artificis diligenter aduertere modum, quo ſuſcepta alicuius, ſiuè puræ, ſiuè affectæ Poteſtatis numeroſæ Analyſi, numerorum notæ punctis debita lege notandæ ſint, quam ſæpiſſimè, nec immeritò nos inculcauimus. Verùm enim verò hucuſque contenti inſtituiſſe praxim ad Analyticum munus obeundum, accuratiùs rem ipſam tractare neglexιmus, exiſtimantes opportuniùs hoc in loco fieri poſſe; At certè prætermittenda non erat exactior huius rei contemplatio; cùm hinc maximè perdeat numeroſæ Analyſeos perficendæ ratio.

Proponitur inquirenda interpũctio quadrati puri.

Primò autem ſupponamus inquirendam eſſe interpunctionis rationem, in analyſi quadrati puri; Plurinomia quædam radix aſſummatur, & vt meliùs id explicetur, huiuſmodi radix conſtet tribus ſingularibus lateribus, eaq; ſit 276, quæ multiplicetur, quadraticè, vt eius poteſtas gignatur 76166. Hoc autem quadratum in ſua, quibus conſtat membra reſoluatur. Ea verò ſunt tria ſingularia quadrata, quot videlicet ſunt ſingularia latera, ex quibus latus vniuerſum conſurgit. Hæc autem ſunt 40000, 4900, 36.

Exemplũ aſſertur.

Præterea nondum expleta eſt omnis reſolutio poteſtatis; ſupereſt enim planum à latere ſecundo in duplum latus primum, & cùm duo elicita latera ſumantur, vt vnum; etiam, & aliud planum à latere tertio, tanquam ſecundo in duplum aggregatum ex illis prioribus, tanquam latus primum; duo autem hæc plana ſunt 28000, & 3240. Hæc cùm aduerteris, facilè reſolutione peracta, puncta quidem addiſces, quibus notantur, & ſingularium poteſtatum, & planorum ſub lateribus, ſedes. Atque adeo inſtituendam eſſe punctorum notationem, quemadmodum ab Arte præſcribitur; ſi tamen conſentanea παρασκευη, præmittatur.

	Radix 2 7 6
7 6 1 7 6	z²
. R . R .	
Q I Q II Q III	
4 0 0 0 0	a²
Q I	.
4 9 0 0	e²
Q II	..
3 6	e²
Q III	...
2 8 0 0 0	2ae
R	. ..
3 2 4 0	2ae
R	.. ...

Explicantur ſuperius dicta.

Ex adiuncto autem paradigmate, cuique licebit aduertere interpunctionem quadraticam fieri debere per binas alternas figuras, quoniam, vt cernis, ſingularia quadrata cadunt in illis locis.

Et intermediæ quidem ſedes debentur planis ſub lateribus, quoniam hęc ibi contingunt, ita fit vt reſolutio inſtituatur, vt ſuperiùs explicuimus, & ad eum, qui ſequitur modum.

Notantur ſedes in quibus ſingularia cadunt quadrata, & plana ſub lateribus.

Hìc autem vides, vbi ſingularia cadant quadrata, vbi, & plana ſub lateribus; denique vbi diuiſores, qui ſucceſſiuè mouentur, non ſecus ac in quacunque fit diuiſione, quæ ea lege perficitur, vt ſucceſſiuè, pro ſingulis diuiſionibus, per ſingulas proueantur figuras.

Ad

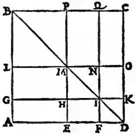
Ad Analyſin Quadrati puri, interpunctionis ratio explicata.

Quadratum reſoluendum.	7 6 1 7 6	z^2.	Radix 276.
	. R . R . Q1 Q11 Q111		Sedes ſingularium quadratorum, planorumque ſub lateribus. a 200
Planum ablatitium.	4 0 0 0 0	a^2.	Quadratum lateris primi
Primum quod occurrit ad læuam, e punctis quadraticis.	Q1		
Reliquum reſoluendi quadrati.	3 6 1 7 6	$z^2 - a^2$.	$a + e$
Reliquum reſoluendi quadrati.	3 6 1 7 6 . R . Q11 Q111	$z^2 - a^2$.	200 + 70
Diuiſor.	4 0 0	$2a$.	Duplum lateris primi.
Plana ablatitia.	2 8 0 0 0	$2ae$.	A latere ſecundo in duplum primum.
Prima e ſedibus planorum ſub lateribus	. R		
	4 9 0 0	e^2.	Quadratum lateris ſecundi.
Secunda e ſedibus quadratorum.	Q11		
Summa planorum ablatitiorum.	3 2 9 0 0	$2ae + e^2$	
Reliquum reſoluendi quadrati.	3 2 7 6	$z^2 - a^2 - 2ae - e^2$.	$a + e$
Reliquum reſoluendi quadrati.	3 2 7 6 R. . Q111	$z^2 - a^2 - 2ae - e^2$.	270 + 6 Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.
Diuiſor.	5 4 0	$2a$.	Duplum lateris primi.
Plana ablatitia.	3 2 4 0	$2ae$.	A latere ſecundo in duplum primum.
Secunda è ſedibus planorum ſub lateribus.	R		
	3 6	e^2.	Quadratum lateris tertij, vt ſecundi.
Tertium e punctis quadraticis.	Q111		
Summa planorum ablatitiorũ æqualis reliquo reſoluendi quadrati.	3 2 7 6	$2ae + e^2 = z^2 - a^2 - 2ae - e^2$.	

Geometricè oſtenditur intentum.

Et vt rectiùs percipiatur, quod aſſumpſimus declarandum. Eſto latus vniuerſum A D; in quo ſingularia latera ſint A E, E F, F D. At verò ſuper A D, intelligatur deſcriptum quadratum A B C D, cuius diameter eſt B D, ex punctis autem E, & F, ductæ ſint E P, F Q, parallelæ alterutri ipſarum A B, C D, per M, I, puncta interſectionum cum diametro, ductæ ſint G K, L O, parallelæ alterutri ipſarum B C; A D, vides igitur quadratum A D, reſolutum eſſe in hæc plana, nempe L P, H N, F K, quadrata ſingularium laterum, & in plana G M, M Q, hoc eſt in planum à duplo ſingulari latere primo A E, in ſecundum E F, & in plana A H, N C, E I, I O; ſeu in plana A I, I C, hoc eſt in planum ſub duplis lateribus A E, E F, tanquam vno, & F D, latere tertio tanquam ſecundo; Ex his facilè conſtat, puri quadrati analyſis, etenim quadratum non ſecus ac omnis alia poteſtas imo compoſitum quodcunque in ea reſoluitur ex quibus conſtat; Cum igitur L P, quadratum ſingularis lateris A E, ſubductum fuerit ex quadrato A C; quod remanet pertinens ad indagationem ſecundi lateris, eſt gnomon L M P I, quod applicatum eſt, ad duplum latus L M, ſeu A E, excedens quadrato ſegmenti H I, ſeu E F, ſingularis lateris ſecundi. His omnibus autem ſubductis ex reſiduo iam dicto, nempe differentia inter quadrata L P, & A C, quod ſupereſt gnomon G I Q D; pertinens eſt ad indagationem ſingularis lateris tertij F D; eſt autem applicatum, ad duplum G I; ſeu A F, tanquam vnius aggregati, ex lateribus ſingularibus A E, E F; excedens F K, quadrato ſingularis lateris tertij F D, tanquam ſecundi.

Puri quadrati Analyſis.



Analyſis quadrati affecti adiunctione plani ſub latere dataque coefficiente longitudine.

Non diſſimiliter innoteſcet Analyſis quadrati affecti adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine; cum eius radix pluribus, quàm duobus ſingularibus lateribus conſtauerit.

Puri cubi interpunctionis ratio explicatur.

Sequitur puri Cubi interpunctionis ratio explicanda, ea autem comperietur aſſumpto aliquo numero, repræſentante cubicam radicem alterius, & ita quidem vt pluribus, quàm duabus figuris conſter; exempli gratia tribus; Ita enim repræſentabit latus, conſtans ex tribus ſingularibus lateribus. Hoc igitur in ſe ductum cubicè gignet poteſtatem, cuius reſolutione in ſingularia ſolida, quibus conſtat, reperiemus, quæ debentur ſedes, & ſingularibus poteſtatibus componentibus, & ſolidis ſub gradibus, quæ itidem ad vniuerſæ poteſtatis conſtitùtionem faciunt.

Analyſeos explicatio.

A latere autem reſoluti cubi 644972544. Cuius radix eſt 864, fient manifeſta, quę ad eius interpunctionem pertinent; interpunctio quidem

	Radix 864
6 4 4 9 7 2 5 4 4 . Q R . Q R . C I C II C III	z ſol. z'
5 1 2 0 0 0 0 0 0 . C I	a'. .
2 1 6 0 0 0 . C II	e'. ..
6 4 . C III	e'. ..
1 1 5 2 0 0 0 0 0 Q	3 a' e. . ..
7 6 4 0 0 0 0 R	3 a e'. . ..
8 8 7 5 2 0 0 Q	3 a' e. .. ...
4 1 2 8 0 R	3 a e'. .. ...

à ſit

ſit à dextra ad læuam pergendo vna figura notata, duabus prætermiſſis. Iterum alia notata. Hæc autem puncta dicuntur cubica, ſedeſue cuborum ſingularium componentium; quoniam in huiuſmodi punctis cadunt ſingulares cubi, & quidem maximus è componentibus, in eo, quod primùm occurrit ad læuam è punctis cubicis, & ita deinceps cæteri ſingulares cubi, in ſubſequentibus punctis cadunt à læua ad dextram, quę pariter de ſolidis ſub gradibus intelligenda ſunt. Itaut etiam, & hæc ſuas ſibi vindigent ſedes in locis intermedijs, multiplicatione effecta in ſingularia latera.

Ratio figurarum notandarum.

In horum autem declaratione non erit amplius immorandum; cùm cuique poſſint eſſe manifeſta ex numerorum diſpoſitione, quæ in paradigmate conſpicitur. Ex his porrò facilè etiam conſtabit interpunctionis ratio in Analyſi cuiuſcunque puræ poteſtatis.

Numerorum diſpoſitio declarat quod intenditur.

Sufficiat propterea explicaſſe rationem interpunctionis puri Quadrati, purique Cubi.

In reliquis autem Poteſtatibus puris Analyſta edoctus ijs, quæ de his duabus attulimus, facilè, ac tutò ipſarum interpunctionem aggredietur. Illud porro inficiandum non eſt, videlicet operæ pretium eſſe, ipſius interpunctionis analyticæ rationem nouiſſe, quandoquidem hac ignorata, nunquam licebit Analyſin inſtituere, vnde miror, quamplurimos alioquin in his non parùm verſatos pragmatiam hanc, in fide parentum, vt ita dixerim, exercere, neſcientes vnde ſit vt hoc vel illo modo figuræ punctis notandæ ſint; quamobrem, nobis videbatur minimè prætermittendum hoc argumentum, vtpotè illud, quod ad Analyſeos rationem tantum habet momenti, vt eius ignoratione minimè ipſa Ars Analytica perfectè comparetur. Quæ verò de poteſtatibus puris notauimus, ſufficiant. De affectis ſupererit diſſerendum, quæ quidem multo etiam magis ad ſui reſolutionem interpunctionis rationem expoſcunt. Præter ea ſiquidem, quæ poteſtatibus puris conueniunt, quæq; & puris, & affectis communia ſunt, quædam ſuperſunt animaduerſione digna, quæ poteſtatibus affectis peculiaria ſunt, ita nimirum, vt nemo quidem earum Analyſin inſtituere canonicè poſſit, niſi pręter dicta de puris, reliqua affectionem concernentia, cognouerit.

Sufficit explicaſſe interpunctionem puri quadrati, purique cubi. Analyſta edoctus ijs quæ ſuperiùs allata fuerunt, cognoſcet, & aſſequetur, quæ deinceps tractanda ſerint.

Et quidem ſi decet Artificem hunc introſpicere naturam ipſarum poteſtatum, & primò quidem purarum, oportet, vt illas in ea quibus membra conſtant, reſoluat, quod nunquam præſtabit niſi tractando poteſtates ipſas, diligenter ſcilicet punctis figuras notando, vt ſedes membrorum, quibus poteſtas conſtat, ſigentur, ſic enim reſolutionem ipſam ritè tractabit, alioquin caligine quedam offuſus, in errores labetur.

Reſolutio poteſtatis in ſua quibus conſtat membris.

Ad

Ad Analyſin Cubi puri, interpunctionis ratio explicata.

Cubus purus reſoluendus.	6 4 4 9 7 2 5 4 4	z^3.	Radix 864.
	. QR . QR .		Sedes ſingularium cuborum, & ſolidorum ſub gradibus.
	C I C II C III		
	5 1 2 0 0 0 0 0 0	a^3.	Cubus lateris primi.
Primum quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, & prima e ſedibus cuborum	C I		a 800
Reliquum reſoluendi cubi.	1 3 2 9 7 2 5 4 4	$z^3 - a^3$.	
Reliquum reſoluendi cubi.	1 3 2 9 7 2 5 4 4 . QR . C II C III	$z^3 - a^3$.	
Diuiſores, eorumque ſedes ad indagandum ſingulare latus ſec.	1 9 2 0 0 0 0	$3a^2$.	Triplum quadratum lateris primi
	2 4 0 0	$3a$.	Triplum latus primum.
Summa diuiſorum.	1 9 4 4 0 0 0	$3a^2$ † $3a$o	
	1 1 5 2 0 0 0 0 0	$3a^2e$.	Solidum a latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
Prima quæ occurrit ad læuam e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	Q		
	8 6 4 0 0 0 0	$3ae^2$.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Secunda e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	R		
	2 1 6 0 0 0	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Secunda e ſedibus cuborum.	C		
Summa ablatitiorum.	1 2 4 0 5 6	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3.	a † e 800 † 60
Reliquum reſoluendi cubi.	8 9 1 6 5 4 4	$z^3 - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$, & per æquipollentiam, y ſol.	
Reliquum reſoluendi cubi.	8 9 1 6 5 4 4 QR C III	y ſol.	Iam duo elicita latera vnius munere funguntur vnde dicitur.
Diuiſores eorumque ſedes ad indagandum ſingulare latus tertium vt ſecundum.	2 2 1 8 8 0 0	$3a^2$.	Triplum quadratũ lateris primi.
	2 5 8 0	$3a$.	Triplum latus primum.
			a † e
Summa diuiſorum.	2 2 2 1 3 8 0	$3a^2$ † $3a$.	860 † 4
	8 8 7 5 2 0 0	$3a^2e$.	Solidum a latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
Tertia e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	Q		
	4 1 2 8	$3ae^2$.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Quarta e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	R		
	6 4	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Tertia e ſedibus cuborum.	C III	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3 = y ſolido.	
Summa &c.	8 9 1 6 5 4 4		

POTE-

POTESTATES AFFECTÆ.

Sequitur agẽdum de legibus poteſtatis affectæ.

Radix 236.	Coefficiens longitudo 12.
5 8 5 2 8	z pl.
. R . R .	
Q1 Q11 Q111	
4 0 0 0 0	a'.
Q1 .	
9 0 0	e'.
Q11	
3 6	e'.
Q111	
2 4 0 0	ba.
1 2 0 0 0	2ac.
3 6 0	be.
2 7 6 0	2ac.
7 2	be.

Leges etiam poteſtatis affectę prout hęc Analyticam ſuſcipit interpunctionem ſunt explicandę, tamen nullius eſt laboris intellectis, quæ ſuperiùs attulimus de poteſtatibus puris;

Quid poteſtas affecta ſuperaddat puræ.

Affecta ſiquidem, tantum id ſuperaddit, vt coefficientis ſit ratio habenda, atque adeo eorum pariter, quæ ſub coefficiente fiunt, vel plana, vel ſolida, vel plano-plana, prout æquationis natura, atque conditio poſcit.

Quomodo ſe habeat quadratum affectum.

In quadrato igitur affecto Analytica interpunctio vt in puro ſe habet, ſolumque hìc intercedunt puncta, quibus notantur ſedes coefficienti debitæ, atque conſentaneæ; quæ quidem ex adiuncto paradigmate facilè intelliguntur. Singularium quadratorum ſedes, quemadmodum planorum ſub lateribus, vt in puro quadrato ſunt punctis adnotatę, ſunt etiam, & loca quibus eſt addita coefficiens longitudo, punctis ſiquidem deſignantur, quemadmodum ſedes etiam planorum ſub lateribus, & coefficiente notantur.

Magnopere iuuat Analyſtam hæc addiſcere.

In quo præſertim Ars Analytica ſit.

Diligenter hæc verò ſunt addiſcenda, nam ex horum perceptione innoteſcit, natura poteſtatis affectæ, quod magnopere iuuat Analyſtam aſſecutum fuiſſe, cùm tota ipſa reſolutiua Ars, in eo poſita ſit, vt introſpiciat naturam, atque adeo membra ex quibus poteſtas afflореſcit, ſic enim aſſequitur ea, in quæ quidem ipſa reſolui debet, atque adeo, & ſedes ſingularium membrorum notandæ ſunt, ſiquidem natura ipſa exigit, vt mutua multiplicatione tam in puris, vt ſupra dicebamus quàm in affectis hunc, vel illum locum obtineant. Ita ſit vt in huiuſmodi pragmatia inſtituenda præ oculis habendæ ſint ſedes membrorum, vt diximus, ſic enim pro earum diuerſitate, diuerſus ſit etiam figurarum, ſiue notarum valor, ac pretium quod maximum in re de qua agimus momentum habet.

Nota.

In his affectis poteſtatibus prætermiſimus notationem figurarum punctis, & commis ſubtus poſitis, cùm ſatis, ſuperque ſit in puris id aduertiſſe; quandoquidem de ipſis affectis idem intelligendum volumus.

Ad Analyſin Quadrati affecti interpunctionis ratio explicata.

Coefficiens longitudo.	1 2	b.	Radix 236.
	. . .		Tot puncta lateralia quot quadratica. 200 / 2
Quadratum affectum reſoluendum.	5 8 5 2 8	z pl.	
	. R . R .		Puncta quadratica.
	QI QIIQIII		
Plana ablatitia.	4 0 0 0 0	a^2.	Quadratum lateris primi.
Primum quod occurrit ad læuam e punctis quadraticis, & prima e ſedibus quadratorum	QI		
	2 4 0 0	b a.	Planum a latere primo in coefficientem longitudinem.
Summa planorum ablatitiorum.	4 2 4 0 0	a^2 + b a.	
Reliquum reſoluendi quadrati affecti.	1 6 1 2 8	z pl. − a^2 − b a.	
Coefficiens longitudo.	2 2	b.	
Reliquum reſoluendi quadrati affecti.	1 6 1 2 8	z pl. − a^2 − b a.	2 + e / 200 + 30
Diuiſorum pars inferior. } Duplum lateris primi.	4 0 0	2 a.	
Summa diuiſorum.	4 2 2	2 a + b.	
Plana ablatitia. Prima ſed. planorum.	1 2 0 0 0	2 a e.	A latere ſecundo in duplum primi.
Secunda ſed. quadratorum.	R 9 0 0	e^2.	Quadratum lateris ſecundi.
	Q 3 6 0	b e.	A latere ſecundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda.	1 3 2 6 0	2 a e + e^2 + b e.	Iam duo elicita latera funguntur vice vnius.
Reliquũ reſoluendi affecti quadrati.	3 8 6 8	z pl. − a^2 − b a − 2 a e − e^2 − b e, & per æquipollentiam y pl.	
Diuiſorum pars ſuperior } Coefficiens longitudo.	2 2	b.	
Reliquum reſoluendi quadrati affecti.	3 8 6 8	y pl.	2 + e / 230 + 6
Diuiſorum pars inferior. } Duplum lateris eliciti.	4 6	2 a.	
Summa diuiſorum.	4 7 2	2 a + b.	
Plana ablatitia. Secunda ſed. planorum.	2 7 6 0	2 a e.	A latere ſecundo in duplum lateris primi.
Tertia ſed. quadratorum.	R 3 6	e^2.	Quadratum lateris ſecundi.
	Q 7 2	b e.	A latere ſecundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo reſoluendi quadrati affecti.	3 8 6 8	2 a e + e^2 + b e = y pl.	

Hic

Aduerte autem ſedem coefficientis ſignificari à punctis ſuprapoſitis à dextra ad læuam pergendo; vltimum enim à dextra ad læuam deſignat vbi primò ſiſtit coefficiens, pro extrahendo primo ſingulari latere; ſubſequens pro ſecundo, & ita deinceps, multitudo verò ipſorum punctorum eſt iuxta multitudinem punctorum, quibus deſignantur ſedes, ſingularium poteſtatum; ſiſtit autem in primo ad læuam puncto, quoniam, tot numeralibus circulis augetur pretium producti à coefficiente in ſingulare latus primum, quot punctis deſuper ſunt adnotata, & quidem in quadrato affecto huiuſmodi puncta, lateralia dicuntur, ſicut etiam tot numeralibus circulis augetur pretium producti à coefficiente in ſingulare latus ſecundum, quot puncta deſuper ſuperſunt, & ita deinceps. Hac itaq; lege coefficiens magnitudo deſuper conſtituta, moueri debet dextrorſum pro eliciendis ſingularibus lateribus reliquis, vt inter diuiſores recenſeri poſſit; cùm enim debitam ſibi ſedem acquiſierit ſuperioris diuiſoris munere fungitur; ita nimirum, vt in applicatione facienda pro eliciendo latere, etiam coefficiens in debita ſede conſtituta attendi debeat. In hoc autem oportet plurimum diligentiæ adhibere, cum electio lateris ſecundi hinc maximè pendeat. Cæterùm duorum laterum, primi ſcilicet, & ſecundi tantummodo meminimus, quoniam cum ſecundum elicitum fuerit, & alia ſuperſint, duo priora vnius munere funguntur, reliquum autem, & ſi ordine tertium, veluti ſecundum ſe habet.

Aduerte quadam certam ſedem coefficientis magnitudinis.

CVBVS AFFECTVS SVB LATERE.

Cubi affecti ſub latere Analyſis.

Hìc ſubijcimus explicatam interpunctionis Analyticæ rationem prout Cubus affectus requirit; quoniam autem penes gradus parodicos bifariam hæc affectio contingit, vel enim ſub latere eſt, vel ſub quadrato, a ſimpliciori naturam ſecuti, cuiuſmodi eſt prima, ad aliam, deinde facimus gradum.

Hæc autem perſimilis eſt interpunctionis ratio ei, quæ cubo puro eſt conſentanea, ſolumque addit ſedes coefficientis, & ſolidorum, ad quorum hęc conſtitutionem coefficiens facit; Notantur igitur ſingularium cuborum, & ſolidorum ſub gradibus loca, quemadmodum cuique deprehendere licebit ex adiucto paradigmate in cuius gratiam quemadmodum in quadrato affecto præmittitur Παρασκευή, vt inde nimirùm facilius Analyſis percipiatur.

Radix 245
Coefficiens planum 34

1 4 7 1 4 4 5 5	z ſol
. QR . QR .	
C I C II C III	
8 0 0 0 0 0 0	a^3
. C I	
6 4 0 0 0	e^3.
. C II	
1 2 5	e^3.
C III	
6 8 0 0	b pl. a.
.	
4 8 0 0 0 0 0	$3a^2e$.
Q	
9 6 0 0 0 0	$3ae^2$.
R	
1 3 6 0	b pl. e.
.	
8 6 4 0 0 0	$3a^2e$.
Q	
1 8 0 0 0	$3ae^2$.
R .	
1 7 0	b pl e.

Ad

Ad Analyſin Cubi affecti, interpunctionis ratio explicata.

Coefficiens planum ſublaterale.	3 4	b pl.	Radix 145. Tot puncta lateralia ſimplicium, quot cubica, ſedeſue cuborum.
Cubus affectus reſoluendus.	1 4 7 1 4 4 5 5 . QR . QR . CI CII CIII	z ſol.	Puncta cubica ſedeſue cuborum, & ſolidorum ſub gradibus.
	8 0 0 0 0 0 0	a^3.	Cubus lateris primi.
Primum quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, & prima e ſedibus cuborum	CI		a 200
	6 8 0 0	b pl. a.	A latere primo io coefficiens planum.
Summa ſolidorum ablatitiorum,	8 0 0 6 8 0 0	a^3†bpl.a	
	3 4	b pl.	Coefficiens planum.
Reliquum reſoluendi cubi.	6 7 0 7 6 5 5 . QR . CII CIII	z ſol.–a^3 –b pl.a.	a † e 200 † 40
Diuiſores inferiores.	1 2 0 0 0 0 6 0 0	3 a^2. 3 a.	
Summa diuiſorum.	1 2 6 3 4 0	3a^2† 3 a	
	4 8 0 0 0 0 0	o 3 a^2e.	A latere ſecundo io triplum quadratum lateris primi.
Prima quæ occurrit ad læuam e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	Q		
Secunda e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	9 6 0 0 0 0 R 6 4 0 0 0	3 a e^2. e^3.	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum. Cubus lateris ſecundi.
Secundum e punctis cubicis, & ſecunda e ſedibus cuborum.	CII 1 3 6 0	b pl. e.	A latere ſecundo in coefficiens planum.
Summa ſolidorum ablatitiorum.	5 8 2 5 3 6 0	3 a^2e † 3 ae^2† e^3 † b pl. e.	
Reliquum reſoluendi cubi.	8 8 2 2 9 5 3 4	b.	Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.
Reliquum reſoluendi cubi.	8 8 2 2 9 5	z ſol.–a^3–b pl. a – 3 a^2 e – 3 a e^2 – e^3 – b pl. e, & per equipollẽtiã y ſol.	
Diuiſores inferiores.	CIII 1 7 2 8 0 0 7 2 0	3 a^2. 3 a.	Triplum quadratum lateris primi. Triplum latus primum.
Summa diuiſorum.	1 7 3 5 5 4	3a^2† 3a.	
Tertia e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	8 6 4 0 0 0 Q 1 8 0 0 0	3 a^2e. 3 ae^2.	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi. A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Quarta e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	R 1 2 5	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Tertium e punctis cubicis, & tertia ſedes cuborum.	CIII 1 7 0	b pl. e.	a † e 240 † 5 A latere ſecundo in coefficiẽs planum.
Reliquum reſoluendi cubi æqualis reliquo &c.	8 8 2 2 9 5	3a^2e†3ae^2†e^3†b pl. e = y ſol.	

Cùm

Quæ ſuperiùs de ſede coefficientium attulimus hìc itidem locum habent, cum ſcilicet de cubo affecto iuſtituitur ſermo. Erat autem perpetua lege ſancitum, vt coefficiens magnitudo ſiſteret in extremo puncto deſuper adnotatis à dextra, ad leuam pergendo, ſitu, diſpoſitioneque pro conditione gradus parodici, in quem coefficiens ipſa magnitudo intelligitur ducta ad efformandum homogeneum poteſtati. Itaque huiuſmodi puncta continuatim ſunt deſuper ſignata, cum parodicus gradus fuerit latus; alternè verò cum huiuſmodi gradus fuerit quadratum &c. Ratio autem ex dictis ſupra petenda eſt. In ſuperiori igitur paradigmate Analyſeos cubi affecti ſub latere, ita facta eſt punctorum ſignatio pro coefficientis ſede, nempe, vt à dextra ad læuam pergendo, continuatim puncta deſignentur pro numero ſingularium laterum, quæ cum ſint numero tria, totidem etiam ſunt ſupraſcripta puncta, & quia coefficiens eſt ſublateralis, ob id continuatim deſignatio punctorum facta eſt. *Notanda quædam pro ſede coefficientium magnitudinū*

Cætera de coefficiente, vide, quæ ſupra docuimus.

CVBVS AFFECTVS SVB QVADRATO.

Cùm autem æquatio cubica affecta fuerit ſub quadrato eius interpunctio Analyſica, perſimilis omnino eſt interpunctioni cubi affecti ſub latere, ſolumque diſcriminis illud intercedit, quod interpùnctio deſeruiens coefficienti alia lege perficitur.

Illa liquidem, quæ coefficienti plano inſeruit fieri debet continuatim, quandoquidem coefficiens quantitas ſublateralis eſt; At verò, quæ inſeruit longitudini cuiuſmodi eſt quantitas coefficiens ſubquadratica, vt in cubo affecto ſub quadrato, ſedes ipſius coefficientis notantur punctis ſupra figuris alternatim, prout quadrati natura expoſcit.

In reliquis obſeruanda eſt interpunctionis ratio, pro vt preſens exhibet παράδειγμα, & paradigma ſubſequens. Hic enim ſingularium cuborum, itemque ſolidorum ſub gradibus adnotatę ſedes cernuntur, ibi verò eadem, & præterea totius Analyſeos ſtructura interpunctionibus diſtincta conſpicitur.

Radix 242
Coefficiens longitudo 64

˙ ˙ ˙ (ſupra 2, 5, 4)	
1 7 9 2 0 5 8 4	z ſol.
. QR . QR .	
Ci Cii Ciii	
8 0 0 0 0 0 0	a^3.
Ci	
6 4 0 0 0	e^3.
Cii	
8	e^3.
Ciii	
2 5 6 0 0 0 0	ba^2.
4 8 0 0 0 0 0	$3a^2e$.
Q	
9 6 0 0 0 0	$3ae^2$.
R	
1 0 2 4 0 0 0	2b pl. e.
1 0 2 4 0 0	be^2.
3 4 5 6 0 0	$3a^2e$.
Q	
2 8 8 0	$3ae^2$.
R	
8 1 4 4 0	2bae.
2 5 6	be^2.

Ad

Ad Analyſin Cubi affecti ſub Quadrato interpunctionis ratio explicata.

Coefficiens longitudo.	64	b.	Radix 242.
Cubus affectus ſub quadrato reſoluendus.	17920584 · QR · QR CI CII CIII	z ſol.	2 200 Sedes cuborum, & ſolidorum ſub gradibus.
Primum, quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, & prima e ſedibus cuborum.	8000000	a^3.	Cubus lateris primi.
	CI 2560000	ba^2.	Solidum a quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
Summa planorum ablatitiorum.	10560000	$a^3 + ba^2$.	
Reliquum reſoluendi cubi.	7360584	z ſol $-a^3$ $-ba^2$.	
Planum expletionis.	25600	2ba.	
Coefficiens longitudo.	64	b.	
Reliquum reſoluendi cubi.	7360584 QR · QR · CII CIII	z ſol. $-a^3$ $-ba^2$.	2 + e 200 + 40
Diuiſores inferiores.	120000	$3a^2$.	
	600	3a.	
Summa diuiſorum.	126640	$3a^2 + 3a0$ $+ b$.	
	4800000 Q	$3a^2e$.	Solidum a latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
Prima quæ occurrit ad læuam e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	960000 R	$3ae^2$.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Secunda e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	64000	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Secundū e punctis cubicis, & ſecunda e ſedibus cuborum.	CII 1024000	2 b a e.	Solidum a latere ſecundo id planum expletionis.
	102400	be^2.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.
Summa ſolidorum ablatitiorum.	6950400	z ſol. $-a^3$	
Reliquū reſoluendi cubi.	410184	$-ba^2 - 3a^2e - 3ae^2 + e\,3 - b$ pl. e, & per æquipollentiam y ſol.	
Planum expletionis.	30720	2ba.	
Coefficiens longitudo.	64		
Reliquum reſoluendi cubi.	410184 QR .	y ſol.	2 + e 240 + 2
Diuiſores inferiores.	CIII 172800	$3a^2$.	
	600	3a.	
Summa diuiſorum.	172400	$3a^2e + 3a$.	
Tertia e ſedibus ſolidorum ſob gradibus.	345600 Q	$3a^2e$.	Solidum a latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
	2880	$3ae^2$.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Quarta e ſedibus ſolidorum ſub gradibus.	R		
	8	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Tertium è punctis cubicis tertiaue cuborum ſedes.	CIII 61440	2 b a e.	Solidum a latere ſecundo in planum expletionis.
	256	be^2.	Solidum a quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.
Summa ſolidorum æqualis &c.	410184	$3a^2e + 3ae^2$ &c.	

Quan-

Quandoquidem in ſuperiori exemplo vt dictum fuit coefficiens magnitudo, eſt longitudo, vnde eſt coefficiens ſubquadratica, quæ nempe ducta in parodicum gradum, homogeneum conſtituit; propterea quæ deſignantur puncta ſupra notas affectæ poteſtatis reſoluendæ; non ſunt continuatim poſita, ſed alternè, prout eiuſdem parodici gradus conditio requirit; Cæterùm quæ ſupra ſcripſimus de ſede coefficientis, hic itidem ſunt vſurpanda. Quamobrem non erit hoc in loco magis imorandum; Siquidem ex dictis omnia intelligi commodè poſſunt.

Nota quadã hic circa coefficientes, earumq; ſedes.

CVBVS BIFARIAM AFFECTVS.

Poſtremo loco ſe offert æquatio cubica dupliciter affecta, ſcilicet affirmatè ſub latere, & negatè ſub quadrato, huius autem æquationis interpunctio Analytica eſt implicatior, quandoquidem plures, ac diuerſæ ſunt ſedes punctorum deſignatione adnotandæ, pro diuerſitate ſolidorum, multiplicatione quidem ortorum, pro vt videlicet huius æquationis Analyſis expoſcit. Hæc autem partim cernuntur a latere in appoſita reſolutione, quam exhibet decens hęc pręparatio; abundę verò in ſubadiuncto paradigmate, vbi tota ipſius ęquationis Analyſis ordinata conſpicitur vbi, & interpunctionibus pręfinitę ſedes obſeruari luculentiſſimè poſſunt.

Radix 2592
Coefficiens longitudo 8637.
Coefficiens planum 24883200.

2 3 8 8 4 1 3 9 5 2 0	z ſolidum.
. QR . QR . QR .	
CI CII CIII CIIII	
8 0 0 0 0 0 0 0 0 0	a^3.
CI	
1 2 5 0 0 0 0 0 0 0	e^3.
CII	
7 2 9 0 0 0	e^3.
CIII	
8	e^3.
CIIII	
4 9 7 6 6 4 0 0 0 0 0	bpl.a.
3 4 5 4 8 0 0 0 0 0 0	da^2.
6 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$3a^2e$.
Q	
1 5 0 0 0 0 0 0 0 0	$3ae^2$.
R	
1 2 4 4 1 6 0 0 0 0 0	bpl.e.
1 7 2 7 4 0 0 0 0 0 0	2dae.
2 1 5 9 2 5 0 0 0 0	de^2.
1 6 8 7 5 0 0 0 0 0	$3a^2e$.
Q	
6 0 7 5 0 0 0 0	$3ae^2$.
R	
2 2 3 9 4 8 8 0 0 0	bpl.e.
3 8 8 6 6 5 0 0 0 0	2dae.
6 9 8 5 9 7 0 0	de^2.
4 0 2 8 4 6 0 0	$3a^2e$.
Q	
3 1 0 8 0	$3ae^2$.
R	
4 9 7 6 6 4 0 0	bpl.e.
8 9 4 7 9 3 2 0	2dae.
3 4 5 4 8	de^2.

Ad Analyſin Cubi affirmatè affecti ſub latere, negatè autem ſub quadrato, interpunctionis ratio explicata.

Coefficiens longitudo.	8 6 3 7	d.	oooo Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue ſingulana.
Coefficiens planum.	-2 4 8 8 3 2 0 0	b pl.	Radix 2592.
Cubus affectus affirmatè ſub latere & negatè ſub quadrato reſoluendus.	2 3 8 8 4 1 3 9 5 2 0	z ſol.	2 / 2000
	. QR . QR . QR .		
Primum quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, primaue cuborum ſedes.	CI CII CIII CIIII		
	8*0 0 0 0 0 0 0 0 0	a^3.	Cubus lateris primi.
	4 9 7 6 6 4 0 0*0 0 0	b pl. a.	A latere primo in coefficiens planum.
Solida proſtaphæretica.	5 7 7 6 6 4 0 0*0 0 0	a^3 † b pl. a.	
	3 4 5 4 8*0 0 0 0 0 0	d a^2.	A quadrato lateris primi in coefficientem longitudinẽ.
Exceſſus ſolidi ablat. ſubtrahendus.	2 3 2 1 8 4 0 0*0 0 0	a^3 † b pl. a – d a^2.	
Reliquum reſoluendi cubi.	6 6 5 7 3 9 5 2 0	z ſol. – a^3 – b pl. a † d a^2.	
Diuiſores ſuperiores.	— 3 4 5 4 8*0 0 0	2 d a.	A duplo latere primo in coefficientem longitudinẽ.
	— 8 6 3 7	d.	Coefficiens longitudo.
	✠ 2 4 8 8 3 2 0 0	b pl.	Coefficiens planum.
		z ſol. – a^3 – b pl. a † d a^2 ergo	
Reliquum reſoluendi cubi.	6 6 5 7 3 9 5 2 0	z ſol. – &c.	
	QR . QR . QR .		
	CII CIII CIIII		
Diuiſores inferiores.	✠ 1 2*0 0 0 0 0 0	3 a^2.	Triplum quadratũ lateris pr.
	✠ 6*0 0 0	3 a.	Triplum latus primum.
Summa diuiſorum affectionis affirmatæ.	✠ 3 7 4 8 3 2 0 0	3 a^2 † 3 a oo † b pl.	a † e / 2000 † 500
Summa diuiſorum affectionis negatæ.	— 3 3 4 1 1 7*0 0	2 d a † d.	
Exceſſus diuiſorum affectionis affirmatæ.	2 0 7 1 5*0 0	3 a^2 † 3 a oo † b pl. – 2 d a – d.	
	6 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 a^2 e.	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
Prima ſedes ſolidorum ſub gradibus.	Q		
	1 5 0 0 0 0 0 0 0 0	3 a e^2.	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
Secunda ſedes ſolidorum ſub gradibus.	R		
	1 2 5 0 0 0 0 0 0	e^3.	Cubus lateris ſecundi.
Secundum quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, ſecundaue cuborum ſedes.	.CII		
	1 2 4 4 1 6 0 0 0*0 0	b pl. e.	A latere ſecundo in planum coefficiens.
Summa ſolidorum ablatitiorum.	2 0 0 6 6 6 0 0 0 0 0	3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e.	
	1 7 2 7 4 0*0 0 0 0 0	2 d a e.	
	2 1 5 9 2 5*0 0 0 0	d e^2.	
Summa ſolidorum addititiorum.	1 9 4 3 3 2 5 0 0 0 0	2 d a e † d e^2.	
Exceſſus ſolidorum ablatitiorum, ſubtrahendus à reliquo &c.	6 3 3 3 5 0 0 0 0	3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e – 2 d a e – d e^2.	
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	3 2 3 8 9 5 2 0	z ſol. – a^3 – b pl. a † d a^2 – 3 a^2 e – 3 a e^2 – e^3 – b pl. e † 2 d a e † d e^2, & per ęquipollentiã y ſol.	

Diuiſores

Diuiſores ſuperiores.	— 4 31 8 5 0*0 0	2 d a.	
	— 8 6 3 7	d.	
	+ 2 4 8 8 3 2 0 0	b pl.	Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.
Reliquum reſoluendi cubi.	3 2 3 8 9 5 2 0 QR . QR . CIII CIIII	y ſolidum	a † e 2500 † 90
Diuiſores inferiores.	+ 1 8 7 5*0 0 0 0	$3a^2$.	
	+ 7 5*0 0	3 a.	
Summa diuiſorum affectionis affirmatæ.	+ 4 3 7 0 8 2 0 0	$3a^2$ † 3 a o † b pl.	
Summa diuiſorum affectionis negatæ.	— 4 3 2 7 1 3 7	2 d a † d.	
Exceſſus diuiſorum affectionis affirmatæ.	4 3 6 8 3 0	$3a^2$ † 3 a o † bpl. — 2 d a — d.	
Tertia ſedes ſolidorum ſub gradibus.	1 6 8 7 5 0 0 0 0 Q	$3a^2e$.	
Quarta ſedes ſolidorum ſub gradibus.	6 0 7 5 0 0 0 0 R	$3ae^2$.	
Tertium, quod occurrit ad læuam e punctis cubicis, tertiaue cuborum ſedes.	7 2 9 0 0 0 CIII	e^3.	
	2 2 3 9 4 8 8 0 0*0	b pl. e.	
Summa ſolidorum ablatitiorum.	3 9 8 8 4 6 7 0 0*0	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3 † b pl. e.	
	3 8 8 6 6 5 0*0 0 0	2 d a e.	
	6 9 9 5 9 7*0 0	d e^2.	
Summa ſolidorum addititiorum.	3 9 5 6 6 0 9 7*0 0	2 d a e † d e^2.	
Exceſſus ablatitiorum ſolidorum ſubtrahendus.	3 1 8 5 7 3 0 0	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3 † b pl. e — 2 d a e — d e^2.	
Reliquum reſoluendi cubi.	5 3 2 2 2 0	y ſol. — $3a^2e$ — $3ae^2$ — e^3 — b pl. e † 2 d a e † d e^2, & per æquipollentiam z ſolidum.	
Diuiſores ſuperiores.	— 4 4 7 3 9 6 6 0	2 d a.	
	— 8 6 3 7	d.	
	+ 2 4 8 8 3 2 0 0	b pl.	
Reliquum reſoluendi cubi.	5 3 2 2 2 0 . QR CIIII		Iam tria elicita latera vnius munere funguntur.
Diuiſores inferiores.	+ 2 0 1 2 4 3 0 0	$3ae^2$.	
	+ 7 7 7 0	3 a.	a † e 2590 † 2
Summa diuiſorum affectionis affirmatæ.	+ 4 5 0 1 5 2 7 0	$3a^2$ † 3 a † bpl.	
Summa diuiſorum affectionis negatæ.	— 4 4 7 4 8 2 9 7	2 d a † d.	
Exceſſus diuiſorum affectionis affirmatæ.	2 6 6 9 7 3	$3a^2$ † 3 a † b pl. — 2 d a — d.	
Quinta ſedes ſolidorum ſubgradibus.	4 0 2 4 8 6 0 0 Q	$3a^2e$.	
Sexta, & vltima ſedes ſolidorum ſubgradibus.	3 1 0 8 0 R	$3ae^2$.	
Quartum e punctis cubicis, atque vltima cuborum ſedes.	8 CIIII	e^3.	
	4 9 7 6 6 4 0 0	b pl. e.	
	9 0 0 4 6 0 8 8	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3 † b pl. e.	
	8 9 4 7 9 3 2 0	2 d a e.	
	3 4 5 4 8	d e^2.	
	8 9 5 1 3 8 6 8	2 d a e † d e^2.	
	5 3 2 2 2 0	$3a^2e$ † $3ae^2$ † e^3 † bpl. e — 2 d a e — d e^2. = z ſolido.	

Propoſitæ

Propoſitæ igitur æquatiouis Radix eſt 2592. Hoc itaque pacto in multifariam æquationibus affectis Analyſta procedit indagando latus. Cæterùm mihi videtur ſatis hucuſque explicata Poteſtatum, tùm purarum, cùm affectarum Analyſis; & quod ſupererat, velut coronidis loco, nos interpunctis rationem adijecimus.

Nonnulla notatu digna aſſeruntur.

Aduerte autem, vt clarè conſtaret ipſius interpunctionis ratio, nos adijeciſſe numerales circulos, hoc eſt cifras, rati hunc in modum futurum, vt clariùs, quod intendimus perciperetur. Notauimus de more à latere dextro ſpecioſam reſolutionem, vnde facile conſtat, ipſorum numerorum conditio.

Ad ſedes coefficientium quod ſpectat.

Ad ſedes coefficientium, quod ſpectat, nihil dicendum ampliùs occurrit; cùm ex ſupra explicatis, cuique ſatis exploratum eſſe poſſit, cur puncta, hoc, vel illo modo, & tot ſignari debeant, pro conditione gradus parodici, in quem ducta ipſa coefficiens magnitudo homogeneum conſtituit.

Aduertenda quadam circa cifras ſupra lineolam.

Illud ad extremum ſupereſt declarandum, nimirum ſupra lineolam, vt hic à latere cernis, ſcribere nos conſueuiſſe tot numerales circulos, quot ſunt latera ſingularia reſoluendæ poteſtatis, quandoquidem ſopponimus nullum elicitum eſſe latus, ſed tot eſſe elicienda, atque adeo explenda eſſe loca ipſorum numerorum circularium; Vnde ſi fuerint duo circuli numerales, ſignificamus, duo eſſe latera ſingularia elicienda, ſi tres verò tria; Cùm autem primum elicitum fuerit, ſintque duo circuli numerales, expleto vno, alius ſupereſt, vnde ſtatim intelligitur primum latus ſingulare elicitum, eſſe numerum denariorum; ſi enim figuræ alicui numerali addatur numeralis circulus, conſtituitur numerus ordinis denariorum. Quod ſi circuli numerales fuerint tres, ijs quidem ſignificamus tria eſſe ſingularia latera, quare primo expleto, duo ſuperſunt quibus ſignificamus, primam illam figuram importare numerum centenariorum, ſi enim alicui notæ numerali, duo numerales circuli apponantur, fit numerus ordinis centenariorum, vt perſpicuum eſt.

o o
———
o o o
———

Quod ſi fuerit expletus ſecundus circulus, cum vnus ſupererit, ſignificamus, ſecundum latus ſingulare, eſſe ordinis denariorum, & ſic de alijs ſuo modo intelligendum, cum ſcilicet, ſupra lineolam ſcripti fuerint quatuor, quinque, pluresq; numerales circuli &c. *Monitum prò aſymmetria numerorum eſto*,

Hic diligenter aduerte quo pacto ſit procedendum cum irrationales numeris interceſſerint.

Illud ſolum hic adijciam quantum ad analyſin Poteſtatum affectarum, cum interceſſerint numeri irrationales, in quo plurimùm eſt inſudandum.

Si fuerit æquatio 1 Q † 6 R = 2 † ℞ 72. Iam ſuperiùs docuimus quo pacto ſit procedendum, primò enim æquatio ad hanc redigetur 1 Q † 6 R — 2 = ℞ 72.

Mox vtraque pars æquationis, quadraticè ducenda eſt, vt tollatur aſymmetria, & quidem quadraticè, quoniam aſymmetria eſt huiuſmodi, cùm comparationis homogeneum, ſit latus quadratum; per huiuſmodi autem multiplicationem fit 1 QQ † 12 C † 32 Q — 24 R † 4 = 72, & per antitheſin fit 1 QQ † 12 C † 32 Q — 24 R = 68. Nunc extrahendum eſt latus Analyticè. Illudque reperietur ℞ 2. Sed iuxta Veterum præcepta nos idem abſoluimus; æquatio enim huiuſmodi ad hanc reuocatur 1 QQ † 32 Q = 68.

Idem ex veterum doctrina.

Dimidium numeri quadratorum eſt 16, cuius quadratum eſt 256, quo addito ad 68, fit 324, cuius latus quadratum eſt 18, à quo ſi ſubtraxeris 16, dimidium prædictum, remanet 2.

At verò radix quadrata ipſius 2, nempe ℞ 2, eſt latus æquationi quadrato-quadraticæ ſatisfaciens, atque adeo etiam æquationi propoſitæ. Id autem contingit, quoniam, duo illa homogenea † 12 C, & — 24 R, vtpotè eiuſdem prætij, ſe mutuo interimunt.

Alio quidem exemplo ſuperior illuſtratur doctrina.

Nec diſſimiliter. Si ſit 1 Q † 4 R = 3 † ℞ 48, quæ per Antitheſin fiet 1 Q † 4 R — 3 = ℞ 48. Ductis partibus quadraticè, fiet 1 QQ † 8 C † 10 Q — 24 R † 9 = 48, & per antitheſin fiet 1 QQ † 8 C † 10 Q — 24 R = 39. Seu, vt ſupra 1 QQ † 10 Q = 39. Dimidium numeri quadratorum eſt 5, cuius quadratum eſt 25, quo addito ad 39, fit 64, cuius latus quadratum eſt 8, à quo ſi dempſeris 5, dimidium iam dictum, remanet 3, cuius latus quadratum, puta ℞ 3, eſt radix æquationis quadrato-quadraticæ, atque adeo, æquationis etiam propoſitæ.

Cæterùm

Cæterùm eandem æquationem Veterum præceptis explicari poſſe, ex ijs, quæ ſupra fuerunt à nobis tradita, cuilibet intelligere licebit;

Eadem æquatio Veterum præceptis explicata explicatur.

Quandoquidem ſi fuerit illa ſuperior æquatio 1 Q † 4 R = 3 † ℞ 48. Sumatur dimidium numeri radicum, puta a, & eius quadratum 4, addatur ℞ 48, comparationis homogeneo. At verò ex aggregato, nempe 7 † ℞ 48, ſumatur latus quadratum, cuiuſmodi eſt 2 † ℞ 3, & ex hoc ſubtrahatur idem dimidium 2, remanebit ℞ 3, pro radice æquationis prædictæ. Solùm igitur quæ ſupra ſcripſimus intelligenda volumus, quatenus æquatio propoſita, intelligitur liberanda ab ea, qua laborat aſymmetria.

Quod ſi Specioſæ beneficio id nos amplius explicare velimus. Intelligamus radicem æquationis eſſe quantitatem irrationalem. Effinge igitur illam eſſe ℞ a pl. itaque ducatur in ſe vt fiat a pl. deinde multiplicetur ℞ a pl. per b, quod volumus eſſe coefficientem longitudinem, & fiet productum b ℞ a pl. vnde pars vna æquationis erit a pl. † b ℞ a pl. at pars altera, ex hypoteſi quod binomij pars rationalis ſit d pl. altera verò irrationalis ſit ℞ z pl. pl. erit vt fiat æquatio a pl. † b ℞ a pl. = d pl. † ℞ z pl. pl. Quoniam verò pars rationalis eſt ſubtrahenda ex altera parte æquationis, vt nihil rationalis remaneat ex natura æquationis, ob id a pl. æquabitur d pl. quare; b ℞ a pl. æquabitur ℞ z pl. pl. Ex his facilè intelliges latus quadratum partis rationalis binomij conſtituentis comparationis homogeneum eſſe radicem æquationis propoſitæ.

Specioſa artificio inquiritur latus æquationis intercedentibus numeri irrationalibus.

At verò ſi fuerit æquatio 1 Q † 4 R = 15 † ℞ 192. Sic procedendum foret. Per Antitheſin reuocetur ad hanc 1 Q † 4 R — 15 = ℞ 192. Vt verò liberetur ab aſymmetria, qua laborat, quadraticè vtraque pars multiplicetur; ita enim proueniet 1 QQ † 8 C — 14 Q — 120 R † 225 = 192. Huius æquationis radix elicietur reuocando illam per Antitheſin ad hanc 1 QQ † 8 C — 14 Q — 120 R † 33 = 0; ſeu 14 Q † 120 R — 8 C — 1 QQ = 33. Huius æquationis radix eſt 2 † ℞ 3. Nam huius quadratum eſt 7 † ℞ 48. Cubus verò 26 † ℞ 675, quadrato-quadratum autem 97 † ℞ 9408. Itaque ſi 14, numerus quadratorum ducatur in 7 † ℞ 48, fit 98 † ℞ 9408, cui addito 240 † ℞ 43200, producto ex 120, numero radicum in 2 † ℞ 3, fit 338 † ℞ 92928. At verò ſi 26 † ℞ 675, cubus è 2 † ℞ 3, ducatur in 8, numerum cuborum, fit 208 † ℞ 43200, quod ſi dempſeris ex 338 † ℞ 92928, remanet 130 † ℞ 9408, ex quo ſi ſubtrahatur 97 † ℞ 9408, quadrato-quadratum ipſius 2 † ℞ 3, remanebit 33. Vides igitur æquationis prædictæ radicem eſſe 2 † ℞ 3. Hoc itaque conſtat.

Exemplum æquationis, cuius radix binomiū eſt, ſiue quantitas duobus nominibus conſtans.

Methodus ad latus indagandum in huiuſmodi æquationibus, pulcherrima eſt, cognituque difficilis.

Methodus ad huiuſmodi æquationis explicandas, in quibus nimirum irrationales numeri interceſſerint cognitum difficilis eſt.

Cæterùm idem pariter ex Veterum doctrina, nos itidem abſoluere poterimus. Nam dimidium numeri radicum eſt 2, cuius quadratum 4, additum 15 † ℞ 192, comparationis homogeneo, facit 19 † ℞ 192, cuius latus quadratum 4 † ℞ 3, multatum eodem dimidio 2; propoſitæ æquationis radicem exhibet 2 † ℞ 3. Sed ad methodum vt redeamus; cum propoſita fuerit ſuperior æquatio 1 Q † 4 R = 15 † ℞ 192. Effinge radicem binomiam, cuius pars vna ſit rationalis, altera verò irrationalis, & quidem rationalis eſto a, at irrationalis eſto ℞ e pl. itaut radix vniuerſa ſit a † ℞ e pl. Huius quadratum eſt a^2 † a a ℞ e pl. † e pl. & quoniam coefficiens ſupponi poteſt b, ducatur b, in a † ℞ e pl. proueniet enim b a † b ℞ e pl. igitur pars vna æquationis, in qua eſt quantitas ignota erit a^2 † a a ℞ e pl. † e pl. † b a † b ℞ e pl. quæ æquabitur alteri parti; Itaque ſi quantitatem rationalem appellemus d pl. & irrationalem ℞ z pl. pl. fiet æquatio huiuſmodi a^2 † a a ℞ e pl. † e pl. † b a † b ℞ e pl. = d pl. † ℞ z pl. pl. & per Antitheſin a a ℞ e pl. † e pl. † b ℞ e pl = b pl. † ℞ z pl. pl. — a^2 — b a.

Ex his facilè intelliges, partes binomij, quod eſt propoſitæ æquationis radix; & qua Arte ſit procedendum in huiuſmodi æquationibus explicandis, etiam ſi ad altiores gradus aſcendant. Methodus enim generalis eſt ad quodlibet æquationis genus.

Hæc methodus generalis eſt ad quodvis æquationis genus.

Cæterùm non diſſimili artificio, explicatur tethoria methodi. De his tamen multa dicemus in huius operis ſecunda parte, vbi diligenter hæc, cum alijs plurimis, ad idem pertinentibus proſequemur &c.

Algorithmus

Digitized by Google

Algorithmus Signorum ✻, & —, denuò perpenditur, & hac de re multa tractantur in ſupradictorum gratiam, nouęque demonſtrationes contexuntur.

CAPVT XXIX.

Denuò inſtituitur ſignorũ †, & —, conſideratio.

QVAMVIS operationes huiuſmodi ſatis eſſe comprobatę videantur, ita vt nulla poſſit ſupereſſe difficultas; nihilominus cum multa dixerimus, in quibus prima fronte hæſitatio aliqua videtur contingere; propterea multa nos hic afferemus, vt ibi dicta illuſtria reddantur, atque cuiuſlibet erroris ſuſpicione de medio ſublata, veritas demum affulgeat.

Non grauabimur tamen demonſtrationes ſtudioſorum gratia nouas contexere, quibus operationes iam dictę comprobentur, eoqne libentiùs in id adducimur, quòd Io. Alphonſum Borellium ſtrictiſſimo neceſſitudinis vinculo nobis coniunctum ſuaſorem habuimus. Conſilium autem ipſius apud nos tantum habet momenti, quantum ſanè plurima, qua pollet eruditio requirit, vt non immeritò, cum eo de his quandoque colloquium habendum duxerimus, præſertim de binomij cubici extrahendo latere tractationem aggredientes; quinimo ſeptimum ex ijs Theorematibus oſtendens nobis copiam demonſtrationis fecit, qua mirum in modum gauiſi ſumus aduertentes in hoc non ſecus ac nos ratiocinatum fuiſſe, cùm ſcilicet haud. Muſis aduerſis olim perſimilem demonſtrationem adinuenimus.

Dicendorum propoſitio. Primò autem vt oſtenderemus additionem ſignorum —, & †, nempe in additione —, & †, fieri debere ſubtractionem, & hunc in modum rectè inſtitutam eſſe operationem ſubtrahendo ea, quæ afficiuntur ſignis diuerſis &c. Dicebamus ex eo perſpicuum eſſe, quoniam.

Si duo ſint numeri inæquales quorum differentia addi debeat numero vtcumq; diuiſo, perinde eſt minorem è duobus differentibus ab alterutra partium numeri diuiſi ſubtrahere, & maiorem alteri parti coniungere, aggregato verò reliquum numerum addere, ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum.

Exemplis declarantur ſuperius dicta. Sit 60 † 40, & 32 — 15, facta additione conſurgit 92 † 25, idem eſt enim addere 32 ad 60, & ſummę 92, addere 25, interuallum, ſeu differentiam inter 40, & 15; ac eſt numero 100, compoſito ex 60, & 40, addere 17, differentiam inter 32, & 15; vtroque modo conſurget 117, pro ſumma quæſita.

Notanda quædam. Aduertendum eſt igitur, de quo etiam in Scholio ad Caput III. verba fecimus Propoſitionem hanc intelligendam eſſe, cum numerus minor è duobus differentibus conſertur cum parte numeri diuiſi, ita vt numerus ſit minor parte; alioquin alia fieri debebit enunciatio; & vt ſuperius exemplum adhibeamus. Sit 60 † 40, & 32 — 15; Manifeſtum eſt, ſi ad 60, addatur 32, fieri 92; at ſi ex 40, auferatur 15, remanere 25, quo addito ad 92, fit 117, quantum ſanè fit ſi ad 60 † 40, hoc eſt ſi ad 100, addatur 17, differentia inter 32, & 15, idem planè contingeret, ſi ad 40, addatur 32, vt fiat 72; at verò 15, ſubtrahatur ex 60, vt remaneat 45, hoc enim addito ad 72 fit 117, vt priùs.

At verò ſi fuerit 60 † 40, cui addere oporteat 92 — 50, facta additione 92, ad 60, vt proueniat 152, ſubtrahatur 30, ex 50, vt remaneat 10, quo ſubtracto ex 152, remanet 142, quantum ſane fit ſi ad 60 † 40, hoc eſt ſi ad 100, addatur

42,

42, differentia inter 92, & 50, itaque ſumma fit reſiduum, vt in ſuperiori caſu ſumma erat binomium.

Propoſitio igitur illa, intelligi debet, vt dictum eſt, aliàs ſic erit enuncianda.

Quo pacto ſupradicta propoſitiones intelligi debeãt

Si duo ſint numeri inæquales, quorum differentia addi debeat numero vtcumq; diuiſo, ſi numerus è duobus differentibus affectus ſigno —, conferatur cum parte diuiſi, ita vt numerus ipſe ſit minor parte, perinde eſt minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium numeri diuiſi ſubtrahere, & maiorem alteri parti coniungere, aggregato verò reliquum numerum addere; ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum.

Explicatio vlterior.

At ſi è duobus differentibus numerus affectus ſigno —, conferatur cum parte diuiſi; ita vt numerus ſit maior parte, perinde eſt à minori è duobus differentibus alterutram partium diuiſi ſubtrahere; ſi vtraque fuerit minor, vel minorem ſi vna tantum, & maiorem alteri parti coniungere, ex aggregato autem ſubtrahere reſiduum habitum, ac eſt differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuiſum.

Exemplis declarantur ſupradicta.

Primum patet, ſecundum ſic fiet manifeſtum. Sit 40 † 30, cui addere oporteat 92 — 50, idem eſt ad 40, addere 92, & ex aggregato 132, ſubtrahere 20, differentiam inter 50, & 30, ac eſt ad 40 † 30, ſeu ad 70, addere 42 differentiam inter 92, & 50. Vides igitur propoſitiones illas ſuo loco prolatas intelligendas eſſe ſenſu, vt diximus.

Hunc enim in modum ijs ineſt demonſtrationis vis; in vtroque enim caſu contingit quod intendimus, nimirum —, ad †, ſubtrahi, notarique ſignum illud, quo terminus maior afficitur.

Non ſecus etiam de alijs propoſitionibus ſentiendum erit; quemadmodum ſe habet illa. Si duo numeri vtcumque diuiſi fuerint, differentia totorum numerorum æqualis eſt partium vnius numeri à partibus alterius ſimul ſumptis differentijs, ſeu idem eſt totum à toto ſubducere, ac eſt partes à partibus, & differentiam in vnum colligere.

Vt ſint duo numeri diuiſi 78, & 55, ille quidem in duas partes 60, & 18, hic autem in 40, & 15, ſit diuiſus. Si ſubtrahamus 15, ex 18, remanent 3, ſi ex 60, ſubducantur 40, remanent 20, harum ſumma eſt 23, tanta eſt autem differentia inter 78, & 55.

Epilogiſmus ſupradictorũ.

Hæc autem intelligenda ſunt, quando terminus affectus ſigno †, fuerit minor eo, qui eodem afficitur ſigno, à quo fieri debet ſubtractio; alioquin aliter erit enuncianda propoſitio. Vnde propoſitiones ille, vt vno verbo dicam, explicatione indigent.

Bonauentura Cauallerius Mediolanẽſis laudatur; Ioãnes Antonius Rocca Regienſis commendatur eiuſq; virtutis laudibus afferũtur.

His igitur animaduerſis, gradum faciamus, ad id quod nobis propoſitum erat agendum. Algorithmus quatuor operationes complectitur, nimirum. Additionem ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem, hæ quoq; in re, de qua agimus contingunt, vt ſuperiùs vidimus; Rectè igitur ab Artifice has operationes exerceri, in ſignis abundantiæ, atque defectus tractandis operæ pretium eſt, vt Geometrico more nos oſtendamus, quod à nemine factum aduertimus, fieri tamen debere, ſummus ille, nec vnquam ſatis laudatus Vir Bonauentura Cauallerius Mediolanenſis Mathematicus toto orbe celeberrimus, felicis recordationis, teſtabatur; Vt, & Io: Antonius Rocca Regienſis nobili loco natus, cuius cineres, iuxta quadam ſignificatione cultus, proſequi glorioſum exiſtimo; erat enim animi candore, erat & omni virtutum genere cumulatus, atque ſpectabilis adeo, vt ſine lacrymis nomen quaſi dixerim extinctæ virtutis recordari non poſſum. Eius autem conſuetudine, dum ſcilicet vſura lucis fruebatur ita familiariter vtebar, vt cum ipſo coniunctiſſimè viuerem; & quidem per plures menſes eodem contubernio recepti mutuis colloquijs iucundiſſimè vitam traduximus, erat ingenij ſumma quadam alacritate prædius, ita vt de re quacunque valde ſubtiliter diſſererer, & peracutè loqueretur. In Arithmeticis, Geometricis, alijſque Matheſeos partibus præcipuè verſatus. Quod autem me ad eum amore proſequendum pellebat erat optima quædem indoles, optima quidem anima, quam natura ſortitus, haud mediocriter excoluerat. Mirus erat ingenuitate animi, ſuauitate, probitateq; morum, conſtantia fidei. Deteſtaba-

tur proinde verſipelles, odio habebat mendaces, deteſtabatur ingratos. Ita demum virtutibus exornatus quemlibet ad ſui amorem alliciebat. At ignarus ego, num in eo ingenij ſolertia, an indolis præſtantia commendabilior foret, ſolùm id pro comperto habebam, nimirum tot vnum eſſe præclaris dotibus inſignitum, quot non ſine difficultate licet in pluribus, pluribuſque reperire diſperſas. Nec diſſentiebat Iſach Baro Cantabrigienſis, Matheſeos ibi profeſſor eximius, quem hac de re, non ſemel ſumus allocuti. Qualeſcunque verò ſint futuræ deinceps noſtræ damonſtrationes æquè, bonique conſule, atq; grati animo amplectere ſtudioſe lector; tametſi enim hæ faciles prima fronte videantur, tamen illas ad Geometricam formam redigere, non nihil negotij faceſſere teſtis eſt quicunque tractandum hoc argumentum aſſumens in arenam deſcenderit.

Algorithmus Signorum ✱, & –.

SVPPOSITIONES.

I.

Quantitas tunc cenſetur affici ſigno †, cùm à nulla quantitate ſubtrahitur.

II.

Quantitas tunc cenſetur affecta ſigno —, cùm ab alia ſubtrahitur.

III.

† *Addi ad †, eſt quantitatem affectam ſigno †, addi ad quantitatem affectam ſigno †, & contrà.*

IV.

— *Addi ad —, eſt quantitatem affectam ſigno —, addi ad quantitatem affectam ſigno —, & contrà.*

V.

† *Addi ad —, eſt quantitatem affectam ſigno †, addi ad quantitatem affectam ſigno —.*

VI.

— *Addi ad †, eſt quantitatem affectam ſigno —, addi ad quantitatem affectam ſigno †.*

VII.

† *Subtrahi à †, eſt quantitatem affectam ſigno †, ſubtrahi à quantitate affecta ſigno †, & contrà.*

VIII.

— *Subtrahi à —, eſt quantitatem affectam ſigno —, ſubtrahi à quantitate affecta ſigno —, & contrà.*

IX.

† *Subtrahi à —, eſt quantitatem affectam ſigno †, ſubtrahi à quantitate affecta ſigno —.*

X.

— *Subtrahi à †, eſt quantitatem affectam ſigno —, ſubtrahi à quantitate affecta ſigno †.*

Sic de multiplicatione, diuiſione ſuo modo &c. Vnde †, duci in †, eſt quantitatem affectam ſigno †, duci in quantitatem affectam ſigno †, ſic de ſigno — &c.

THEO-

THEOREMA I.

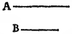
† ad †, additur, & fit †, Hoc eſt plus ad plus additur, & fit plus.

SINT quantitates A, B, ita vt neque A, neque B, ex alia quantitate ſubtrahatur.

Prima Theorematis pars oſtenditur.

Primò autem oſtendendum ſit in additione, † ad †, addi.

Quoniam itaq; neque A, neque B, ex alia ſubtrahitur quantitate; propterea vtraque erit affecta ſigno †, per primum ſuppoſitum; quoniam igitur inſtituenda eſt additio † ad †, ergo etiam quantitatis B, ad quantitatem A, per tertium ſuppoſitum; ſed inſtituendo additionem B, quantitatis affectæ ſigno †, ad A, quantitatem affectam ſigno †, exhibetur, per definitionem additionis, aggregatum ex vtraque quantitate affecta ſigno †; huiuſmodi enim aggregatum comparatur additione B, quantitatis affectę ſigno †, ad A, quantitatem affectam ſigno †, vnde cum eſt inſtituenda additio † ad †, addenda eſt quantitas affecta ſigno †, ad quantitatem affectam ſigno †; atqui hoc eſt addere † ad †, per conuerſum tertij ſuppoſiti, ergo † ad †, in additione additur. Quod erat primum.



Secunda pars demonſtratur

Secundò fieri †, ſic oſtenditur.

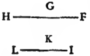
Quoniam igitur † ad †, additur ex demonſtratis; ergo B, quantitas affecta ſigno †, additur ad A, quantitatem affectam ſigno †, per tertium ſuppoſitum; Sed in huiuſmodi additione neutra ipſarum A, B, à quantitate aliqua ſubtrahitur, ergo vtraque erit affecta ſigno †, per primum ſuppoſitum; atque adeò retinendum erit ſignum †. Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA II.

— ad —, additur, & fit —, Hoc eſt minus ad minus additur, & fit minus.

Prima Theorematis pars oſtenditur.

Primò in additione, — ad —, addi ſic oſtenditur.



Sit quantitas G F, ſubtracta ex quantitate H F, vt fiat reſiduum H G, item K I, ex L I, vt fiat reſiduum L K; erit igitur idem addere L I, minus K I, ad H F, minus G F, ac eſt addere reſiduum L K, ad reſiduum H G. Quoniam igitur reſiduum L K, addi debet ad reſiduum H G; ergo fieri debet aggregatum ex vtroque reſiduo ex definitione additionis. Sed huiuſmodi aggregatum comparatur addito L I, ad H F, & ex hoc aggregato ſubtracto aggregato ex K I, & G F; ergo in additione reſidui L K, ad reſiduum H G, fieri debet additio ipſius K I, ad G F; Sed vtraque hæc affecta eſt ſigno —, per ſecundum ſuppoſitum; ergo in additione reſidui ad reſiduum, fit additio quantitatis affectæ ſigno —,

ad

ad quantitatem affectam ſigno —; Sed cum additur quantitas affecta ſigno —, ad quantitatem affectam ſigno —, additur — ad —, per conuerſum quarti ſuppoſiti ergo — ad —, in additione additur. Quod erat primum.

Secundo fieri —, ſic oſtenditur.

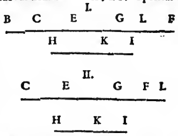
Secundi Theorematis pars demõſtratur.

Quoniam reſiduum L K, additur, ad reſiduum H G, fit igitur aggregatum ex vtroque; Sed aggregatum ex vtroque reſiduo, æquale eſt aggregato ex vtraque H F; L I, minus aggregato ex vtraque K I, G F, & — ad —, per primam huius partem addi debet; ergo facta huiuſmodi additione prouenit —. Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA III.

† ad —, ſubtrahitur, & notatur maius. Hoc eſt plus ad minus ſubtrahitur, & notatur maius.

Sint quantitates E F, H I, quarum illa ſit multata ſegmento G F, vt remaneat E G; Sit autem H I, conſtans ex duobus nominibus H K, K I; Oporteat oſtendere &c.



Primus caſus, & eius demõſtratio.

Supponamus primò G F, maiorem eſſe, quàm K I, & exceſſum eſſe L F; Intelligatur H K, ſeu C E, addita ipſi E G, itemq; K I, ſeu B C. Quandoquidem aggregatum ex E G, H I, æquale eſt aggregato ex E G, H K, K I, huiuſmodi autem aggregato æquale eſt aggregatum ex E G, H K, G L; ergo aggregatum ex E G, H I, æquale erit aggregato ex E G, H K, G L; Sed huiuſmodi aggregatum, æquale eſt aggregato ex H K, E F, minus L F, ergo aggregatum ex E G, H I, æquale erit aggregato ex H K, E F, minus L F; ergo in additione †, ad —, fit ſubtractio, ſubtrahitur enim G L, ex G F, vt habeatur L F.

Quoniam autem aggregatum ex E G, & H I, æquale eſt aggregato ex H K, E F, minus L F; propterea remanet minus. Sed G F, terminus maior, à quo facta fuit ſubtractio, afficiebatur nota —, ſiquidem E G, æquale eſt E F, minus G F; propterea in huiuſmodi ſubtractione facienda, notatur ſignum afficiens maiorem terminum.

Secundi caſus demonſtratio. exceſſus ipſius G L, ſeu K I, ſupra G F.

Supponamus ſecundò K I, maiorem eſſe, quàm G F, & intelligàtur H K, ſeu C E, addita ipſi E G; at verò K I, ſeu G L, addita ipſi G E; ita vt exceſſus, ſit F L. Quandoquidem aggregatum ex E G, & H I, æquale eſt aggregato ex E G, H K, K I; huiuſmodi verò aggregato æquale eſt aggregatum ex E G, H K, G L, ergo aggregatum ex E G, H I, æquale erit aggregato ex E G, H K, G L. Sed aggregatum huiuſmodi æquale eſt aggregato ex E F, H K, F L, ergo aggregatum ex E G, H I, æquale erit aggregato ex H K, E F, F L; Eſt autem F L, differentia inter G F, & K I; fit igitur ſubtractio minoris à maiori.

Quoniam autem aggregatum ex E G, H I, vt vidimus æquale eſt aggregato ex H K, E F, plus F L; propterea huiuſmodi exceſſus F L, geret ſignum additionis, quo quidem afficiebatur etiam K I, cum eſſet pars binomij H I, &c.

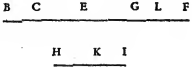
THEO-

THEOREMA IV.

— ad †, ſubtrahitur, & notatur maius; Hoc eſt minus, ad plus ſubtrahitur, & notatur maius.

SINT quantitates E F, H I, ita vt illa diuiſa ſit in G, atque adeo conſtet è duabus partibus E G, G F; at verò H I, ſit quantitas, ex qua ſubtracta ſit K I, vt fiat reſiduum H K. Oſtendendum eſt &c.

Primus caſus eiuſq; demonſtratio.



Supponamus primò quantitatem ſubtractam K I, minorem eſſe ipſa G F.

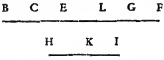
Intelligatur ex G F, ſubtracta L F, quæ ſit æqualis K I, vt remaneat quidem G L, & H I ſeu B E, addita ſit ipſi E F, ad partes E, ea lege, vt ſegmentum C E, puta reſiduum H K, ſit conterminum ipſi E; Quoniam igitur B C, eſt æqualis L F, (eſt enim vtraque æqualis K I), commune autem C L, proinde B L, æquale erit C F, eſt autem C F, aggregatum ex reſiduo C E, & binomio E F, ergo B L, æquale erit C E, vnà cum binomio E F. Sed B L, æquale eſt B E, vna cum E F, detracto tamen L F, ergo quod fit ex C E, & binomio E F, æquale erit B E, vnà cum E F, detracto tamen L F, quare cum additur reſiduum ad binomium, ſi —, afficit terminum minorem, & †, maiorem ad habendum aggregatum ex reſiduo, & binomio, ſubtrahitur minor terminus ex maiori.

Quoniam verò, quod remanet G L, additur ad B G, vt habeatur B L, atq; adeo C F, compoſitum ex reſiduo C E, & binomio E F, propterea prouenit †, quo afficitur maior terminus G F, ergo — ad †, ſubtrahitur, & notatur maius.

Secundi caſus demonſtratio.

Secundò ſupponamus K I, maiorem eſſe, quam G F.

Et hoc ſuppoſito procedatur, non diſſimiliter in contexenda domonſtratione.



Punctum enim L, cadet inter E, G, cùm priùs caderet inter G, F. Demonſtratio igitur conficietur in hac hypotheſi imitatione ſuperioris; Hìc tamen, non ſubtrahitur L F, ex G F, vt priùs, ſed G F, ex L F, vt patet &c. Non eſt igitur cur hìc amplius immoremur; licet enim id Lectoris induſtriæ committere; cum omnia ex dictis facilè conſtare poſſint.

Digitized by Google

Prædictorum Signorum ſubtractio.

THEOREMA I.

† à †, ſubtrahitur, & remanet †, ſuperiori termino exiſtente maiori, alioquin remanet —.

Primus caſus, cum terminus ſuperior eſt maius. Prima Theorematis pars.

SINT duæ quantitates A, B, quarum neutra ex aliqua quantitate ſubtrahatur.

Primò oſtendendum ſit in ſubtractione † à †, ſubtrahi.

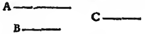
Quandoquidem neque A, neque B, ex aliqua quantitate ſubtrahitur; propterea vtraque erit affecta ſigno †, per primum ſuppoſitum, cum itaque ſit inſtituenda ſubtractio † à †, ergo inſtituenda erit ſubtractio B, quantitatis affectę ſigno †, ab A, quantitate affecta ſigno †, per ſeptimum ſuppoſitum; Sed in huiuſmodi ſubtractione exhibetur differentia inter vtramque quantitatem affectam ſigno †, ergo cum inſtituitur ſubtractio † à †, exhibetur differentia inter vtramque quantitatem A, B, affectam ſigno †, at huiuſmodi differentia comparatur ſubtrahendo B, quantitatem affectam ſigno †, ab A, quantitate affecta ſigno †, vnde cum eſt inſtituenda ſubtractio † à †, ſubtrahenda eſt quantitas affecta ſigno †; ab affecta ſigno †; atqui hoc eſt ſubtrahere † à †, per conuerſum ſeptimi ſuppoſiti; ergo † à †, in ſubtractione ſubtrahitur.



Secũda Theorematis pars.

Secundò fieri †, ſuperiori termino exiſtente maiori ſic oſtenditur,

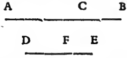
Quoniam igitur † à †, ex demonſtratis in ſubtractione ſubtrahitur, ergo ſubtrahitur quantitas B, affecta ſigno †; à quantitate A, affecta ſigno †, per ſeptimum ſuppoſitum; Sed in huiuſmodi ſubtractione quod remanet à nullo ſabtrahitur, vt ſi remanet C, ſubtractione facta minoris B, à maiori A, ergo quod remanet C, erit affectum ſigno †, per primum ſuppoſitum; atque adeo retinendum erit ſignum †.



Si terminus autem ſuperior fuerit minor, quod remanet affici ſigno —, ſic oſtenditur,

Secũdus caſus quando terminus ſuperior eſt minor. Prima pars.

Sint quantitates A C, D F, illi quidem addita ſit C B, huic autem F E, ea lege, vt F E, ſit maior C B; Quoniam igitur ſubtrahere oportet † à †, ſubtrahere oportebit quantitatem F E, affectam ſigno † a quantitate C B, affecta ſigno †. Subtrahere nunc autem quantitatem F E, à quantitate C B, idem eſt quod ſubtrahere quantitatem D F, plus quantitate E F, à quantitate A C, plus quantitate C B, at cum ſubtrahitur C B, à quantitate F E, & quantitatas D F, à quantitate A C, ſubtrahimus quantitatem D F, plus quantitate F E, a quantitate A C, plus quantitate B C, ergo cum ſubtrahimus † à †, ſuperiori termino exiſtente minori fit ſubtractio.



Secunda pars.

Fieri autem ſignum —, ſic demonſtratur.

Quoniam

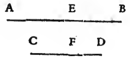
Quoniam nunc idem eſt ſubtrahere F E, ex C B, ac eſt ſubducere D F, plus F E, ex A C, plus B C, in huiuſmodi autem ſubtractione differentia inter C B, & F E, ſubducitur à differentia inter A C, D F, hoc eſt remanet differentia inter A C, D F, minus differentia inter C B, F E, ergo in ſubtractione F E, ex C B, hoc eſt † à †, (intelliguntur enim ipſę affectæ ſigno †,) reſiduum prouenit affectum ſigno —. Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA II.

— à —, ſubtrahitur, & remanet —, ſuperiori termino exiſtente maiori, alioquin remanet †.

PRimò in ſubtractione — à —, ſubtrahi ſic oſtenditur. *Primus caſus, Prima Theorematis pars*

Intelligantur duæ quantitates A B, C D; ita vt illa diuiſa ſit in E, hæc autem in F, ea lege vt F D, ſit minor quàm E B, & oporteat ſubducere C D, minus F D, hoc eſt C F, ex A B, minus E B, hoc eſt ex A E. Quoniam igitur ſubtrahere — à —, idem eſt, quod ſubtrahere quantitatem affectam ſigno —, à quantitate affecta ſigno —, vtraque autem quantitas F D; E B, affecta eſt ſigno —; proinde idem erit ſubtrahere — à —, ac ſubtrahere F D, affectam ſigno —, ab E B, affecta ſigno —. At ſubtrahere — F D, ex — E B, idem eſt quod ſubtrahere C D, minus F D, ex A B, minus E B; hoc eſt ſubtrahere reſiduum C F, à reſiduo A E; at vt reſiduum C F, ſubtrahatur à reſiduo A E, exhiberi debet differentia inter vtrumque per definitionem ſubtractionis; huiuſmodi verò differentia comparatur, ſubtrahendo F D, ex E B, & reſiduum ſubducendo ex eo, quod remanet, ſubtracto C D, ex A B; ergo in ſubtractione reſidui C F, à reſiduo A E, fieri debet ſubtractio ipſius F D, ex E B;



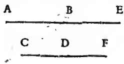
Sed vtraque hæc affecta eſt ſigno —, per ſecundum ſuppoſitum; ergo in ſubtractione reſidui à reſiduo fit ſubtractio quantitatis affectæ ſigno —, à quantitate affecta ſigno —, ſed cum ſubtrahitur quantitas affecta ſigno —, à quantitate affecta ſigno —; ſubtrahitur — à —, per conuerſum octaui ſuppoſiti, ergo — à — in ſubtractione ſubtrahitur. Quod erat primum.

Secuudò fieri —, ſuperiori termino exiſtente maiori ſic oſtenditur. *Secunda pars.*

Quoniam reſiduum C F, ſubtrahitur à reſiduo A E, exhibetur igitur eorum differentia; ſed huiuſmodi differentia æqualis eſt differentiæ inter A B, C D, minus differentia inter F D, E B, & — à —, per primam huius partem ſubtrahi debet, ergo facta huiuſmodi ſubtractione prouenit —. Quod oportebat oſtendere.

Si verò ſuperior terminus extiterit minor remanere ſignum †, ſic demonſtratur. *Secũdus caſus Prima pars.*

Sint quantitates A E, C F, diuiſæ quidem in B, & D, ita vt D F, ſit maior quam B E; at verò C D, neceſſariò debet eſſe non maior quam A B, aliàs caſus eſſet impoſſibilis.



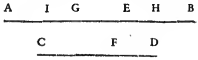
Quoniam igitur idem eſt ſubtrahere — à —, ac eſt ſubducere quantitatem affectam ſigno —, à quantitate affecta ſigno —; propterea idem erit ſubtrahe-

re — à —, ac ſubducere D F, quantitatem affectam ſigno —, abs B E, quantitate affecta ſigno —. Subducere autem — D F, ex — B E, idem eſt quod ſubtrahere C F, minus D F, hoc eſt C D, ex A E, minus B E, hoc eſt ex A B; ergo idem erit ſubtrahere — D F, ex — B E, ac eſt ſubducere C F, minus D F, hoc eſt C D, ex A E, minus B E, hoc eſt ex A B; Sed ſubtrahere C D, ex A B, idem eſt, ac ſubtrahere B E, ex D F, & reſiduum addere ei, quod remanet facta ſubtractione ipſius C D, ex A B, ergo idem erit ſubtrahere — D F, ex — B E, ac eſt ſubducere B E, ex D F, at reſiduum addere ei, quod remenet facta ſubtractione ipſius C D, ex A B, & in huiuſmodi ſubtractione — à —, fit ſubductio, vt conſtat ex demonſtratis, ergo quod ex ſubtractione — à —, remanet ſuperiori termino exiſtente minori, afficitur ſigno †; Id autem erat operæ pretium oſtendere.

Aliter.

Ijſdem poſitis.

Aliter eadem oſtenduntur. Primus caſus. Quoniam igitur ſubtrahere oportet C D, minus F D, ex A B, minus E B, eſtq; C D, minus F D, idem quod C F, & A B, minus E B, *Prima pars.* idem quod A E, propterea ſubtrahere C D, minus F D, ex A B, minus E B, idem erit, quod ſubtrahere C F, ex A E. Subtrahatur C D, ex A B, & remaneat A G, deinde ſubtrahatur F D, ex E B, & remaneat H B.



Quandoquidem ſubtracta eſt C D, ex A B, & remanſit A G, erit A G, exceſſus, quo A B, ſuperat C D; & quia F D, ſubtracta eſt ex E B, ita vt remanſerit H B, erit H B, exceſſus, quo E B, ſuperat F D; ſubtrahatur H B, ex A G, & remaneat A I;

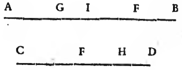
Quoniam igitur H B, ſeu I G, eſt exceſſus, quo E B, ſuperat E H, & A G, eſt exceſſus quo A B, ſuperat G B, eſtq; A I, differentia iſtorum exceſſuum, cùm ſit exceſſus, quo A G, ſuperat I G, ſeu H B, & eadem eſt exceſſus, quo A B, minus E B, hoc eſt A E, ſuperat I H, minus E H, hoc eſt I E, atque adeo C D, minus *2. Ex elemẽtis.* F D, hoc eſt C F, (eſt enim I H, æqualis G B, atque adeo C D, & E H, eſt æqualis F D,) propterea vt habeatur H B, pro indaganda A I, in hac operatione oportet ſubtrahere E H, ex E B, hoc eſt F D, ex E B, &c. ergo in ſubtractione — à —, nimirum — F D, ex — E B, fit ſubtractio.

Secunda pars. Remanere autem ſignum —, ſuperiori termino exiſtente maiori facilè conſtat.

Siquidem H B, exceſſus, quo E B, ſuperat F D, in huiuſmodi operatione, qua — F D, ſubtrahitur ex — E B, ſubducitur ex A G, vnde afficitur ſigno —.

Si verò ſuperior terminus extiterit minor remanere ſignum †, ſic oſtenditur.

Secũdus caſus Quoniam igitur ſubtrahere oportet C D, minus F D, ex A B, minus E B, eſtq; C D, minus F D, idem quod C F, & A B, minus E B, idem quod A E, A E; propterea idem erit ſubtrahere C D, minus F *Prima pars.* D, ex A B, minus E B, ac eſt ſubducere C F, ex A E. Subtrahatur autem C F, ex A E, & remaneat A I, ſubducatur verò E B, ex F D, & remaneat H D, ſubtrahatur denique C D, ex A B, & remaneat A G.



Quandoquidem ſubtracta eſt C F, ex A E, & remanſit A I, erit A I, exceſſus, quo A E, ſuperat C F, eſtque ſubducta E B, ex F D, vt remanſerit H D, erit H D, exceſſus, quo F D, ſuperat E B; denique quoniam C D, ſubtracta eſt ex A B,

ita

ita vt remanſerit A G, erit A G, exceſſus, quo A B, ſuperat C D. Quoniam igitur I E, eſt æqualis C F, & E B, eſt æqualis F H, ergo I B, æquabitur C H: ſed G B, erat æqualis C D, ablatis æqualibus I B, C H, remanebit G I, æqualis H D; at verò A G, exceſſus ipſius A B, ſupra C D, additur G I, exceſſui, quo F D, ſuperat E B, facitq; A I, exceſſum, quo A E, ſuperat C F, ergo in ſubtractione — à —, ſuperiori termino exiſtente minori fit additio.

Fieri autem ſignum †, facilè conſtat.

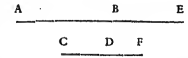
Siquidem G I, exceſſus, quo F D, ſuperat E B, additur ad A G; atque adeo afficitur ſigno †. Quod erat nobis iniunctum oſtendere. *Secunda pars.*

THEOREMA III.

† à —, additur, & remanet —. Hoc eſt plus ab eo, quod eſt minus additur, & remanet minus.

SINT quantitates A E, C D, & illa quidem diuiſa in B, huic verò addita ſit D F. Vel ſi mauis. *Theorematis demonſtratio. Prima demõſtrationis pars*

Sint duæ quantitates A E, D F, illa quidem diuiſa in B, hæc autem indiuiſa; & quoniam A E, diuiſa eſt in B, ipſa B E, cum ſubtrahatur ex A E, intelligetur affecta ſigno —; at verò D F, cum à nulla ſubtrahi intelligatur erit affecta ſigno †.



Quandoquidem idem eſt ſubtrahere † à —, ac eſt ſubducere quantitatem affectam ſigno †, à quantitate affecta ſigno —, at verò D F, afficitur †, & B E, afficitur —, ergo idem erit ſubducere †, ex —, ac ſubtrahere D F, quantitatem affectam ſigno †, à quantitate B E, affecta ſigno —. Sed idem eſt ſubtrahera † D F, ex — B E, ac eſt ſubtrahere D F, ex A E, minus B E, hoc eſt ex A B, & hoc idem eſt ac ſubducere D F, plus B E, ex A E, ergo † à —, in ſubtractione additur. *Secunda pars.*

Remanere autem ſignum —, ſic demonſtratur.

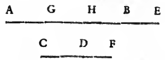
Quandoquidem D F, plus B E, ſubtrahi debet, vt diximus, ex A B, vt proueniat reſiduum ipſtus † D F, ſubtracti ex A E, minus B E, & in huiuſmodi ſubtractione fieri debet additio ipſius D F, ad B E; propterea hoc aggregatum afficietur ſigno —, vtpote ſubtractum. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Aliter.

Iiſdem poſitis. *Aliter idem oſtenditur.*

Sint quantitates A E, C D, illa quidem diuiſa in B, huic autem addita ſit D F. Vel ſi mauis. Sint quantitates A E, D F, illa quidem diuiſa in B, hæc autem indiuiſa &c. Quoniam A E, diuiſa eſt in B, ipſa verò B E, cum ſubtrahatur ex A E, intelligetur affecta ſigno —, at verò D F, cum à nulla ſubtrahi intelligatur erit affecta ſigno †. *Prima pars. Prima demõſtrationis pars in prima hypotheſi.*

Quoniam igitur idem eſt ſubtrahere C D, plus D F, ex A E, minus B E, ac eſt ſubtrahere C D, plus D F, ex A B, ſubtrahatur C F, ex A E, & remaneat G H, plus B E, ita vt A G, plus H B, ſit æqualis C F. Intelligatur addita D F, ad B E, vt fiat H E, & intelligatur ſubtracta C D, ex A E, vt remaneat



G E. Quoniam igitur D F, addita ad B E, facit H E, & C D, ı propterea A G, plus H B, æquatur C F, itaq; addita D F, ad B E, & hoc ſubtracto ex aggregato G E; quod nempe remanet ſubtracta C D, ex A E, fit reſiduum G H. At hoc eſt reſiduum, quod remanet ſubtracta C F, ex A B, nam H B, eſt æqualis D F, & C D, eſt æqualis A G, & B E, afficitur —, vt D F, ſeu H B, afficitur †; proinde † à —, additur.

Secunda pars. Fieri autem —, inde patet, quia huiuſmodi aggregatum H E, ſubtrahitur ex G E, vt innoteſcat G H, quare afficitur —.

Demonſtratio in ſecunda hypotheſi. Si verò fuerit ſola D F, ſine C D, ſic ratiocinabimur.

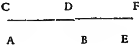
Demonſtrationis primæ pars. Quoniam idem eſt ſubtrahere † a —, ac quantitatem affectam ſigno †, à quantitate affecta ſigno —; propterea ſubducere † D F, à — B E, idem eſt ac ſubtrahere † à —; Sed illud nihil eſt aliud, quàm ſubducere † D F, ab A E, minus B E, hoc eſt ab A B; addatur igitur D F, ad B E, vt fiat H E, quo ſubtracto ex A E, remanebit A H; hoc autem cum ſit ſubducere D F, ex A E, minus B E, & B E, afficitur —, vt D F, afficitur †, additurque D F, ad B E, vt diximus; Ob id † à —, in ſubtractione additur.

Secunda pars. Fieri autem ſignum —, facilè conſtat, eò quod aggregatum ex H B, & B E, hoc eſt H E, ſubtrahitur ex A E; atque adeò afficitur —. Quod oportebat &c.

THEOREMA IV.

— à †, additur, & remanet †; Hoc eſt minus, ab eo quod eſt plus, remanet plus.

Theorematis demonſtratio. SINT quantitates A E, C D, ita vt illa ſit diuiſa in B, & huic addita ſit D F; Vel ſi mauis. Sint duæ quantitates A E, D F, illa quidem diuiſa in B, hæc autem indiuiſa. Et quoniam A E, diuiſa eſt in B, ipſa B E, cum ſubtrahatur ex A E, intelligatur affecta ſigno —; at verò D F, cum à nulla ſubtrahi intelligatur, erit affecta ſigno †.



Quandoquidem idem eſt ſubtrahere — à †, ac ſubducere quãtitatẽ affectam ſigno —, à quantitate affecta ſigno †, & D F, afficitur †, vt B E, afficitur —; ergo idem erit ſubducere — à †, ac ſubtrahere B E, quantitatem affectam ſigno —, ab ipſa D F, quantitate affecta ſigno †; Sed idem eſt ſubtrahere — B E, ex † D F, ac eſt ſubducere A E, minus B E, hoc eſt A B, ex ipſo † D F, & hoc idem eſt, ac addere B E, ad D F, & aggregatum addere reſiduo, quod prouenit, ſubtracta A E, ex eo, cum quo connectitur D F, ergo cum — à †, ſubtrahitur, fieri debet additio.

Remanere autem †, ſic oſtenditur.

Secunda pars. Quandoquidem B E, plus D F, addi debet ad id, quod prouenit, ſubtracta A E; ex eo, cui annectitur D F, illud reſiduum vel erit .o. vnde aggregatum cum à nullo ſubtrahatur, afficitur ſigno †; vel erit quantitas, cum qua aggregatum ipſum binomium faciet, atque adeo afficietur ſigno †.

Intellige hanc additionem fieri iuxta exigentiam ſignorum ✤, & —. Vnde ſi D F, connectitur cum o, facta ſubtractione, ipſa A E, afficietur ſigno —, ita tamen, vt facta iam dicta additione, aggregatum ipſum ſit affectum ſigno †, cum ſubtractio poſſibilis fuerit.

THEO-

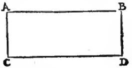
Digitized by Google

Eorundem Signorum multiplicatio.

THEOREMA I.

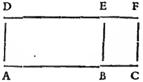
† in †, facit †, Hoc eſt plus ductum in plus, facit plus.

SINT quantitates A C, C D, quarum neutra ſubtracta ſit ab alia, & mutua multiplicatione producant A B D C. Oſtendendum ſit ex † in †, fieri †. *Demonſtratio ſine binomij vſu.* Quandoquidem neutra ipſarum eſt ſubtracta ab alia, ergo, vtraque erit affecta ſigno †. Et quia per mutuam multiplicationem, producitur A B D C, à nulla quantitate ſubtractum, illud quidem erit etiam affectum ſigno †. Ductum igitur † in †, facit †.



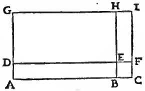
Hoc idem fortaſſe luculentius intelligetur binomio adhibito.

Sumatur binomium, puta A C, conſtans è duobus nominibus, A B, B C, erit igitur B C, affecta ſigno †, quandoquidem A C, eſt A B, plus B C, ſi ducatur autem A C, in A D, affectam ſigno †, cum à nulla quantitate ſit ſubtracta, prouenit A D F C, hoc eſt A D E B, plus B E F C, quamobrem productum ex B C, affecta ſigno †, in A D, ſeu B E, affectam ſigno †, erit ſigno †, affectum, ergo ex † in †, fit †. *Demonſtratio cum vnius binomij vſu.*



Et melius adhibendo duo binomia. Sit igitur A C, conſtans ex A B, B C, & C I, conſtans ex C F, F I. Igitur B C, eſt affecta ſigno †, vt F I, eodem ſigno affecta erit.

Ducta verò A C, in C I, producat A I, hoc eſt A D E B, plus D G H E, plus B E F C, plus E H I F, quamobrem productum affectum erit ſigno †; Nam E F, ſeu B C, affecta ſigno †, ducta in F I, affectam ſigno †, producit ipſum E H I F; Sic etiam de alijs productis, quemadmodum perſpicuum eſt conſideranti; propterea †, ductum in †, producit †. Quod erat operæ pretium oſtendere. *Demonſtratio duobus binomijs adhibitis.*

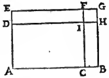


THEOREMA II.

— in —, ductum facit †; Hoc eſt minus, ductum in minus; facit plus.

Demonſtratio

HOC ita oſtenditur. Sint quantitates A B, B G, itaut ex A B, ſubtrahatur C B, & ex B G, ſubtrahatur H G, vnde reſidua ſint A C, B H. At verò A B, minus C B, ducta in B G, minus H G, facit A E G B, plus I F G H, minus duobus C F G B, & D E G H. Siquidem A B, minus C B, eſt A C, & B G, minus H G, eſt B H, ſeu C I. At ex A C, in C I, fit A D I C, cui æquale eſt A E G B, plus I F G H, minus C F G B, & D E G H.



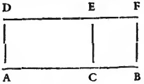
Sed C B, afficitur ſigno —, & H G, itidem ſigno —, ex quorum multiplicatione fit I F G H, ergo ex — in —, fit †. Quod erat operæ pretium oſtendere.

THEOREMA III.

† in —, facit —. Hoc eſt plus in minus, facit minus.

Demonſtratio

HOC ita demonſtratur. Sint quantitates A B, B F, & quidem ex A B, intelligatur ſubtracta C B, quæ propterea affecta erit ſigno —. At verò B F, vtpote à nulla quantitate ſubtracta erit affecta ſigno †.



a. Ex elemẽtis.

Ducta verò B F, in A B, minus C B, facit [a] A D F B, minus C E F B, producto ex C B, in B F; Proinde ex B F, affecta ſigno †, in C B, affectam ſigno —, fit C E F B, affectum ſigno —, fit enim C E F B, ſubtrahendum ex A D F B, vt habeatur A D E C, ex multiplicatione ipſius B F, in — C B. Quod nobis erat iniunctum demonſtrare.

THEO-

THEOREMA IV.

— in †, facit —; Hoc eſt minus in plus, facit minus.
Hoc autem facillimè conſtat ex antecedenti.

Prædictorum Signorum Diuiſio.

AD diuiſionem quod attinet nil addendum ſupereſt, opponitur ſiquidem ipſi multiplicationi; quamobrem demonſtratis operationibus ad multiplicationem pertinentibus, quæ ad diuiſionem, ſiue applicationem ſpectant ignorari non poſſunt. *Nihil de Diuiſione dicendum ſupereſt.*

Hæc viſa ſunt nobis adijcienda, vt operationes, quas exercet Analyſta in tractandis ſignis †, & —, confirmarentur.

Supereſt modo, vt quædam afferamus, vnde ſuppetit Artifici, maximum adiumentum ad ænigmata enodanda, ſeu Problemata reſoluenda; idque ſequenti capite præſtabimus. Interim de hoc te monitum volo benigne Lector, nimirum præcepta ſuperius tradita, & quæ ſubſequuntur, diligenter eſſe memoriæ mandanda, & vſu, ac exercitatione curandum, vt reſoluendi facilitas compareturſ Nemo enim, tametſi optime calluerit, quæ tradita ſunt, experietur facilitatem, atque promptitudinem in operando, niſi ſe plurimum, eiuſque exercuerit in variorum Problematum reſolutionibus. Mirum eſt enim, quantum Tyrones in his operationibus perficiendis, allucinentur; Id verò prouenit, quoniam oportet fræquenter operatum fuiſſe, vt denique familiaria præcepta euaſerint, vt ſine errore, quæ præcipiuntur, exerci commodè poſſint; non ſecus ac in Dialectica contingit, quam non ſatis eſt, aſſecutum fuiſſe, ad expedite definiendum, diuidendum, argumentandum, ſed vſu quodam eſt opus, quo facilitatem acquirimus in operando; Id quod in cauſa fuit, vt mira ſubtilitate, quidam Scholaſtici duplicem ratiocinandi artem recognouerint; quarum vnam docentem, alteram autem vtentem dixerunt. Sed de his hactenus, alibi enim, cùm Philoſophica tractabimus hac de re ſermo redibit; non enim hic locus eſt ad tractandum argumentum idoneus; quomodocunque enim ſe ſe res habeat, nihil refert, dummodo ſit illud exploratum, quod à nobis paulo antea dictum fuit. *Exercitatio, atq; vſus ad acuitatem comparandã requiritur.*

Alibi diſputandum de Scholaſticorum ſententia quantum ad bipartitam hanc Dialecticæ vſurpationem.

Atque adeò vniuerſim de duplici habitu, quorum vnus dicatur docens, alter verò vtens; hìc ſit relictus ex actibus, quibus hìc, & nunc operamur; ille ex actibus quibus qualiter ſit operandum docemur. *Non eſt huius loci de duplici habitu, nempe vtente docenteq; diſſerere.*

De

Digitized by Google

De ijs, quæ multùm ad ænigmata reſoluenda conducunt.

CAPVT XXX.

Poſitio maximè ad reſoluenda Problemata conducit.

POSITIONEM in ænigmatibus enodendis plurimum negotij faceſſere Analiſtæ nemo quamuis in hoc puluere mediocriter verſatus non cognoſcit; non erit igitur abs re, nonnulla hoc loco afferre, quæ maximè ad poſitionem inſtituendam conducunt, hæc autem ſunt, quæ deducuntur ex nonnullis quæſtionibus Diophanti, è quibus nimirum Canones eliciuntur; vt factum fuit à Xilandro, Bombellio, & Baehetto: non attulimus Canones ſeparatim ab exemplis; Sed ſtatim exempla aggreſſi, Regulas explicamus breuitati ſtudentes; eadem enim hìc à nobis allata apud commemoratos ſcriptores videnda copioſius pertractata relinquimus. Præter quamquod quiſq; proprio marte facilè omnia reperiet.

Regula I. Regula prima. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna ſuperet alteram vnitatibus 16.

Subtrahantur 16, ex 1 R, & remanebit 1 R — 16, hoc autem reſiduum diuidatur bifariam; eius verò dimidium eſt $\frac{1}{2}$ R — 8, hoc dimidium eſt minor pars. Vt autem maiorem ipſam aſſequamur; eidem $\frac{1}{2}$ R — 8, addantur 16, & fit $\frac{1}{2}$ R † 8, pars maior.

Regula II. Regula ſecunda. Diuidere 16, in duas partes, vt maior ſuperet minorem hoc exceſſu, 1 R.

Subtrahatur 1 R, ex 16, vt remanet 16 — 1 R; hoc autem reſiduum diuidatur in duas partes æquales, fitque dimidium 8 — $\frac{1}{2}$ R, & eſt pars minor. Pars autem maior habetur, ſi ipſi 8 — $\frac{1}{2}$ R, addatur 1 R, & fit 8 † $\frac{1}{2}$ R.

Regula III. Regula tertia. Reperire numerum, quo ſubtracto ex 1 R, remaneat 16.

Auferantur 16, ex 1 R, vt remaneat 1 R — 16, pro numero quæſito.

Regula IV. Regula quarta. Reperire numerum; qui ductus in 16, faciat 1 R.

Diuidatur 1 R, per 16, vt fiat quotiens $\frac{1\,R}{16}$, pro numero quæſito; hìc enim ductus in 16, facit 1 R, eodem modo ſi oporteret diuidere 1 Q, 1 C, &c.

Regula V. Regula quinta. Numerum reperire, quo diuiſo per 1 R, remaneat 16.

Ducatur 1 R, in 16, & fiet 16 R, & eſt numerus quæſitus.

Regula VI. Regula Sexta. Duos numeros reperire in ratione, vt 2, ad 5, & vt eorum ſumma ſit 1 R † 7.

Numeri propoſiti 2, & 5, in vnam ſummam colligantur, vt fiat 7; per hunc autem numerum diuidatur 1 R † 7, vt proueniat $\frac{1}{7}$ R † 1, hæc autem ſumma ducatur in 2, & 5, fit $\frac{2}{7}$ R † 2, & $\frac{5}{7}$ R † 5; & hi numeri ſunt quæſiti.

Regula VII. Regula ſeptima. Datis duobus terminis 5 † 1 R, & 2 R, alios duos reperire in eadem ratione, & vt eorum ſumma ſit 6.

Ad 5 † 1 R, addantur 2 R, vt fiat ſumma 5 † 3 R, per quam diuidatur 6, vt fiat $\frac{6}{5 \dagger 3\,R}$, hæc autem fractio ducatur in 5 † 1 R, & 2 R, vt fiant $\frac{30 \dagger 6\,R}{5 \dagger 3\,R}$, & $\frac{12\,R}{5 \dagger 3\,R}$; hi ſiquidem numeri ſunt in propoſita ratione, ſimulque iuncti, conficiunt 6.

Regula VIII. Regula octaua. Datis duobus terminis 5 † 1 R, & 2 R, alios duos in eadem ratione reperire, ita vt eorum differentia ſit 6.

Sumatur ipſorum terminorum differentia, per quam diuidatur datus numerus 6; quotiens autem ducatur in datos terminos: Sic enim orientur numeri, ſeu termini quæſiti.

Regula IX. Regula nona. Duos numeros adinuenire, vt eorum exceſſus ſit 16, ſubtractoque

que minoris quadrato, à quadrato maioris remaneat 1 R.

Diuidatur 1 R, per 32, duplum ipſius 16, & fit quotiens $\frac{1}{32}$ R, ab hoc ſubtsahatur 8, dimidium dati numeri 16, & remanebit $\frac{1}{32}$ R — 8, pro minori parte, maior autem erit $\frac{1}{32}$ R † 8.

Regula decima. Diuidere 1 R † 6, in duas partes, ea lege, vt ab vna ſubtracto dimidio, & ab altera ſubtracta tertia parte, reſidua ſint inter ſe æqualia. *Regula X.*

Addantur ad inuicem $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & fiet $\frac{5}{6}$, ſubductis de 2, remanet 1 $\frac{1}{6}$, & hoc ſeruetur. Sumatur dimidium ipſius 1 R † 6, vel tertia pars, & remanet $\frac{1}{2}$ R † 3, hoc diuidatur per 1 $\frac{1}{6}$, & prouenier $\frac{3}{7}$ R † 2 $\frac{4}{7}$, eritq; pars vna, altera verò erit $\frac{4}{7}$ R † 3 $\frac{3}{7}$.

Regula decimaprima. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna ducta in alteram faciat $\frac{1C}{120 † 2R}$. *Regula XI.*

Sumatur dimidium numeri radicum, nempe $\frac{1}{2}$ R, eius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ Q. Ab hoc ſubtrahatur $\frac{1C}{120 † 2R}$ numerus, quem facere debent, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — $\frac{1C}{120 † 2R}$, facta autem ſubtractione, remanet $\frac{120 Q - 2C}{480 † 8R}$; & pars vna erir ℞ ($\frac{120 Q - 2C}{480 † 8R}$), altera autem $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{120 Q - 2C}{480 † 8R}$).

Regula decimaſeconda. Diuidere 120 — 1 R, in duas partes, vt inter ſe ductæ faciant, $\frac{1C}{120 † 2R}$. *Regula XII.*

Sumatur dimidium ipſius 120 — 1 R, & eſt 60 — $\frac{1}{2}$ R, cuius quad[...]
1600 — 60 R † $\frac{1}{4}$ Q, quo ſubtracto numero efficiendo $\frac{1C}{120 † 2R}$, r[...]
— 90 Q — $\frac{1}{2}$ C, $\frac{1C}{120 † 2R}$, ſubtrahatur ex $\frac{3600 - 60 R † \frac{1}{4} Q}{1}$, r[...]
— 90 Q — $\frac{1}{2}$ C.

$$\frac{1\,C}{120 + 2\,R} \times \frac{3600 - 60\,R + \frac{1}{4}\,Q}{1}$$

7200 R — 120 Q ✠ $\frac{1}{2}$ C
432000 — 7200 R ✠ 30 Q

432000 — 90 Q ✠ $\frac{1}{2}$ C
Subtrahatur 1 C

Remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C

Quamobrem remanebit $\frac{432000 - 90 Q - \frac{1}{2} C}{120 † 2 R}$. Huius radix quadrata eſt ℞ Q $\left(\frac{432000 - 90 Q - \frac{1}{2} C}{120 † 2 R}\right)$. Hoc verò addatur, & ſubtrahatur dimidio illi 60 — $\frac{1}{2}$ R, & fit 60 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ Q $\left(\frac{432000 - 90 Q - \frac{1}{2} C}{120 † 2 R}\right)$ pars vna, pars autem altera erit 60 — $\frac{1}{2}$ R ✠ ℞ Q $\left(\frac{432000 - 90 - \frac{1}{2} C}{120 † 2 R}\right)$.

Regula decimatertia. Diuidere 16 ✠ 1 R, in duas partes, adeò vt inter ſe ductę producant 40. *Regula XIII.*

Sumatur

8 — ½ R ✣ ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
8 — ½ R — ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
―――――――――――――――
8 — ½ R ✣ ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
8 — ½ R ✣ ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
―――――――――――――――
℞ (800 R — 2304 — 89 Q ✣ 4 C — 1/16 QQ) ✣ 8 R — ¼ Q — 36
64 — 8 R ✣ ¼ Q ✣ ℞ (800 R — 2304 — 89 Q ✣ 4 C — 1/16 QQ)
―――――――――――――――
28

8 — ½ R — ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
8 — ½ R — ℞ (8 R — ¼ Q — 36)
―――――――――――――――
— ℞ (800 R — 2304 — 89 Q ✣ 4 C — 1/16 QQ) ✣ 8 R ¼ Q — 36
64 — 8 R ✣ ¼ Q — ℞ (800 R — 2304 — 89 Q ✣ 4 C — 1/16 QQ)
―――――――――――――――
28

Vides igitur ſupradictas partes, quæſtioni ſatisfacere.

Regula decimaquinta. Diuidere 16, in duas partes, ita vt earum quadrata ſimul iuncta faciant 256 — 2 R. *Regula XV.*

Sumantur 256, quadratum numeri diuidendi, & ab his ſubtrahantur 256 — 2 R, remanent 2 R, quibus diuiſis per 2, fit quotiens 1 R; qua ſubtracta de 64, quadrato ex 8, dimidio numeri 16, remanet 64 — 1 R; at verò ℞ (64 — 1 R), addatur ad 8, vt fiat 8 ✣ ℞ (64 — 1 R), & hæc eſt pars vna; altera erit 8 — R (64 — 1 R).

Regula decimaſexta. Diuidere 16 ✣ 2 R, in duas partes, ea lege, vt vna in aliam ducta tantum faciat, quantum dictarum partium differentia, ducta in 18. *Regula XVI.*

Sumatur 8 ✣ 1 R, dimidium propoſitę quantitatis, addaturque ad 18, & fit 26 † 1 R, huius quadratum eſt 676 † 52 R † 1 Q, ab hoc autem quadrato ſubtrahatur 288 † 36 R, productum ex 16 † 2 R, in 18, & remanet 388 † 16 R † 1 Q; huius latus eſt ℞ (388 † 16 R † 1 Q), quod eſt ſubtrahendum à 26 † 1 R, & reſiduum 26 † 1 R — ℞ (388 † 16 R † 1 Q), eſt pars vna; qua ſubtracta ex 16 † 2 R, remanet ℞ (388 † 16 R † 1 Q) † 1 R — 10, pro altera parte.

```
                    26 † 1 R
                    26 † 1 R
                  ─────────────
                    26 R † 1 Q
               676 † 26 R
               ─────────────────
               676 † 52 R † 1 Q
               288 † 36 R
               ─────────────────
               388 † 16 R † 1 Q
          ℞ ( 388 † 16 R † 1 Q)
26 † 1 R — ℞ ( 388 † 16 R † 1 Q)
──────────────────────────────────
                16 † 2 R
                   18
               ────────────
               288 † 36 R
```

Regula XVII. Regula decimaſeptima. Diuidere 12, in duas partes, vt earum quadrata ſimul iuncta, tantum faciant, quantum faciunt inter ſe multiplicata additis 3 R, ad productum.

A 144, quadrato propoſiti numeri 12, ſubtrahantur 3 R, vt fiat reſiduum 144 — 3 R, diuidatur per 3, & fit quotiens 48 — 1 R, hoc autem ſubtracto ex 36, quarta parte numeri 144, quadrati ex 12, remanet 1 R — 12; eius autem latus ℞ (1 R — 12), quo ſubtracto ex 6, dimidio numeri 12, remanet 6 — ℞ (1 R — 12), & eſt pars vna; altera verò erit 6 † ℞ (1 R — 12).

Regula XVIII. Regula decimaoctaua. Diuidere 16 ✠ 2 R, ſecundùm extremam, & mediam rationem.

Sumatur 256 — 64 R ✠ 4 Q, quadratum propoſitæ quantitatis, & huic addatur 64 ✠ 16 R ✠ 1 Q, quadratum dimidij, propoſitæ quantitatis, & fit 320 ✠ 80 R ✠ 5 Q; huius ℞ eſt ℞ 320 ✠ ℞ 5 R, à qua ſubtracto 8 ✠ 1 R, dimidio propoſitæ quantitatis remanebit ℞ 320 — 8 ✠ ℞ 5 R — 1 R, pro vna parte; alia verò erit 24 — ℞ 320 ✠ 1 R — ℞ 5 R.

Regula XIX. Regula decimanona. Diuidere 16 ✠ 2 R, in tres partes continuè proportionales, ea lege, vt earum quadrata ſimul iuncta faciant 256.

Sumatur 256 ✠ 64 R ✠ 4 Q, quadratum ipſius 16 ✠ 2 R; à quo ſubtracto 256, remanet 64 R ✠ 4 Q; hoc autem reſiduum diuidatur per 32 ✠ 4 R, duplum dati numeri diuidendi, & fit quotiens $\frac{64\,R \dagger 4\,Q}{32 \dagger 4\,R}$, & eſt pars ſecunda. Partes reliquæ habentur, ſi iam inuenta ſubtrahatur ex 16 ✠ 2 R, reſiduum verò diuidatur in duas partes, quæ inter ſe ductæ faciant quadratum ex $\frac{64\,R \dagger 4\,Q}{32 \dagger 4\,R}$.

Nempe ſumatur dimidium reſidui, & ab eius quadrato ſubtrahatur quadratum huius $\frac{64\,R \dagger 4\,Q}{32 \dagger 4\,R}$, & ex reſiduo eruatur radix, quæ ſubtracta ipſimet dimidio relinquit primam, minoremque partem ex tribus quæſitis, & addita exhibet tertiam, & majorem.

Regula XX. Regula vigeſima. Diuidere $1\frac{1}{2}$ R ✠ 34, in duas partes, ea lege; vt ſi vni ipſarum addantur 92, fiat triplum alterius.

Adde

	16 + 2 R
	16 + 2 R
8 + 1 R	32 R + 2 Q
8 + 1 R	256 + 32 R
8 R + 1 Q	256 + 64 R + 4 Q
64 + 8 R	64 + 16 R + 1 Q
64 + 16 R + 1 Q	320 + 80 R + 5 Q

℞ 320 + ℞ 5 R
8 + 1 R

Pars vna ℞ 320 — 8 + ℞ 5 R — 1 R
16 + 2 R
℞ 320 — 8 + R 5 — 1 R

Pars altera 24 — ℞ 320 + 1 R — ℞ 5 R

Adde ipſis 1 $\frac{1}{3}$ R † 34, numerum 92, & fit 1 $\frac{1}{3}$ R † 126, quo diuiſo per 4, numerum vno amplius, quam danominator 3, fit quotiens $\frac{1}{3}$ R † 31 $\frac{1}{2}$; hic numerus ſi ſubtrahatur ipſi 1 $\frac{1}{3}$ R † 34, remanebit 1 $\frac{1}{3}$ R † 2 $\frac{1}{2}$; huic enim additis 92; fit numerus 1 $\frac{1}{3}$ R † 94 $\frac{1}{2}$, triplus illius $\frac{1}{3}$ R † 31 $\frac{1}{2}$, qui nimirum ſi ducatur in 3, fit 1 $\frac{1}{3}$ R † 94 $\frac{1}{2}$.

Regula vigeſimaprima. Diuidere 14, in tres partes in ratione continua, vt ſecunda ſit 1 R. *Regula XXI*

Auferatur 1 R, à 14, & remanet 14 — 1 R; huius autem dimidium eſt 7 — $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum eſt 49 — 7 R † $\frac{1}{4}$ Q; remanet 49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q; huius verò latus eſt ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q), quo ſubtracto à 7 — $\frac{1}{2}$ R, remanet 7 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q), & hæc eſt prima pars. Secunda porro erit 1 R, tertia demum erit reſiduum vſque ad 14, nempe 7 — $\frac{1}{2}$ R † ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q).

Regula vigeſimaſeconda. Tres quantitates reperire in ratione continua, vt prima, & ſecunda ſint 10 — 1 R, tertia verò 1 R. *Regula XXII.*

Ducatur 1 R, in 10 — 1 R, & fit 10 R — 1 Q; hoc autem addatur quadrato dimidij vnius radicis nempe $\frac{1}{4}$ Q, & fit 10 R — $\frac{3}{4}$ Q, huius autem radix eſt ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q), à qua ſubtrahatur $\frac{1}{2}$ R, dimidium tertiæ partis, & remanet ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q) — $\frac{1}{2}$ R, & hæc eſt ſecunda pars; qua ſubtracta à 10 — 1 R, remanet 10 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q), & hæc eſt pars prima; quæ ducta in tertiam 1 R, facit quidem 10 R — $\frac{1}{2}$ Q — ℞ (10 C — $\frac{3}{4}$ QQ), & hoc productum æquale eſt quadrato ſecundæ; hoc enim eſt pariter 10 R — $\frac{1}{2}$ Q — ℞ (10 C — $\frac{3}{4}$ QQ.

Regula vigeſimatertia. Diuidatur 20 † 1 R, in tres partes continuè proportionales, vt prima ſit 1 R. *Regula XXIII.*

Subtrahatur 1 R, de 20 † 1 R, remanet 20; qui ductus in primam, facit 20 R; cui addito $\frac{1}{4}$ Q, quarta parte quadrati ex prima fit 20 R † $\frac{1}{4}$ Q; huius latus eſt ℞ (20 R † $\frac{1}{4}$ Q); à quo ſubtracto $\frac{1}{2}$ R, dimidio primæ, remanet ℞ (20 R † $\frac{1}{4}$ Q), — $\frac{1}{2}$ R, pro ſecunda parte. Tertia verò erit 20 † $\frac{1}{2}$ R — ℞ (20 R † $\frac{1}{4}$ Q), reſiduum nimirum vſque, ad 20.

Regula vigeſimaquarta. Diuidere 14, in tres partes continuè proportionales; vt ſi multiplicetur prima per ſecundam, & productum per tertiam, fiat 1 C. *Regula XXIV.*

 Sumatur

Sumatur radix ipſius C, & eſt 1 R; quamobrem 1 R, erit ſecunda pars, at verò prima, & tertia reperietur, vt ſupra regula antecedenti 23.

Regula XXV.

Regula vigeſimaquinta. Duos numeros reperire, vt eorum exceſſus ſit 1 R, quadratorum autem ſumma ſit 20.

Accipe $\frac{1}{2}$ R; dimidium 1 R; huius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ Q; quo ſubtracto ex 10, dimidio dati numeri 20, remanet 10 — $\frac{1}{4}$ Q; huius autem latus quadratum eſt ℞ (10 — $\frac{1}{4}$ Q); à quo dematur $\frac{1}{2}$ R, & remanet ℞ (10 — $\frac{1}{4}$ Q) — $\frac{1}{2}$ R, pro vno ex numeris quæſitis,

Has autem regulas tradidiſſe ſufficiat, & ſi plurimæ aliæ poſſent afferri, non minus ad ipſam poſitionem inſtituendam conducentes.

Superiores Regula ſufficiant quiſq; autem poterit illas explicare imo & demonſtrare.

Poterit autem vnuſquiſque non ſine iucunditate regulas enarratas numeris abſolutis applicare, & manifeſtiſſimè veritatem deprehendere. Præter quamquod etiam demonſtrari poſſunt.

Veterum Analyſtarum igitur Artem doctrinamq; tradidimus, præſidio autem Speciosæ Logiſtices illam promouendo, ita vt multa, eaque præclariſſima hunc in modum fuerimus aſſecuti, quæ alioquin explicari minimè potuiſſent. Ita fit, vt Veterum illa celebris penèque Diuina Ars tantum ſuſceperit incrementi, vt nullum Problema ſit, quod reſoluendum nunc aſſumere non poſſit. Si namque non eſt ex ijs, quas à principio neceſſitas conſtituit, & hucuſque conſeruat; Omnia enim docuit neceſſitas, nihilque neceſſarium eſt, quod neceſſitas non inueniet, nec ex alijs, quas nimirum voluptas peperit; ex earum tamen eſt genere, de quibus Plutarcus, Platonis auctoritate fretus dicebat; ἐςι δ᾽ἐ ἂν την πιθανότητα, καὶ τὴν ἀκρίβειαν, καὶ τὸ καθάριον ἀγαπῶντες, ἐκμανθανουσι, καὶ περιεπουσιν: ὡς Αριθμητικην, και Γεωμετριαν, καὶ κανονικην πᾶςαν, καὶ Αςτρολογίαν, ἅς Φησιν ὁ Πλάτων καίπερ αμελουμενας, βία ὑπὸ χάριτος αὐξεςθαι. Sic autem tractandam duximus, vt nullum præceptum demonſtratione deſtitutum prodiret, in quo tamen vt ingenuè loquar, maiores peccarunt; contenti tradidiſſe Canones, quibus operandum eſſet, demonſtrationibus neglectis; quod in omni profectò, in Mathematicis tamen præſertim dedecet Diſciplinis, cum inde ſingularem, nec vnquam ſatis explicatam laudem conſecutæ ſint.

Plutarcus.

VARIA

VARIA EXEMPLORVM GENERA PROPONVNTVR AD ARTEM ANALYTICAM ILLVSTRANDAM.

CAPVT XXXI.

In hoc præſenti capite placuit afferre ſex exemplorum genera, in quibus ad praxim reuocata præcepta ſuperius tradita conſpiciuntur.

PRIMVM EXEMPLORVM GENVS.

Primum exemplorum genus illud eſto Problematum, eorum nimirum, in quibus, vel diuiſor eſt vnitas, vel nulla reductione eſt opus.

PROBLEMA I.

N*VMERVM inuenire, cui ſi addantur 10, & ab eodem auferantur 20, ſumma ad reſiduum habeat rationem, vt 2, ad 1.*

Poſitio, & reſolutio.

Numerus quæſitus eſto 1 R; cui additis 10, fit 1 R † 10; ſi verò ex 1 R, auferantur 20, fit reſiduum 1 R — 20; vt autem eſt 2, ad 1, ita eſt 1 R † 10, ad 1 R — 20, proinde ſi 1 R — 20, multiplicemus per 2, fiet productum 2 R — 40 = 1 R † 10, additis vtrinque 40, fit æquatio 1 R † 50 = 2 R, & vtrinque ſublata 1 R, fiet æquatio 1 R = 50; proinde numerus quæſitus erit 50.

1 R † 10   1 R — 20
2
1 R † 10 = 2 R — 40
40
1 R † 50 = 2 R

Hic autem numerus quæſtioni ſatisfacit; quandoquidem ſi numero 50, addantur 10, fiet numerus 60, ſi verò ab eodem auferantur 20, fiet numerus reſiduus 30; eſt autem 60, ad 30, vt 2, ad 1.

PROBLEMA

PROBLEMA II.

Reperire numeros duos inæquales, quorum differentia ſit 10, ea tamen lege, vt ſi minor ducatur in 2, & producto addantur 5, maior autem in 3, & producto addantur 6, fiat maior duplus minoris.

Poſitio, & reſolutio.

Minor numerus eſto 1 R; ergo maior erit 1 R † 10: Si minor ducatur in 2, & producto addantur 5, fiet 2 R † 5; ſi maior ducatur in 3, & producto addantur 6, fiet 3 R † 36. Cum itaque maior duplus ſit minoris, ſi minor duplicetur, erunt 4 R † 10 ⩵ 3 R † 36. Si itaq; ab vtraque parte tollantur 3 R, erunt 1 R † 19 ⩵ 36, & rurſus ab vtraque parte ſublatis 10, remanebit 1 R ⩵ 26. Proinde minor numerus quæſitus erit 26, maior autem erit 36, qui habetur additis 10, ad 26, & hi duo numeri ſatisfaciunt quæſtioni.

1 R		1 R † 10
2		3
2 R		3 R † 30
5		6
2 R † 5		3 R † 36
4 R † 10	⩵	3 R † 36
3 R		
1 R † 10	⩵	36
		10
1 R ⩵ 26		

PROBLEMA III.

Numerum reperire ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, ſi tollantur 60, remaneant 80.

Poſitio, & reſolutio.

Quæſitus numerus eſto 1 R; partes eius ſupradictæ ſunt $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{6}$ R, quarum ſumma 1 R, à qua ſi auferantur 60, remanebit 1 R — 60 ⩵ 80; vtrique autem parti additis 60, fiet æquatio 1 R ⩵ 140. Et 140, eſt numerus quæſitus Problemati ſatisfaciens: numeri enim 140, dimidium eſt 70, tertia pars eſt 46 $\frac{2}{3}$ ſexta verò pars eſt 23 $\frac{1}{3}$; ab his autem partibus ſimul ſumptis, quæ nimirum faciunt 140, ſi tollantur 60, remanent 80.

PROBLEMA IV.

Numerum reperire, qui additus numero 60, faciat 130.

Poſitio, & reſolutio.

Quæſitus numerus eſto 1 R; hæc addita numero 60, facit 1 R † 60; ſed efficere debet 130, ergo 1 R † 60 ⩵ 130; vtrinque ablatis 60, remanebit 1 R ⩵ 70, erit igitur 1 R, valor 70, numerus Problemati ſatisfaciens.

PRO-

PROBLEMA V.

N*Vmerum inuenire ex cuius* $\frac{1}{3}$, *ſi ſubtrahantur* 15, *reſiduum ducatur in* 3, *proueniat* 70.

Quæſitus numerus eſto 1 R, ex cuius $\frac{1}{3}$, ſi tollantur 15, remanebit $\frac{1}{3}$ R — 15, his autem ductis in 3, prouenict 1 R — 45; & erit æquatio 1 R — 45 = 70; vtrique parti additis 45, fiet æquatio 1 R = 115, erit igitur quæſitus numerus 115. Problemati ſatisfaciens. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA VI.

P*Ropoſiti ſint duo numeri* 30, *&* 40, *ſintque reperiendi duo alij in ratione quadrupla, vt ſi minor addatur ad* 30, *& maior ad* 40, *numeri conflati, rationem habeant triplam.*

Primus ex numeris quæſitis, eſto 1 R, ſecundus erit 4 R. Si prioribus addantur, vt præcipitur, fient 30 † 1 R, & 40 † 4 R. Hi autem numeri cum ſint in ratione tripla, ducatur minor, nempe 30 † 1 R, in 3, & fiet æquatio 90 † 3 R = 40 † 4 R, vtrinque ablatis 3 R, erit 90 = 40 † 1 R, vtrinque ablatis 40, remanebit 50 = 1 R. Quęſitus igitur numerus erit 50, huius quadruplum eſt 200. Si verò 50, addantur ad 30, fient 80, & ſi 200, addantur ad 40, fient 240, liquet autem eſſe 240, ad 80, vt 3, ad 1. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA VII.

N*Vmerum reperire, ex quo ſi tollantur* 6, *& reſidui* $\frac{1}{3}$, *addantur* 10, *ſumma verò hæc ducatur in* 3, *& rurſus ex producto tollantur* 24, *remaneant* 60.

Quæſitus numerus eſto 1 R; ex hac ſi tollantur 6, remanet 1 R — 6, tertia pars eſt $\frac{1}{3}$ R — 2; cui ſi addantur 10, fiet $\frac{1 R \dagger 24}{3}$, hæc autem ducta in 3, facit 1 R † 24, ex hac ſi tollantur 24, remanet 1 R, quæ æquabitur 60, & ita 69, eſt numerus Problemati ſatisfaciens. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA VIII.

N*Vmerum reperire, cui ſi addantur* 10, *& ex eodem auferantur* 14, *& ex conflati, reſiduiq; ſumma tollatur ipſe numerus, atq; reſiduo addantur* 4, *fiant* 35.

Quæſitus numerus eſto 1 R, cui ſi addantur 10, fiet 1 R † 10; ſi eidem radici auferantur 14, fiet 1 R — 14; horum ſumma eſt 2 R — 4; hinc ſi auferatur idem numerus, nimirum 1 R, fiet 1 R — 4, huic ſi addantur 4, fiet 1 R = 35, igitur idem numerus 35, ſatisfacit. *Poſitio, & reſolutio.*

PRO-

PROBLEMA IX.

Dvos numeros reperire: quorum differentia ſit 36, ea lege, vt ſi quartam partem ſumma illorum ducam in 2, ex producto verò tollam 18, remaneat 10.

Poſitio, & reſolutio. Minor numerus quæſitus eſto 1 R: maior igitur erit 1 R † 36. Vtriuſque ſumma eſt 2 R † 36, quarta autem pars $\frac{1}{4}$ R † 9, quæ ducta in 2, facit 1 R † 18: vnde ſi ſubtrahamus 18, remanebit 1 R, æqualis 10, ob id numerus minor quæſitus erit 10, maior autem erit 46.

S C H O L I O N.

Innumera alia Problemata ad hoc primum genus ſpectantia potuiſſent afferri, nobis tamen breuitati conſulentibus hactenus allata viſa ſunt ſufficere.

SECVNDVM EXEMPLORVM GENVS.

Ad hoc genus exempla pertinent eorum Problematum, quibus per ſolam Diuiſionem fit ſatis; diuiſo quandoquidem comparationis homogeneo per numerum dignitatis, Radicis pretium innoteſcit.

PROBLEMA I.

Propoſitum numerum in duas partes diuidere, quarum data ſit differentia.

Poſitio, & reſolutio. Propoſitus ſit numerus 100, diuidendus in duas partes, quæ differant dato numero 30. Pars minor eſto 1 R; maior igitur erit 1 R † 30: harum ſumma eſt 2 R † 30, quæ æquabitur 100: vtrinque ablatis 30, erit æquatio inter 2 R, & 70; diuiſis autem 70, per 2, fit quotiens 35, & pars minor, pars autem maior erit 65, & ſatis faciunt quæſtioni: propterea quod harum partium ſumma eſt 100, earum autem differentia eſt 30, vt patet.

PROBLEMA II.

Propoſitum numerum in duas partes diuidere, vt quædam determinata partes maioris, æquales ſint parti minori, aſſumpto aliquo determinato numero.

Poſitio, & reſolutio. Iniunctum ſit diuidere 100, in duas partes, vt $\frac{1}{3}$, maioris partes æquales ſint minori

minori plus 10. Maior pars eſto 1 R; ergo minor erit 100 — 1 R; maioris autem $\frac{2}{3}$ ſunt $\frac{2}{3}$ R, minor verò ſi aſſumat 10, erit 110 — 1 R, erit igitur æquatio huiuſmodi $\frac{2}{3}$ R ⊐ 110 — 1 R; vtrinque addita 1 R, fiet 1 $\frac{2}{3}$ R ⊐ 110. Diuiſis igitur 110, per 1 $\frac{2}{3}$ R, fiet quotiens *66*, & pars maior; minor autem erit 34; duæ autem tertiæ partes illius ſunt 44; & ſi 34, parti minori addantur 10, fient 44.

PROBLEMA III.

P*Ropoſitum numerum in duos partiri in data ratione.*

Propoſitum ſit diuidere 100. in duas partes quæ ſint inter ſe vt 7, ad 3. Pars vna *Poſitio, & reſolutio.*
eſto 2 R, alia verò 7 R : ex his ſumma eſt 10 R : ergo erit æquatio 10 R ⊐ 100; diuiſione inſtituta, fit quotiens, & 1 R, valor 10, ob id pars poſita 3 R, erit 30; altera, quæ ponebatur 7 R, erit 70, & ſatisfaciunt; namque ſumma ipſarum eſt 100, & ſunt inter ſe vt 7, ad 3.

PROBLEMA IV.

N*Vmeros reperire, qui ſint in proportione vt 5, ad 7, & ſi multiplicetur minor per 4, maior autem per 3, numeri producti ſimul additi faciant 123.*

Minor ex numeris quæſitis eſto 5 R, alter erit 7 R. Modò ducantur 5 R, per 4, & fient 20 R, & multiplicatis 7 R; per 3, producentur 21 R, harum ſumma eſt *Poſitio, & reſolutio.*
41 R; quæ debent eſſe æquales numero 123. Diuiſione autem inſtituta fiet quotiens 3, Numerus igitur quæſitus minor erit 15, cum ille poneretur 5 R, maior autem erit 21, cum poneretur 7 R, & ſatisfaciunt Quæſtioni.

PROBLEMA V.

P*Ropoſitum numerum in duos partiri in data ratione, dataque differentia.*

Sit iniunctum diuidere 100, in duos numeros, adeo vt maior minoris, ſit quin- *Poſitio, & reſolutio.*
tuplus, & adhuc ſex vnitates ſuperaddat. Minor eſto 1 R, maior igitur erit 5 R † *6*, hoc enim pacto maior minoris eſt quintuplus, & adhuc ſex vnitates ſuperaddit. Horum autem ſumma eſt *6* R † *6*; quæ æquabitur 100. Ablatis ſimilibus à ſimilibus, fiet æquatio *6* R ⊐ *94*.

Diuiſione inſtituta, fiet 1 R valor 15 $\frac{2}{3}$. Ad poſitiones. Minor erit 15 $\frac{2}{3}$, maior autem habebitur ſi 15 $\frac{2}{3}$, multiplicentur per 5, & producto addantur *6*, cum maior ipſe poneretur 5 R † *6*, eritque 84 $\frac{1}{3}$.

Vel maior eſto 1 R, à qua demptis *6*, remanet 1 R — *6*, minoris quintuplum; proinde minor erit $\frac{1}{5}$ R — 1 $\frac{1}{5}$, ſumma vtriuſque, nempe 1 $\frac{1}{5}$ R — 1 $\frac{1}{5}$, æquabitur 100, vtrinque addito 1 $\frac{1}{5}$, fiet æquatio 1 $\frac{1}{5}$ R ⊐ 101 $\frac{1}{5}$. Diuiſione inſtituta, fit 1 R, valor 84 $\frac{1}{3}$, & maior numerus quæſitus; minor autem erit 15 $\frac{2}{3}$. Cæterum ex operatione ſuperiori loco poſita talis elicitur.

CANON.

SVme duos numeros in ratione data, & per illorum ſummam diuide datum numerum, dato interuallo multatum, quotientem ſi ducas in minorem ſumptorum, fiet minor ex numeris quæſitis.

PROBLEMA VI.

DVos numeros reperire, qui, & datam rationem, & datum ſeruent interuallum.

Poſitio, & reſolutio. Sit iniunctum maiorem minoris eſſe ſextuplum, interuallum autem ipſorum eſſe 30. Minor eſto 1 R, maior igitur erit 6 R, hoc enim pacto maior eſt ſextuplus minoris; ſupereſt, vt horum interuallum 5 R, ſit æquale vnitatibus 30. Fiet igitur diuiſione inſtituta 1 R, valor 6; minor igitur erit 6, maior autem 36, atq; adeo maiore exiſtente ſextuplo minoris, interuallum eſt 30.

Secundo modo idē perficitur. Secundò poteſt etiam operatio hoc modo inſtitui. Maior eſto 1 R, minor igitur erit $\frac{1}{6}$ R; horum interuallum eſt $\frac{5}{6}$ R, æquale 30. Diuiſione inſtituta fit quotiens, & 1 R valor, atq; maior numerus quæſitus 36.

Ex his autem duabus operationibus hic elicitur.

CANON.

SVme duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum; quotiens enim ductus in ſumptos numeros, queſitos numeros exhibeat.

Poteſt etiam tertio modo idem perfici. Tertiò eſto minor 1 R, maior igitur erit 1 R † 30, qui cum ſit minoris ſextuplus, erunt proinde 6 R = 1 R † 30, & ablatis ſimilibus à ſimilibus, remanebit æquatio huiuſmodi 5 R = 30. Diuiſione inſtituta fit 1 R, valor, & minor numerus queſitus 6, maior proinde 36.

Item quarto modo. Quartò maior eſto 1 R, minor igitur erit 1 R — 30, hic cum ſit ſexta pars maioris, erit $\frac{1}{6}$ R = 1 R — 30, ſeu 1 R = 6 R — 180. Additis 180, vtrinque fit æquatio 1 R † 180 = 6 R, vtrinque ablata 1 R, fiet 5 R = 180, diuiſione autem inſtituta fiet 1 R, valor, & maior numerus quæſitus 36, vt priùs, minor autem 6, & ſatisfaciunt Queſtioni.

PROBLEMA VII.

PRopoſitum numerum in duos numeros diuidere, vt horum vtriuſque non tamen eadem data partes, ſi coniungantur datum numerum conficiant. Oportet autem talem hunc dari, qui ſit in medio duorum numerorum, qui fiunt, ſi numeri ab initio propoſiti praſcripta partes accipiantur.

Sit

Digitized by Google

Sit iniunctum diuidere 160, in duos numeros, vt primi tertia pars, & ſecundi ſeptima pars, ſi coniungantur efficiant 50. Secundi ſeptima pars eſto 1 R, igitur ipſe ſecundus erit 7 R, quare primi tertia pars erit 50 — 1 R, hoc enim modo tertia pars primi cum ſeptima parte ſecundi, efficiunt 50, erit igitur ipſe primus 150 — 3 R, ſi vero hi numeri coniungantur debent efficere 160, ſed ſimul iuncti efficiunt 4 R † 150, ob id erit æquatio 4 R † 150 ⪦ 160. Vtrinque auferantur 150, remanebit æquatio 4 R ⪦ 10. Diuiſione inſtituta fiet quotiens 2 $\frac{1}{2}$, ad poſitiones. Primus numerus poſitus 150 — 3 R, erit 142 $\frac{1}{2}$. Secundus autem, qui ponebatur 7 R, erit 17 $\frac{1}{2}$, horum ſumma eſt 160, & ſecundi ſeptima pars eſt 2 $\frac{1}{2}$, quæ cum 47 $\frac{1}{2}$, tertia parte primi 142 $\frac{1}{2}$, facit 50. *Poſitio, & reſolutio.*

Cur autem duas veluti conditiones Diophantus appoſuerit declarat elegantiſſimè Bachetus in ſuis Commentarijs conſule illum.

PROBLEMA VIII.

***P**ropoſitum numerum in duos numeros partiri, vt prioris data pars, poſterioris datam partem, ſuperet dato numero.*

Hunc autem minorem eſſe oportet eo, qui fit ſi propoſiti ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedat. *Poſitio, & reſolutio.*

Sit iniunctum 190, in duos numeros diuidere, vt prioris triens, poſterioris quintantem 10, vnitatibus ſuperet.

Quintans poſterioris numeri quæſiti eſto 1 R, ipſe proinde erit 5 R. Triens autem prioris erit 1 R † 10, ipſe ob id erit 3 R † 30, horum autem ſumma debet eſſe 160, ſed eſt 8 R † 30, proinde erit æquatio 8 R † 30 ⪦ 190, ablatis ſimilibus à ſimilibus relinquetur æquatio huiuſmodi 8 R ⪦ 160.

Diuiſione inſtituta fit quotiens, & 1 R, valor 20, quamobrem numerus poſterior, cuius quintans erat poſitus 1 R, erit 100, alter autem prior, cuius triens ponebatur 1 R † 10, erit 30, & ſatisfaciunt, nàm tertia pars numeri 90, eſt 30; quæ ſuperat 20, quintam partem huius numeri 100, hoc exceſſu 10, &c.

Quinque alijs modis poteſt fieri ſatispropoſitæ Quæſtioni; ſed hæc videri poſſunt apud Xilandrum, & Bacchettum. Sic enim ſecundo poſſet inſtitui poſitio. Prioris triens eſto 1 R, ipſe prior erit 3 R, quintans poſterioris erit 1 R — 10, ipſeque poſterior 5 R — 50, horum ſumma 8 R — 50 ⪦ 190, ac demum 8 R ⪦ 240, diuiſione inſtituta fit 1 R, valor 30. Ad poſitiones triens prioris erat 1 R, ergo 30; ergo totus numerus erit 90, at poſterioris quintans erat 1 R — 10, proinde 20, liquet autem 30, trientem prioris, ſuperare 20, quintantem poſterioris exceſſu 10. *Secunda poſitio.*

Tertiò. Prior numerus eſto 1 R, ergo quintans ſecundi erit $\frac{1}{3}$ R — 10, hoc enim pacto triens prioris, ſuperabit quintantem poſterioris exceſſu 10, ipſe igitur ſecundus erit 1 $\frac{2}{3}$ R — 50, horum ſumma 2 $\frac{2}{3}$ R — 50 ⪦ 190; ergo 2 $\frac{2}{3}$ R ⪦ 240, proinde 1 R, valor erit 90, &c. *Tertia poſitio.*

Quartus modus eſt huic reſpondens, ſi ſecundus ponatur 1 R &c. *Quarta poſitio.*

Quintò. Primus eſto 1 R, ergo ſecundus erit 190 — 1 R, primi triens eſt $\frac{1}{3}$ R, ſecundi quintans eſt 38 — $\frac{1}{5}$ R, huic addito 10, fit 48 — $\frac{1}{5}$ R ⪦ $\frac{1}{3}$ R, & fiet 1 R, valor 90, vt priùs. *Quinta poſitio.*

Sexto denique poteſt inſtitui operatio huic reſpondens, ſi ſecundus ponatur 1 R, primus erit 190 — 1 R, ſecundi quintans eſt $\frac{1}{5}$ R, primi triens 63 $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, & erit $\frac{1}{5}$ R † 10 ⪦ 63 $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, atque adeo $\frac{8}{15}$ R ⪦ 53 $\frac{1}{3}$. Fiet autem 1 R, valor 100, & ſecundus numerus quæſitus, ex hiſce duobus vltimis operationibus elicitur.

CANON.

PRopoſiti numeri ſume partes ſimiles poſtulatis, & minori adjce datum internallum, aufer idem internallum à maiori, ſummam, & reſiduum diude ſeorſim per aggregatum fractionum exprimentium partes poſtulatas, & orientur numeri quæſiti.

PROBLEMA IX.

AB eodem numero duos datos numeros auferre, vt reſidui datam rationem ſeruent.

Poſitio, & reſolutio. Sit iniunctum ab eodem numero auferre 100, & 20, vt maius reſiduum, minoris ſit triplum.

Numerus quæſitus eſto 1 R, ab hoc autem ſubducto 100, reſiduum erit 1 R — 100, ab eodem ſubductis 20, relinquitur 1 R — 20, cum autem reſiduum maioris nempe 1 R — 20, triplum eſſe debeat minoris, ob id ter ipſum minus reſiduum maiori æquabitur; quamobrem 3 R — 300, æquabuntur 1 R — 20. Vtrinque addito communi defectu, fiet æquatio huiuſmodi 3 R = 1 R † 280, ſimilibus ſubductis à ſimilibus, fiet æquatio 2 R = 280; diuiſione inſtituta fiet 1 R, pretium 140.

Cùm ergo quæſitus numerus poneretur 1 R, ob id erit vnitatum 140, qui quidem numerus ſatisfacit; nam ſi a 140, ſubtrahamus 100, remanet 40, ſi ſubtrahamus ab eodem 20, remanet 120; conſtat autem 120, ad 40, habere rationem, vt 3, ad 1, hinc elicitur.

CANON.

MAior datorum numerorum ducatur in denominatorem rationis poſtulatæ, à producto autem auferatur minor. Reſiduum verò diuidatur per denominatorem rationis vnitate multatum, & orietur numerus quæſitus.

Poſitio, & reſolutio. Poteſt etiam inſtitui Analyſis hoc modò. Defectus quo 100, deficit à quæſito numero, eſto 1 R, igitur numerus quæſitus erit 1 R † 100, cum autem defectus, quo 20, deficit ab eodem quæſito numero triplus ſit defectus, quo 100, ab eodem deficit; erit ipſius 20.

Defectus 3 R, ob id numerus quæſitus erit 3 R † 20. Proinde æquales erunt 1 R † 100, & 3 R † 20, reperiemus autem 1 R, valorem eſſe 40. Atq; adeo numerus quæſitus erit 140, & hinc etiam elicitur.

Digitized by Google

CANON.

Datorum numerorum interuallum diuidatur per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur enim defectus maioris numeri à numero quæſito, quo ei addito fiet quæſitus numerus.

PROBLEMA X.

Duobus datis numeris, eundem adijcere numerum, vt compoſiti ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem rationem datam minorem ea eſſe, quam habet maior datorum numerorum ad minorem.

Poſitio, & reſolutio.

Sit iniunctum ad 80, & ad 10, eundem adijcere numerum, vt maius compoſitum minoris ſit triplum. Numerus addendus eſto 1 R, is ſi ad 80, addatur, fiet 1 R † 80, ſi verò ad 10, fiet 1 R † 10, debet autem compoſitum maius eſſe triplum compoſiti minoris; ter igitur minus compoſitum æquabitur maiori. At verò ter minus compoſitum eſt 3 R † 30, hoc igitur æquabitur 1 R † 80, auferantur autem ſimilia à ſimilibus, & remanebit æquatio huiuſmodi 2 R = 50. Diuiſione inſtituta fit 1 R, pretium 25, & hic numerus ſatisfacit Quæſtioni.

Conditionis ratio.

Conditionis appoſitæ rationem, facilè eſt aſſignare; nam ſi duobus æqualibus numeris, inęquales duo adijciantur, erit compoſitorum minor ratio, quàm adiectorum; conſule Bachetum.

PROBLEMA XI.

Propoſitum numerum quadratum, in duos numeros quadratos diuidere.

Poſitio, & reſolutio.

Sit iniunctum diuidere 100, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus eſto 1 Q, alter erit 100 — 1 Q, hoc enim pacto ſimul iuncti efficient 100, debent autem ſimul æquari numero quadrato, & quia non ad aliud reſtringitur Quæſito, quàm vt ſimul iuncti propoſiti numeri quadratum efficiant; ſatis erit concipere quadratum, cuius latus ſit 10; latus eiuſdem numeri dati diuidendi, ſed minus tot radicibus, quot libuerit, eſto igitur illud 10 — 3 R, eius quadratum eſt 100 — 60 R † 9 Q, hoc autem æquabitur 100 — 1 Q, vt videlicet 100 — 1 Q, æquetur quadrato; & per antitheſin erit 10 Q = 60 R, ac proinde 1 R, valor erit 6, ergo quadratum vnum erit 36, alterum erit 100 — 36, nempe 64.

Exemplum alterum.

Sit iniunctum diuidere 36, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus eſto 1 Q, alter erit 36 — 1 Q, hoc enim pacto ſimul ſumpti conficient 36, debent autem ſimul æquari numero quadrato &c. quadratum illud ſit tale, vt eius latus ſit 6 — 3 R, huius quadratum eſt 36 — 36 R † 9 Q, & hoc æquabitur 36 — 1 Q, & per antitheſin 10 Q = 36 R, atque acco, per hypobibaſmum 10 R = 36 R, igitur 1 R, valor erit $3\frac{3}{5}$, huius quadratum eſt $12\frac{24}{25}$, aliud quadratum erit $23\frac{1}{25}$, hic autem numerus eſt quadratus, cuius radix eſt $4\frac{4}{5}$. Hinc autem deducitur.

CANON

CANON.

SVmatur numerus ad libitum; ducaturque in latus propoſiti quadrati; eius duplum diuidatur per quadratum illius plus vno; nam quadratum quotiens, erit vnum ex quæſitis quadratis; reſiduum autem vſque ad totum numerum diuidendum erit aliud quadratum.

PROBLEMA XII.

DVos numeros quadratos reperire in dato interuallo.

Poſitio, & reſolutio. Sit iniunctum reperire duos numeros quadratos, quorum interuallum ſit 56, latus quadrati vnius ex quæſitis eſto 1 R, aliud erit 1 R, plus numero quocunque, dummodo quadratum ipſius minus ſit quam 56; ſitque numerus 4, itaque erit 1 R † 4, illius quadratum eſt 1 Q, iſtius autem eſt 1 Q † 8 R † 10, horum differentia eſt 8 R † 16, quæ æquabitur 56, ac demum erit æquatio 8 R = 40, ſi nimirum, vtrinque auferantur 16, diuiſione inſtituta fit 1 R, valor 5. Proinde numerus poſitus 1 R, erit 5; alter autem 9, ſi quidem ponebatur 5 † 4, horum quadrata 25, & 81; quorum differentia eſt 56, ex hac autem operatione talis elicitur.

CANON.

SVmatur quicunque numerus quadratus minor dato interuallo, ipſeque ſubtrahatur à dato interuallo, reſiduum diuidatur per duplum lateris ſumpti quadrati; orietur enim vnum latus ex quæſitis duobus. Si verò huic addatur latus ſumpti quadrati, ſiet latus alterum.

Aliter etiam operatio poteſt inſtitui, vide apud Bachetum in Commentarijs ſupra Diophantum.

TERTIVM GENVS EXEMPLORVM.

Ad hoc genus ea Problemata pertinent, in quorum Analyſi compoſita æquatio occurrit, in eaque requiritur Radicis extractio. Horum Problematum Analyſis magis operoſa eſt, ob id longè præſtantior. Nonnulla igitur Problemata lubet hic in medium afferre, vt nimirum præcepta ſuperiùs tradita ad praxim reuocata videantur; quemadmodum factum fuit in exemplis ſimplicis æquationis.

PROBLEMA I.

D*Atum numerum in duas partes diuidere, vt earum quadrata ſimul iuncta determinatum numerum efficiant.*

Propoſitum ſit diuidere 12, in duos numeros, quorum quadrata efficiant ſimul iuncta 80. Pars vna eſto 1 R, altera erit 12 — 1 R, horum quadrata ſunt 1 Q, & 144 — 24 R † 1 Q, horum ſumma eſt 144 — 24 R † 2 Q, quæ æquatur 80. Additis vtrinque 24 R, fit 144 † 2 Q = 80 † 24 R, ſublatis vtrinque 80. Fit æquatio 64 † 2 Q = 24 R, vtrinque ſublatis 2 Q, fit 24 R — 2 Q = 64; Diuiſione inſtituta per 2, numerum maioris characteris, fit 12 R — 1 Q = 32, huius autem radix eſt 8. Siquidem dimidium numeri radicum eſt 6, huius quadratum eſt 36, à quo ſubducto 32, remanet 4, cuius latus quadratum eſt 2, hoc ſi addatur 6, dimidio numeri radicum, fit 8, pro 1 R, valore, ſi verò 8, auferatur ex 12, remanebit 4, erunt igitur duo numeri 8, 4, horum quadrata ſunt 64, 16, quorum ſumma eſt 80, vt Problema iubet. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA II.

D*Vos numeros reperire quorum quadrata dato interuallo differant, & inuicem multiplicata producant determinatum numerum.*

Iniunctum ſit reperire duos numeros, quorum productum ſit 160, & eorum quadrata differant per numerum 156. Numerus minor ex duobus quæſitis eſto 1 R, maior igitur erit $\frac{160}{1 R}$, hoc enim pacto vnus in alium ductus producit 160. Horum autem quadrata ſunt 1 Q, & $\frac{25600}{1 Q}$, iſtorum verò differentia eſt $\frac{25600}{1 Q}$ — 1 Q, & hæc æqualis eſt dato numero 156, vtrinque addito 1 Q, erit $\frac{25600}{1 Q}$ = 156 † 1 Q; tollatur factio per multiplicationem in crucem quemadmodum Ars præcipit, & erit 25600 = 156 Q † 1 QQ. Dimidium numeri radicum eſt 78, cuius quadratum 6084, additum numero abſoluto 25600, facit ſummam 31684; huius radix quadrata eſt 178, à qua ſubducto 78, dimidio numeri radicum, remanet 100: & quia erat æquatio inter QQ † Q, & N, ideo iterum extrahatur radix quadrata ex 100, & eſt 10, ob id numerus poſitus 1 R, erit 10, alter poſitus $\frac{160}{1 R}$, erit 16, nempe quotiens emergens ex diuiſione numeri 160, per 10, radicis pretium. *Poſitio, & reſolutio.*

Hi porro duo numeri Problamati ſatisfaciunt, quandoquidem vnus in alium ductus facit 160; eorundem quadrata differunt hoc interuallo dato, puta 156.

PRO-

PROBLEMA III.

DVos numeros reperire, quorum differentia ſit data qui, & inter ſe ducti, faciant determinatum numerum.

Poſitio, & reſolutio. Sit iniunctum reperire duos numeros, quorum differentia ſit 6, & inuicem multiplicati facianr 352; Vnus ex numeris quæſitis eſto 1 R, alter erit 1 R † 6, ſi inuicem multiplicentur, producetur 1 Q † 6 R ⫶ 352.

Huius autem æquationis radix eſt 16, numerus igitur minor poſitus 1 R, erit 16, alter poſitus 1 R † 6, erit 22, & ſatisfaciunt.

PROBLEMA IV.

PRopoſitum numerum in duas partes diuidere, ea lege, vt inter ſe ducta progignant datum numerum.

Poſitio, & reſolutio. Iniunctum ſit diuidere 20, in duas partes, quæ inter ſe ductæ faciant 75. Pars vna eſto 1 R, altera erit 20 — 1 R, hæ inuicem multiplicatæ faciunt 20 R — 1 Q: hoc antem productum æquabitur 75. Huius, æquationis radix ſic habetur. Dimidium numeri radicum eſt 10, cuius quadratum eſt 100, à quo ſi ſubtrahatur 75, remanet 25. Cuius radix quadrata eſt 5, qua ablata, & addita 10, dimidio numeri radicum, fiunt partes quæſitæ 5, & 15, queſtioni ſatisfacientes.

PROBLEMA V.

NVmerum reperire, qui auctus dato quodam numero, & diminutus, ſeu multatus itidem alio quodam numero, aggregatum, & reſiduum inuicem multiplicata, producant, determinatum numerum.

Poſitio, & reſolutio. Propoſitum ſit reperire numerum, qui auctus quodam alio puta 10, multatus autem alio, nempe 15, aggregatum, & reſiduum faciant 9350, ſi nimirum inuicem multiplicentur. Quæſitus numerus eſto 1 R, ergo auctus 10, vnitatibus erit 1 R † 10, diminutus 15, vnitatibus erit 1 R — 15. Hi autem numeri inter ſe ducti faciunt 1 Q — 5 R — 150, & hoc æquatur numero 9350, factaque reductione, iuxta Artis pręcepta, erit æquatio 1 Q — 5 R ⫶ 9500. Huius autem radix ſic habetur.

Dimidium numeri radicum eſt $2\frac{1}{2}$, huius quadratum eſt $6\frac{1}{4}$, cui ſi addatur 9500, numerus abſolutus, nempe comparationis homogeneum, fit $9506\frac{1}{4}$, hoc eſt $\frac{38025}{4}$, huius autem radix quadrata eſt $\frac{195}{2}$, nempe $97\frac{1}{2}$, cui addito $2\frac{1}{2}$, dimidio numeri radicum, fit 100, numerus quæſitus, qui auctus 10, vnitatibus, fit 100, multatus verò fit 85; conſtat autem, ſi ducatur 110, in 85, fieri 9350, vt Problema præcipit.

PRO-

1 R + 10
1 R — 15

— 15 R — 150
1 Q + 10 R

1 Q — 5 R — 150 = 9350
150

1 Q — 5 R = 9500
2 $\frac{1}{2}$ 6 $\frac{1}{4}$

2 $\frac{1}{2}$ 9506 $\frac{1}{4}$

4

4
2 38025

6 $\frac{1}{4}$ 4
195

97 $\frac{1}{2}$
2 2 $\frac{1}{2}$

100

PROBLEMA VI.

P*Ropoſitum numerum in duos diuidere, vt eorum quadrata ad inuicem multiplicata, producant determinatum numerum.*

Sit iniunctum diuidere 16, in duas partes, vt earum quadrata iuuicem multiplicata, producant 2304. Pars vna eſto 8 † 1 R, altera erit 8 — 1 R. *Poſitio, & reſolutio.*

8 — 1 R
8 — 1 R

— 8 R + 1 Q
64 — 8 R

64 — 16 R + 1 Q

8 + 1 R
8 + 1 R

8 R + 1 Q
64 + 8 R

64 + 16 R + 1 Q
64 — 16 R + 1 Q

64 Q + 16 C + 1 QQ
— 1024 R — 256 Q — 16 C
4096 + 1024 R + 64 Q

4096 — 128 Q + 1 QQ = 2304
128 Q 128 Q

4096 + 1 QQ = 2304 + 128 Q
2304 2304

1792 + 1 QQ = 128 Q
1 QQ 1 QQ

128 Q — 1 QQ = 1792
64
64

256
384

4096
1792

2304

64
48

16

4 1 R valor

Si procedatur iuxta Artis præcepta, reperiemus partes quæſitas eſſe 12, & 4. Pars enim vna dum eſt 8 † 1 R, eius quadratum erit 64 † 16 R † 1 Q, altera dum ponitur 8 — 1 R, quadratum eius erit 64 — 16 R † 1 Q, hæc autem quadrata adinuicem multiplicata, producunt 4096 — 128 Q † 1 QQ, quæ æquabuutur 2304, & per Antitheſin, fiet æquatio 128 Q — 1 QQ = 1792: huius autem æquationis radix eſt 4. Obſeruandum autem, cum maior poteſtas ſit 1 QQ, bis radicem quadratam extrahendam eſſe, atque adeo ex numero 2304, extracta radice quadrata 48, & hac ſubtracta ex 64, dum remanet 16, rurſus ex 16, extrahi debet radix quadrata.

Rurſus diuidatur 12, in duas partes, vt dictum eſt, ea lege, vt earum quadrata inuicem multiplicata faciant 130.

Pars vna eſto 6 † 1 R, altera erit 6 — 1 R, illius quadratum eſt 36 † 12 R † 1 Q, iſtius verò eſt 36 — 12 R † 1 Q, quadrata iſtarum inter ſe ducta faciunt 1296 — 72 Q † 1 QQ, & hoc productum æquatur 130, fit autem per Antitheſin æquatio iſta 72 Q — 1 QQ = 1166.

```
                 6 + 1 R
                 6 + 1 R
              ----------
               6 R + 1 Q
          36 + 6 R
          --------------
          36 + 12 R + 1 Q
                 6 — 1 R
                 6 — 1 R
          --------------
             — 6 R + 1 Q
          36 — 6 R
          --------------
          36 — 12 R + 1 Q
          36 + 12 R + 1 Q
          --------------
       36 Q — 12 C + 1 QQ
    432 R — 144 Q + 12 C
1296 — 432 R + 36 Q
------------------------------
1296 — 72 Q + 1 QQ = 130
```

```
     72 Q — 1 QQ = 1166
     36
     36
    ----       ----
    1296       36 — ℞ 130
    1166    ℞ ( 36 — ℞ 130 )
    ----
    130
          6 † ℞ ( 36 — ℞ 130 )
          6 † ℞ ( 36 — ℞ 130 )
         ---------------------
    ℞ ( 1296 — ℞ 168480 ) † 36 — ℞ 130
 36 † ℞ ( 1296 — ℞ 168480 )
 -------------------------------------
 72 — ℞ 130 † ℞ ( 5184 — ℞ 2695680 )
 72 — ℞ 130 † ℞ ( 5184 — ℞ 2695680 )
 -------------------------------------
    — ℞ 673920 † 130 — 5184 — ℞ 2695680
 5184 — ℞ 673920
 130
 -------------------------------------
 5314 — ℞ 6795680
— 5184 — ℞ 6795680
 ----------------
 130
```

PRO-

Itaque inſtituta operatione, vt vides, fiet 1 R, pretium ℞ Q (36 — ℞ 130); quamobrem pars vna poſita 6 † 1 R, erit 6 † ℞ (36 — ℞ 130), altera verò, quæ poſita fuit 6 — 1 R, erit 6 — ℞ (36 — ℞ 130), & ſatisfaciunt Problemati; quandoquidem quadratum vnius ductum in quadratum alteriùs facit 130; & vna addita alteri facit 12, vti perſpicuum eſt.

PROBLEMA VII.

Propoſitum numerum, in quatuor partes diuidere in ratione continua, vt quadrata ſingularum ſimul iuncta, conficiant determinatum numerum.

Sit iniunctum diuidere 120, in quatuor partes in continua ratione, vt ſingularum quadrata ſimul iuncta efficiant 7380. Supponendum eſt cubo ex ſecunda, & tertia, ſimul ſumptis diuiſo per triplum eiuſdem ſecundæ, & tertiæ, additę ſint primę, & quartę, quotientem æquari producto ex prima in quartam, vel ex ſecunda in tertiam.

Vt ſint 2, 4, 8, 16, continuè proportionales, aggregatum ex ſecundo, & tertiò eſt 12, huius cubus eſt 1728, quo diuiſo per 36, triplum aggregati ex ſecundo, & tertio plus 2, & 16, primo nimirum, & quarto, nempe per 54, fit quotiens 32, quantum facit primus ductus in quartum, vel ſecundus in tertium. Hoc alibi demonſtrauimus. Dico ſecundam, & tertiam ſimul vnitas eſſe 1 R, quarta, & prima ſimul erunt 120 — 1 R, cubus ex 1 R, eſt 1 C, & triplum 1 R, eſt 3 R, huic addatur 120 — 1 R, & fit 120 † 2 R, per hoc autem diuidatur 1 C, & fit $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, hoc autem æquatur producto, ex prima in quartam, vel ex ſecunda in tertiam. Modo diuidatur 1 R, aggregatum ex ſecunda, & tertia in duas partes tales, vt vna in aliam ducta faciat $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$. Sumatur dimidium numeri radicum, & eſt $\frac{1}{2}$ R, eius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ Q, ab hoc ſubtrahatur $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, numerus quem facere debet, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, facta ſubtractione huius $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$ ab $\frac{1}{4}$ Q, remanet $\frac{120\,Q - 2\,C}{480\,\dagger\,8\,R}$, *Poſitio, & reſolutio.*

$$\frac{1}{4}\,Q - \bowtie \frac{1\,C}{120\quad\dagger\,2\,R}$$

120 Q † 2 C
4 C
120 Q - 2 C
120 Q - 2 C
480 † 8 R

Aduertendum autem dignitatem intelligi in numeratore. Si verò illa fractio $\frac{120\,Q - 2\,C}{480\,\dagger\,8\,R}$, reducatur ad minimos terminos, facta, comuni diuiſione per 4, remanet $\frac{30\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, ex hoc autem reſiduo ſumatur latus quadratum, & eſt ℞ $\frac{(30\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120\,\dagger\,2\,R)}$, hoc autem addatur, & ſubtrahatur ipſi $\frac{1}{2}$ R, & fit pro ſecunda parte $\frac{1}{2}$ R — ℞ $\frac{(30\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120\,\dagger\,7\,R)}$.

Tertia erit $\frac{1}{2}$ R † ℞ $\frac{(30\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120\,\dagger\,2\,R)}$. Ad indagandam primam; & quartam. Diuidatur 120 — 1 R, in duas partes ea lege, vt inter ſe ductæ faciant $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$. Sumatur dimidium ipſius 120 — 1 R, & eſt 60 — $\frac{1}{2}$ R, huius quadratum eſt 3600 — 60 R † $\frac{1}{4}$ Q, ex hoc autem ſubtrahatur numerus efficiendus $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, & remanet 432000 — 90 Q ∸ $\frac{1}{4}$ C; $\frac{1\,C}{120\,\dagger\,2\,R}$, ſubtrahatur ex $\frac{3600 - 60\,R\,\dagger\,\frac{1}{4}\,Q}{1}$.

$$7200\ R - 120\ Q \maltese \tfrac{1}{2}\ C$$
$$7200\ R \maltese 30\ Q$$

$$432000 \quad - 90\ Q \maltese \tfrac{1}{2}\ C$$
ſubtrahatur $1\ C$

remanet $432000 \quad - 90\ Q - \tfrac{1}{2}\ C$

Itaque remanebit $\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}$, ex hoc ſumatur radix quadrata, & eſt ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$, hęc autem addatur, & ſubtrahatur ipſi $60 - \frac{1}{2}\ R$. Prima erit $60 - \frac{1}{2}\ R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Quarta erit $60 - \frac{1}{2}\ R \dagger$ ℞ $\left(\frac{342000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ R}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Erit ob id numerus 120, diuiſus in quatuor partes in continua proportione, quarum prima $60 - \frac{1}{2}\ R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$.

Secunda $\frac{1}{2}\ R -$ ℞ $\left(\frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Tertia $\frac{1}{2}\ R \dagger$ ℞ $\left(\frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Quarta $60 - \frac{1}{2}\ R \dagger$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Harum ſumma eſt 120, ſiquidem †, & —, auferuntur, ſeu ſubtrahuntur, & remanet 0.

Reliquum eſt, vt videamus, num omnium quatuor partium quadrata ſimul iuncta efficiant 7380.

Pars prima. Prima eſt $60 - \frac{1}{2}\ R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$. Huius quadratum eſt $3600 - 60\ R \dagger \frac{1}{4}\ Q \dagger \frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}$.

Pars ſecunda. Secunda eſt $\frac{1}{2}\ R -$ ℞ $\left(\frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$.

Huius quadratum eſt $\frac{1}{4}\ Q \dagger \frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}$.

Pars tertia. Tertia eſt $\frac{1}{2}\ R \dagger$ ℞ $\left(\frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$.

Huius quadratum eſt $\frac{1}{4}\ Q \dagger \frac{30\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}$.

Pars quarta. Quarta eſt $60 - \frac{1}{2}\ R \dagger$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}\right)$.

Huius quadratum $3600 - 60\ R \dagger \frac{1}{4}\ Q \dagger \frac{432000 - 90\ Q - \frac{1}{2}\ C}{120 \dagger 2\ R}$.

Horum ſumma eſt $7200 - 120\ R \dagger 1\ Q \dagger \frac{864000 - 120\ Q - 2\ C}{120 \dagger 2\ R}$.

Reducantur ad fractiones.

$$14400\ R - 240\ Q \dagger 2\ C$$
$$864000 - 14400\ R \dagger 120\ Q$$

Huic autem $864000 - 120\ Q \dagger 2\ C$ Numerator.
addatur $864000 - 120\ Q - 2\ C$

$\frac{1728000 - 240\ Q}{120 \dagger 2\ R}$, quadratorum ſumma.

Hæc autem ſumma æquatur propoſito numero 7380, & æquatio ſtabit hoc modo.

do. $\frac{1728000 - 240\,Q}{120 \dagger 2\,R} = \frac{7380}{1}$. Cæterum antequam vlteriùs progrediamur iuuabit aduertere nonnulla circa ſuperiores operationes.

Multa hic cõſiderantur circa ſupra poſitas operationes.

Cum itaque diceremus primam partem eſſe.

60 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$, cuius quadratum eſſe diceba-mus 3600 — 60 R † $\frac{1}{4}$ Q † $\frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 \dagger 2\,R}$.

Aduertendum eſt 60 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$, in ſe multiplicatum facere ne dum 3600 — 60 R † $\frac{1}{4}$ Q † $\frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 \dagger 2\,R}$.
Sed etiam aliquid aliud huic addendum; ſiquidem eſt.
℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$, ſi autem ducatur in ſe fit $\frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 \dagger 2\,R}$.

At verò ſi ℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$, multiplicetur per hoc, nimirum 60 — $\frac{1}{2}$ R, fit quædam radix ligata, affecta ſigno —.

Verum enim verò ex 60 — $\frac{1}{2}$ R, in ſe fit quidem 360 — 60 R † $\frac{1}{4}$ Q; at verò dum 60 — $\frac{1}{2}$ R † ℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$

Ducitur in ſe, fiunt illa producta, vt ſupra dicebamus.

Hoc tantum diſcriminis intercedit; quod dum multiplicatur
℞ $\frac{(432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C)}{(120 \dagger 2\,R)}$, per 60 — $\frac{1}{2}$ R; fit radix ligata affecta ſigno †.

At verò quia in additione †, & —, fit ſubtractio, ob id prętermiſimus illa producta, quia quantum ad hanc additionis operationem, perinde eſt ac, ſi non adeſſent. Quantum enim ad additionem, quam in hac operatione intendimus, non alia adhibentur numeri quam ſupradicti; reliqui autem pro ob ſigna †, & —, de medio tolluntur, mutuo enim ſe interimunt.

Cum itaq; ſit æquatio huiuſmodi, quemadmodum dicebamus ſuperiùs nimirum, vt hic cernere licet inter fractionem hanc ſcilicet $\frac{1728000 - 240\,Q}{120 \dagger 2\,R}$, & hanc $\frac{7380}{1}$.
$\frac{1728000 - 240\,Q}{120 \dagger 2\,R} = \frac{7380}{1}$.

Proinde erit æquatio facta multiplicatione per crucem:
1728000 — 240 Q = 885606 † 14760 R, per Antitheſin
885600

---

240 Q = 842400 — 14760 R, & rurſus 240 Q † 14760 R = 842400.

Diuiſione inſtituta per 240 Q, fit 1 Q = 3510 — 61 $\frac{1}{2}$ R, & per Antitheſin fit 1 Q † 61 $\frac{1}{2}$ R = 3510.

$$\begin{array}{r} 30\,\frac{3}{4} \\ 30\,\frac{3}{4} \\ \hline 945\,\frac{9}{16} \\ 3510 \\ \hline 4455\,\frac{9}{16} \end{array}$$

Huius autem numeri 4455 $\frac{9}{16}$, radix eſt 66 $\frac{3}{4}$; ab hoc numero ſubtrahatur 30 $\frac{3}{4}$, dimidium numeri radicum, & remanet 36, 1 R, pretium, itaque aggregatum ex ſecunda, & tertia erit 36.

Quoniam

Supradictorũ explicatio. Quoniam autem aggregatum ex prima, & quarta ponebatur 120 — 1 R, ſi ex 120, ſubtrahatur 36, remanebit aggregatum ex prima, & quarta nempe 84.
Ad deſtinguendas ſecundam, & tertiam ſumatur 46656, cubus ex 36, ſumma ipſarum, ſumaturq; 108, triplum ipſius 36, ipſi verò adiungatur 84, & fit 192, per quem diuidatur 46656, vt fiat quotiens 243. Itaque ſecundam, & tertiam aſſequamur facili negotio.
Per multiplicationem ſecundę in tertiam debet fieri 243, eſto ſecunda 1 R, tertia erit 36 — 1 R.

36	
36	
216	
108	
1296	
36	
7776	
3888	
46656	
46656	243
192	

$$\frac{1\ R}{36\ R - 1\ Q}$$

Erit igitur 36 R — 1 Q = 243, & per Antitheſin ſi placet 36 R — 1 Q = 243.

18	324
18	243
324	81
	9

Hoc autem numero 9, ſubtracto ex 18, dimidio numeri radicum remanet 9, pro ſecundo numero, addito ad 18, fit 27, & eſt tertius numerus.
Primus, & quartus habetur ſuppoſita eorum ſumma 84.
Primus eſto 1 R, quartus erit 84 — 1 R.

$$\frac{1\ R}{84\ R - 1\ Q}$$

Ob id 84 R — 1 Q = 242, per Antitheſin 84 R — 1 Q = 243.
Itaque 3, eſt primus, & 81, eſt quartus; erunt igitur.

			42	
			42	
Primus numerus.	Primus 3, cuius Q, eſt	9	1764	42
Secundus.	Secundus 9, cuius Q, eſt	81	243	39
				3 remanet
Tertius.	Tertius 27, cuius Q, eſt	729	1521	
Quartus.	Quartus 81, cuius Q, eſt	6561	39	

Summa	120	7380	
Summa partium	120	7380	Summa quadratorum

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VIII.

Datum numerum diuidere in duas partes, ea lege vt differentia quadratorum partium, habeat datam rationem ad rectangulum factum, ſeu comprehenſum ſub ipſis partibus.

Datus ſit numerus 12, & proportio, vt 4, ad *6*. Pars maior eſto 1 R, minor erit 12 - 1 R, quæ ducta in 1 R, facit 12 R — 1 Q, & eſt rectangulum ſub partibus comprehenſum. Quadratum autem partis minoris eſt 1 Q, minoris verò eſt 144 — 24 R † 1 Q.

Rectangulum autem debet habere ad exceſſum quadratorum, qui eſt 24 R — 144; rationem vt *6*, ad 4, quamobrem exceſſus iſte multiplicetur per *6*, & fit 144 R — 864, & rectangulum multiplicetur per 4, & fit 48 R — 4 Q, & hæc erunt æquationis extrema. Proinde erit æquatio huiuſmodi 144 R — 864 ⩵ 48 R — 4 Q, & per Antitheſin erit 4 Q, ⩵ 864 — *96* R, omnibus autem applicatis ad 4, fiet 1 Q ⩵ 216 — 24 R, ſeu.

Æquatio huiuſmodi 1 Q † 24 R ⩵ 216; cuius radix quadrata eſt ℞ 360 — 12, qua ſubtracta ex 12, remanet 24 — ℞ 360, pars minor, cum illa eſſet pars maior.

12
12
———
144
216
———
360
℞ 360 — 12

24 — ℞ 360
24 — ℞ 360
———
— ℞ 207360 † 360
576 — ℞ 207360
———
936 — ℞ 829440. Quadratum ex minori.

℞ 360 — 12
24 — ℞ 360
———
— 360 ✠ ℞ 51840
℞ 207360 — 288
———
℞ 466560 — 648 Rectangulum.
℞ 360 — 12
℞ 360 — 12
———
— ℞ 51840 ✠ 144
360 — ℞ 51840
144
———

504 — ℞ 207360	Q ex maiori parte
936 — ℞ 829440	Q ex minori

Exceſſus ℞ 207360 — 432

Vt

Vt 4, ad 6, ita ℞ 207360 — 432 Ad ℞ 466560 — 648.

	36 6	16 4
	℞ 7464960 — 2592	℞ 7464960 — 2592
207360	466560	207360
36	16	829440
1244160	2799360	8294400
622080	466560	82944
		186624
7464960	7464960	41472
		165888
		171992678400
		. . . . . .
		4 1 4 7 2 0

Quadratum partis maioris eſt 504 — ℞ 207360.
Quadratum partis minoris eſt 936 — ℞ 829440.
Horum differentia eſt. ℞ 207360 — 432.
Rectangulum ſub partibus eſt ℞ 466560 — 648.
Vt autem eſt 4, ad 6, ita eſt ℞ 207360 — 432 ad ℞ 466560 — 648.

414720	207360
2	829440
829440	1036800
	829440
	207360
	℞ 207360

PROBLEMA IX.

R*Eperire numerum, cuius quadratum multiplicatum per 3, productoque additis 80, ex ſumma verò radix cubica extracta ſeruetur; huic ſi addatur ſextuplum numeri inueniendi, faciat* 80.

Poſitio, & reſolutio. Queſitus numerus eſto 1 R, huius quadratum 1 Q, quod ducatur in 3, & fit 3 Q, huic autem addatur 80, & fit 3 Q † 80, ex hac verò ſumma extrahatur radix cubica, & eſt ℞ C (3 Q † 80), huic addatur 6 R, ſextuplum numeri reperiendi, & fiet ℞ C (3 Q † 80) † 6 R, hoc autem æquabitur 80, & per Antitheſin ℞ C (3 Q † 80) ⊐ 80 — 6 R, ſummantur extremorum Cubi qui ſunt 3 Q † 80, & 512000 — 115200 R † 8640 Q — 2160, & ſunt inter ſe æquales.

Tota autem operatio in ſeguenti pagina conſpicitur; deuenitur enim ad hanc æquationem 512000 — 115200 R † 8640 Q — 216 C ⊐ 3 Q † 80.

Et per Antitheſin, fit æquatio 511920 — 115200 R † 8540 Q — 216 ⊐ 3 Q, deinde 511920 — 115200 R — 21 C ⊐ 8637 Q. Deinde 216 C † 115200 R — 8637 Q ⊐ 511920, & peracta operatione, vt vides, fit 1 C † 24883200 R — 8637 Q ⊐ 23884139520. Oportet autem radicem extrahere, ex hac præſenti æquatione. Cæterum ad illam æquationem hoc modo peruentum eſt, cum enim per Antitheſin æquatio haberetur 216 C † 115200 R — 863 Q ⊐ ; primò ſumatur 10077696, numerus diuidendus per 216, numerum cuborum, & fit quotiens 23884139520, & hic eſt numerus abſolutus in æquatione.

1 R

1 R   1 R
1 R   6
1 Q   6 R
3
3 Q
80

3 Q ✣ 80
℞ C (3 Q ✣ 80)
6 R

℞ C (3 Q ✣ 80) ✣ 6 R

80 — 6 R
80 — 6 R

— 480 R ✣ 36 Q
6400 — 480 R

6400 — 960 R ✣ 36 Q
80 — 6 R

— 38400 R ✣ 5760 Q — 216 C
512000 — 76800 R ✣ 2880 Q

512000 — 115200 R ✣ 8640 Q — 216 C = 3 Q ✣ 80
80   80

511920 — 115200 R ✣ 8640 Q — 216 C = 3 Q
216 C   216 C

511920 — 115200 R ✣ 8640 Q = 3 Q ✣ 216 C
3 Q

511920 — 115200 R ✣ 8637 Q = 216 C
216 C = 511920 — 115200 R ✣ 8637 Q
216 C ✣ 115200 R = 511520 ✣ 8637 Q
216 C ✣ 115200 R — 8637 Q = 511920
216   216   216   216
46656 Quadratum ex 216
216

10077696 Cubus ex 216 multiplicetur
per 511920 numerum radicum

5158974136320 Productum diuidendum per 216, & fit quotiens.
hic numerus 23884139520

Deinde ducatur 8637, numerus quadratorum in 216, numerum cuborum, & fit productum 1865592, diuidatur hic numerus per 216, fit quotiens 8637, idem numerus, & eſt numerus quadratorum.

multiplica 8637, num. Quadratorum.
per hunc 216, num. Cuborum.

1865592. Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 8637, idem numerus.

115200, numerus R.
46656 Q, ex 216,

5374771200. Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 24883200.

Ad ſequens Paradigma. Hæc præmittenda ſunt.

PRopoſita æquatio eſt 1 C † 24883200 R — 8637 Q ⩵ 23884139520.

Cum deprehenſum fuerit radicem vniuerſam ex quatuor ſingularibus lateribus conſtare, quoniam eadem eſt lex ſeruanda, ac ſi binomia, foret radix, quandoquidem priora ſingularia latera vnius munere funguntur, perinde erit, ac ſi radix intelligatur binomia, eaque ſit a † e. Intelligatur autem b pl. pro coefficiente ſub latere, & d, pro coefficiente ſub quadrato. Quadratum ex a † e, eſt a^2 † 2 a e † e^2, quo ducto in d, fit d a^2 † 2 d a e † d e^2. Cubus autem eſt a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3; cui intelligi debet adiectum productum ex b pl. in a † e, nempe b pl. a † b pl. e; fitque aggregatum a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. a † b pl. e, ex quo ſubducendum eſt d a^2 † 2 d a e † d e^2, & remanet a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. a † b pl. e — d a^2 — 2 d a e — d e^2; quod ſi comparationis homogeneum intelligatur z ſol. illud erit huic æquale. Et per Antitheſin, fiet a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. a † b pl. e — 2 d a e — d e^2 ⩵ z ſol. † d a^2.

Theoria ſpecioſa; in gratiam ſubſequentis æquationis.

Et rurſus 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 † b pl. e — 2 d a e — d e^2 ⩵ z ſol. † d a^2 — a^3 — b pl. a.

Inquiritur diuiſor.

Itaque ſit z ſol. addatur d a^2; ex aggregato autem auferatur primò a^3; deinde b pl. a; quod ſupereſt eſt applicandum ad 3 a^2 † 3 a † b pl. — 2 d a — d, vnde elicito latere ſingulari primo, ſi illud ducatur, in coefficientem ſub quadrato, productum verò addatur comparationis homogeneo, ex aggregato ſubducatur cubus lateris ſingularis primi; & ex reſiduo ſubtrahatur, quod fit ex ſingulari latere primo in coefficientem ſub latere, quod ſupereſt eſt applicandum ad triplum quadratum lateris primi, plus triplo latere primo, plus coefficiente ſub latere, minus producto ex duplo latere primo, in coefficientem ſub quadrato, minus eodem coefficiente, ita vt habeatur pro diuiſore.

† 3 a^2
† 3 a
† b pl.
— 2 d a — Congruis ſedibus collocentur.
— d

Atque ita procedendum eſt hoc adhibito diuiſore, ad indaganda ſingularia latera adhibitis prioribus, ſi duo fuerint pro vno, ſi tria itidem pro vno ita, vt ſæpedictum fuit, cum priora quotquot fuerint comparatione ſubſequentis, vnius munere fungantur.

Deinde

2 5 9 2

1 C ✠ 24883200 R — 8637 Q ⫧ 2 3884139520

8

15884
34548

50432139
49766400

00665739
172740

17939739
215925

200989895
124416000

76573895
60

165
150

157
125

32389
3886650

39190395
699597

398899922
223948800

174951152
16875

6201
6075

1261
729

532220
8947932

900115 40
34548

Secunda indagatur figura.

Deinde ducatur 115200, numerus radicum in 46656, quadratum ex 216, & 5374771200, quo diuiſo per 216, prouenit 24883200, & eſt numerus radicum in æquatione. Eſt itaque æquatio 1 C † 24883200 R — 8637 Q ⫧ 23884139520. Huius autem æquationis radix extrahitur hoc modo. Facta ſignatione per puncta ſubtus, vt vides, iuxta naturam radicis cubicæ; quæratur latus cubicum numeri 23, eritque 2, cuius cubus eſt 8; ſcribatur ſub 23, nempe ſub puncto, & ſubtrahatur à 23, remanet 15, huic intelligantur aſſociatæ 8,8,4, ſequentes figuræ, vt fiat 15884, ducatur 8637, numerus quadratorum in 4, quadratum primæ figuræ 2, & productum 34548, addatur ipſi 15884, & fit 50432, huic intelligantur aſſociatæ 1,3,9, figuræ ſequentes, vt fiat 50432139, à quo ſubtrahatur 49766400, numerus productus ex multiplicatione numeri 24883200, in primam figuram, & remanet 665739; Ad indagandam ſecundam figuram, ſumatur 12, triplum quadratum primæ figuræ 2, eique intelligatur aſſociatum 6, triplum primæ figuræ iam dictæ, vt fiat 126, huic addatur 24883200, numerus radicum, vt fiat 37483200.

Deinde multiplicetur 8836, numerus quadratorum per 4, duplum primæ figuræ 2, vt fiat 34548, cui addatur 8837, numerus quadratorum ea lege, vt hic eum antecedat vnius figuræ ſpatio, atque fiat 354117, quo ſubtracto ex 37483200, remanet 2071500, & hic eſt diuiſor, quo aſſequimur ſecundam figuram quæſitam. Modo ducatur 8637, numerus quadratorum in 4, duplum primæ figuræ 2, & fit 34548, hic ducatur in 5, ſecundam figuram, & fit 172740, qui addatur ad 665739, ita tamen, vt 565739, duabus figuris dextrorſum præcedat, fit 17939739, modo ſumatur 8637, numerus quadratorum, ducatur in 25, quadratum ſecundæ figuræ, & fit 215925, numerus quoque addendus numero 1793973, vt fiat 2009898, huic intelligantur aſſociatæ duę ſequentes figuræ 9, 5, & fit 200989895, modo ducatur 24883200, numerus radicum in 5, ſecundam figuram, & fit

124416000, ſubtrahatur 200988895, & remanet 76573895; ſumatur triplum quadratum primæ figuræ 2, nempe 12, ducatur in 5, fit 60, ſubtrahatur à 76, remanet 16, cui annectatur 5, vt fiat 165, ſumatur 6, triplum ipſius 2, primæ figuræ ducatur in 25, quadratum 5, ſecundæ, fit 150, ſubtrahatur à 165, remanet 15, cui annectatur ſequens figura 7, vt fiat 157, à quo ſubducto 125, cubo ex 5, remanet 32, huic aſſociatæ intelligantur ſequentes figuræ 3, 8, 9, vt fiat 32389.

```
9 0 0 4 6 0 8 8
4 9 7 6 6 4 0 0
———————————————
4 0 2 7 9 6 8 8
4 0 2 4 8 6
———————————————
0 0 0 3 1 0 8
      3 1 0 8
———————————————
0           0
            8   Reliqua Figura.
            8   Cubus vltimæ figuræ lateris.
———————————————
            0
```

```
 34548
     4
——————
172740   numerus addendus.
——————
  8637
    25
——————
 43185
17274
——————
 21595   numerus addendus.
```

Tertia indagatur figura. Nunc autem paretur diuiſor ad indagandam tertiam figuram non diſſimili modo, atque reperiatur ea 9, in hanc ducatur 431850, numerus factus per multiplicationem 8637, numeri quadratorum in 50, duplum ipſius 25, & fiat 3886750, addatur ad 32389; Sed ea lege, vt vides, & fiet 39190395, ducaturque 8637, in 81, quadratum ex 9, vt fiat 699597.

Addatur

24883200	
9	
223948800	
2592	Radix
2592	
5184	
23328	
12960	
5184	
6718464	
2592	Quadratum
13436928	
60466176	
33592320	
13436928	
17414258688	Cubus
64497254400	
81911513088	
58027373568	
23884139520	

Addatur vt fiat 398899922, ducatur 24883200, numerus radicum in 9, tertiam figuram, fit 223948800, quo ſubtracto ex 398899922, remanet 174951122, ſumatur 625, quadratum ex 25, & prima figura, eius triplum, eſt 1875, ducatur in 9, tertiam figuram, quę reſpectu duarum ſimul ſumptarum habet rationem vnius, & fit 16875, hic numerus ſubtrahatur de 17495, & remanebit 620, cui intelligatur aſſociata ſequens figura 1, vt fiat 6201, à quo ſubtrahatur 6075, numerus productus à triplo numeri 25, in 81, quadratum ex 9, & remanet 126, cui intelligatur annexa ſequens figura 1, vt fiat 1261, à quo ſubtrahere oportet 729, cobum ex 9, & remanebit 532, huic intelligantur annexæ ſequentes figuræ 2, 2, 0, vt fiat 532220.

Paretur diuiſor ad indagandam quartam figuram, quæ reperiatur 3. Duplum numeri 259, eſt 518, ducatur in hunc numerum, numerus 8637, nempe numerus quadratorum, fit 4473966, hic ducatur in 2, poſtremam figuram, fit 8947932; addatur ad 532220; Sed ad eum modum; vt vides, fit 90011540; ducaturque 8637, in 4, quadratum huius poſtremæ figuræ, fit 34548, addatur, vt vides, fit 90046088, ab hoc ſubtrahatur 49766400, numerus productus à multiplicatione numeri 24883200, nempe numeri radicum, in hanc poſtremam figuram, & remanebit 40279688. Deinde quadratum ex 259, eſt 67081, huius triplum eſt 201243; ducatur in 2, poſtremam figuram fit 402486, ſubtrahatur de 402796, remanet 310, annexa intelligatur ſequens figura 8, vt fiat 3108, à quo ſubtrahatur 3108, numerus factus à multiplicatione numeri 259, per 3, & producti 777, per 4, quadratum ex 2, poſtrema figura 2. Denique ſubtrahatur 8, cubus huius poſtremæ figuræ à reliqua figura 8, & nihil remanet.

Quarta indagatur figura.

Numerus autem 2592, ſatisfacit Quæſtioni; propterea quod diuiſo ipſo per 216, vt par eſt ſecundum Analyſeos præcepta, vt notauimus de Iſomoeria tractantes, fit quotiens 12, cuius quadratum eſt 144, quod ſi ducatur in 3, fit productum 512, cuius latus cubicum eſt 8, ſi verò idem numerus 12, multiplicetur per 6, ſic enim

Numerus 2592. Quæſtioni ſatisfacit.

quæſtio

quæſtio præcipit ſit 72, qui quidem numerus additus numero 8, iam ſeruato, facit numerum 90, prout Problema requirebat.

PROBLEMA X.

QVatuor numeros reperire in continua ratione, vt primus ſit 8, ſecundus ſit cum quarto 39, ſeu conficiat ſecundus iunctus quarto 39, quærantur ſinguli.

Primus cum tertio eſto 1 R, huius cubus eſt 1 C, à quo ſubtrahatur 8 Q, productum ex 8, primo numero ex quatuor quæſitis in 1 Q, remanet 1 C — 8 Q. Hoc autem ita eſſe oſtenditur, ex eo quia, ſi ſumma ex primo, & tertio, ex quatuor numeris proportionalibus, cubicè multiplicetur, & ex cubo hoc numero ſubtrahatur, ille numerus, qui prouenit, multiplicata ſumma primi, & tertij, in ſe ipſam, deinde multiplicata per primum numerum ex quatuor quæſitis numerus proueniens æquabitur quadrato ſummæ ex ſecundo, & quarto; quadrato inquam ducto in primum numerum ex quatuor quæſitis. Vt exempli gratia Supponamus quatuor iſtos numeros quæſitos eſſe 3, 6, 12, 24, erit 15, ſumma ex primo, & tertio, quæ ſi cubicè multiplicetur facit 3375, ab hoc autem numero ſi ſubtrahatur 675, numerus proueniens per multiplicationem 3, primi numeri, in quadratum ſummæ ex primo, & tertio, nempè in 225, remanet 2700; hic autem numerus æquatur numero, qui prouenit ex multiplicatione 3, primi numeri in quadratum ſummę ex ſecundo, & quarto numero.

Poſitio, & reſolutio. Itaque dicamus ſummam ex primo, &tertio eſſe 1 R, huius cubus eſt 1 C, à quo ſi ſubtrahatur quadratum ſummæ ex primo, & tertio, nempe 1 Q, ductum in 8, primum numerum, & eſt 8 Q, remanet 1 C — 8 Q, & erit 1 C — 8 Q = 12168, nam 12168, eſt numerus, qui prouenit ex multiplicatione quadrati ex 39, ſumma ex ſecundo, & quarto; nempe ex multiplicatione 1521, in 8; his enim inuicem ductis fit 12168. Reliquum eſt; vt radix extrahatur. Idque vt exequamur, fiat ſignatio per puncta in numero 12168, vt exigit cubica radix, deinde eruatur radix cubica ex 12, primo numero ſignato per punctum, eritque 2, huius cubus eſt 8, quo ſubtracto ex 12, remanet 4; notetur, vt vides in paradigmate, & ei annectatur 1. figura ſequens; modo ſumatur 4, quadratum ex 2, prima figura, ducaturque in 8, numerum quadratorum fit 32, quo addito ad 41, fit 73, huic intelligantur aſſociatæ duæ ſequentes figuræ 6, 8, & fiet 7368, duplicetur 2, latus cubicum numeri 12, ſeu prima figura, & fit 4; hic ducatur in 8, numerum quadratorum, & fit 32, hic ducetur in 6, ſecundam figuram &c.

Productum illud ex duplo primæ figuræ in numerum quadratorum dicitur planum expletionis.

Hæc

Hæc autem ſic inueuitur. Sumatur triplum quadrati primæ figuræ 2, & eſt 12, cui addatur 6, itaut dextrorſum præcedat vnius figuræ ſpatio, ab hoc aggregato auferatur productum ex duplo latere primo in numerum quadratorum, itemq; numerus quadratorum, fit enim diuiſor, per quem diuidere oportet 7368, vt fiat quotiens 6; modo ſi 32, vt dicebamus factus per multiplicationem 8, numeri quadratorum in 4, duplum primæ figuræ, fit 192, quo addito ad 736, fit 928, cui intelligatur annexa ſequens figura 8, vt fiat 9288. *Nota methodum indagãdi diuiſorem.*

```
                      2 6
1 C — 8 Q = 12168
                      .   .
                      8
                    ------
                      41
12                    32
  6                 ------
------                7368
32                    192
  8                 ------
------                9288
9592 Diuiſor           288
                    ------
                      9576
                      72
                    ------
                      2376
                      216
                    ------
                      216
                      216
                    ------
                      0 0
```

Deinde ducatur 36, quadratum ex ſecunda figura 6, in 8, numerum quadratorum, & fit 288, quo addito ad 288, figuras ſexiſtentes in numero 9288, fit 9576; namque tantum fit ſi 288, addatur ad 9588. Ab hoc autem primo oportet ſubtrahere triplum quadratum primæ figuræ, & eſt 12, quod ducendum in 6, ſecundam figuram, fiat 72, facta ſubtractionem remanet 2376, ab hoc ſubtrahere oportet 108, triplum quadrati ſecundę figuræ ductum in 2, primam figuram; nempe 216. Vel ſubtrahere oportet 216, numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ in triplum primæ; factaque ſubtractione remanet 216, à quo tandem ſubtrahatur 216, cubus numeri 6, ſecundæ figuræ; erit itaque 26, numerus, & radix quæſita. Primus igitur numerus cum tertio faciunt 26, cum autem primus datus ſit 8, tertius erit 18, at verò ſunt in ratione continua numeri queſiti. Si igitur ſcimus primum, & tertium, ſcimus ſummam ex ſecundo, & quario, ſecundus, & quartus noti fient ac proinde quæſiti numeri erunt 8, 12, 18, 27.

Eſt porro æquationis Theoria a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3 — b pl. a^2 — 2 b plae — be^2 = z ſol. vnde facta Antitheſi &c. colligetur diuiſor † 3 a^2 † 3 a — 2 b pl. a — b pl. *Theoria ſuperioris æquationis.*

PROBLEMA XI.

Numerum reperire, cuius cubo, ducto in datum numerum, & à producto ſubtracto eodem numero quæſito multiplicato itidem per datum aliquem numerum, remaneat determinatus numerus.

Sit iniunctum reperire numerum cuius cubo, ducto in 5, & à producto ſubtracto eodem numero multiplicato per 3, remanet 87802. *Poſitio, & reſolutio.*

```
                    1 3 0
1 C — 15 R = 2195050
                    .  .  .
                    1
                  --------
                  119550
```

Quæſitus numerus eſto 1 R, eius cubus eſt 1 C, qui ductus in 5, facit 5 C, à quo ſi ſubtrahatur 3 R, numerus productus, à quæſito numero ducto in 3, remanet 5 C — 3 R, & hoc æquabitur 87802.

Inſtituatur Paraboliſmus, & erit 1 C — $\frac{3 R}{5}$ = $\frac{87802}{5}$, reducantur omnia ad integra Iſomœtiæ beneficio. Quoniam R, diſtat à C, per 2, exponentem quadrati,

debet

debet multiplicari 3, numerator $\frac{1}{3}$ R, per 25, quadratum ex 5, & fit 75, quo diuiſo per 5, fit 15, & erit 1 C — 15, debet autem 87802, multiplicati per 125, cubum ex 5, quoniam N, diſtat a C, per 3, exponentem cubi, & prouenit 10975250. quo diuiſo per 5, prouenit 2195050; erit igitur æquatio 1 C — 15 R = 2195050. Huius autem radix eſt 130, quia verò per Iſomœriam inſtituta fuit multiplicatio per 5, ideo 130, diuidatur per 5, & prouenit 26, erit igitur quæſitus numerus 26.

PROBLEMA XII.

Propoſitum numerum in duas partes diuidere, vt quod ex multiplicatione partium, fit diuiſum per partium differentiam reddat datum numerum.

Poſitio, & reſolutio. Sit iniunctum diuidere 20, in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuiſum per partium differentiam reddat 5 $\frac{1}{3}$. Pars vna eſto 1 R; pars altera erit 20 — 1 R, hæ partes inuicem multiplicatæ producunt 20 R — 1 Q. Iſtarum autem partium 1 R, & 20 — 1 R, differentia eſt 2 R — 20, ſubtracto 20 — 1 R, de 1 R, remanet 2 R — 20, per hanc differentiam ſi diuidatur illud productum 20 R — 1 Q. Fit quotiens $\frac{20\ R\ -\ 1\ Q}{2\ R\ -\ 20}$ = 5 $\frac{1}{3}$, & $\frac{20\ R\ -\ 1\ Q}{2\ R\ -\ 20}$, æquatur 5 $\frac{1}{3}$, & peracta operatione per Antitheſin fit æquatio 3 Q — 28 R = 320, inſtituto paraboliſmo reducitur ad hanc 1 Q — 9 $\frac{1}{3}$ R = 106 $\frac{2}{3}$. Huius autem æquationis radix eſt 16. Namque dimidium numeri radicum eſt $\frac{14}{3}$, huius quadratum eſt $\frac{196}{9}$, hoc addito ad 206 $\frac{2}{3}$, ſeu $\frac{320}{3}$, fit $\frac{3468}{27}$, hæc fractio reducta ad minores terminos, nempe inſtituta communi diuiſione per 3, euadit $\frac{1156}{9}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{34}{3}$, nempe 11 $\frac{1}{3}$, ad hanc autem ſi addatur 4 $\frac{2}{3}$, dimidium numeri radicum, fit 16, radicis pretium, & pars vna; alia erit 20, minus 16, nempe 4, & ſatisfaciunt Problemati.

20 — 1 R
1 R
―――――
20 R — 1 Q

1 R
20 — 1 R
―――――
2 R — 20

$$\frac{20\ R - 1\ Q}{2\ R - 20} = \frac{16}{3}$$

60 R — 3 Q = 32 R — 320
―――――   ―――――
6 R — 60   6 R — 60
60 R — 3 Q = 32 R — 320
60 R = 32 R — 320 + 3 Q
60 R + 320 = 32 R + 3 Q
32 R
――――――――――
28 R + 320 = 3 Q
3 Q — 28 R = 320
1 Q — 9 $\frac{1}{3}$ R = 106 $\frac{2}{3}$

1 Q — 9 $\frac{1}{3}$ R = 106 $\frac{2}{3}$
320 × 196
3   9
2880
588
――
3468 ſeu 1156
――
27   9
1156
――
34
――
3

QVARTVS

QVARTVM EXEMPLORVM GENVS.

Ad hoc exemplorum Genus ea pertinent Problemata, in quorum reſolutione ſecundæ Radices occurrunt; hunc enim ordinem præſentis Capitis initio polliciti ſumus.

PROBLEMA I.

TRes numeros reperire, quorum primus, cum 68, duplus ſit ſecundi, & tertij. Secundus cum 92, triplus ſit primi, & tertij. Tertius autem cum 88, ſit quadruplus primi, & ſecundi.

Primus eſto 1 R, & quoniam primus, cum 68, duplus eſt ſecundi, & tertij; proinde $\frac{1}{2}$ R † 34; erunt ſecundus, & tertius. Itaque primus erit 1 R; ſecundus, & tertius erit $\frac{1}{2}$ R † 34, qui ſimul conficiunt 1 $\frac{1}{2}$ R † 34; erunt omnes tres igitur ſimul 1 $\frac{1}{2}$ R † 34. Secundus autem dicatur eſſe 1 A, quo ſubtracto ab 1 $\frac{1}{2}$ R † 34, remanebit primus, & tertius 1 $\frac{1}{2}$ R † 34 — 1 A. Quoniam autem ſecundus cum 92, triplus eſt primi, & tertij, ob id 1 A † 93, debet eſſe triplus primi, & tertij, ſcilicet ipſius 1 $\frac{1}{2}$ R † 34 — 1 A, proinde 1 $\frac{1}{2}$ R † 34 — 1 A, ducatur in 3, & fiet 4 $\frac{1}{2}$ R † 102 — 3 A, & huic æquabitur 1 A † 92, ſi verò vtrique parti addantur 3 A; erit æquatio 4 $\frac{1}{2}$ R † 102 = 4 A † 92. Vtrinque ablatis 92; remanebit æquatio 4 $\frac{1}{2}$ R † 10 = 4 A. Quoniam igitur 4 A, æquantur 4 $\frac{1}{2}$ R † 10, proinde 1 A, æquabitur 1 $\frac{1}{8}$ R † 2 $\frac{1}{2}$. Et hic erit numerus ſecundus, nimirum 1 $\frac{1}{8}$ R † 2 $\frac{1}{2}$. Tertius autem ponatur 1 B, ergo primus, & ſecundus erunt 1 $\frac{1}{2}$ R † 34 — 1 B. Quoniam autem tertius cum 88; debet eſſe quadruplus primi, & ſecundi, erit 1 B † 88, æqualis 6 R † 136 — 4 B, eſt enim 6 R † 136 — B 4, quadruplus primi, & ſecundi, qui

Poſitio, & reſolutio.

Primus	1 R
Secundus	1 $\frac{1}{8}$ R † 2 $\frac{1}{2}$
Tertius	1 $\frac{1}{5}$ R † 9 $\frac{3}{5}$

3 $\frac{13}{40}$ R † 12 $\frac{1}{10}$
3 $\frac{13}{40}$ R † 12 $\frac{1}{10}$ = 1 $\frac{1}{2}$ R † 34
12 $\frac{1}{10}$

3 $\frac{13}{40}$ R = 1 R † 21 $\frac{9}{10}$
1 $\frac{33}{40}$ R = 21 $\frac{9}{10}$

fuerunt 1 $\frac{1}{2}$ R † 34 — 1 B. Si vtrique parti addantur 4 B, fiet æquatio 5 B † 88 = 6 R † 136, vtrinque autem ablatis 88, fit 5 B = 6 R † 48, & fiet 1 B = 1 $\frac{1}{5}$ R † 9 $\frac{3}{5}$, qui quidem erit numerus tertius. Cum itaque numerus primus, poſitus ſit 1 R, Secundus 1 $\frac{1}{8}$ R † 2 $\frac{1}{2}$. Tertius 1 $\frac{1}{5}$ R † 9 $\frac{3}{5}$, omnes ſimul erunt quidem 4 $\frac{13}{40}$ R † 12 $\frac{1}{10}$, & erit æquatio huiuſmodi, nimirum 3 $\frac{13}{40}$ R † 12 $\frac{1}{10}$ = 1

Ooo

= 1 1/2 R † 34, quandoquidem tres omnes erant 1 1/2 R † 34. Vtrinq; verò ſi auferantur 12 1/10, remanebit æquatio 3 11/40 R = 1 1/2 R † 21 9/10, & vtrinque ſi auferatur 1 1/2 R, fiet æquatio 1 11/40 R = 21 9/10. Diuiſione autem inſtituta, fit 1 R, valor 12, quapropter numerus, qui erat 1 1/8 R † 2 1/2, erit 16; tertius autem poſitus 1 1/4 R † 9 1/3, erit 24; qui Problemati ſatisfaciunt.

PROBLEMA II.

DVos numeros reperire, ita vt ſi primus ſumpſerit 1/3 à ſecundo, fiant 220, ſecundus ſi acceperit 1/4, à primo, fiant 220.

Poſitio, & reſolutio. Dico primum eſſe 1 R, ſecundum verò 1 A; ſi autem ſecundus dederit primo 1/3 A; primus erit 1 R † 1/3 A, debebat autem eſſe 220, proinde 1 R † 1/3 A, ęquabitur 220; reductione peracta ſecundum Artem; erit æquatio huiuſmodi 1/3 A = 220 — 1 R; quapropter 1 A; valebit *660* — 3 R; ſecundus qui ponebatur 1 A, erit *660* — 3 R, cui ſi primus dederit 1/4 R, ſecundus erit *660* — 2 3/4 R, ſed eſſe debebat 220. erit igitur æquatio *660* — 2 3/4 R = 220, & facta reductione erit 440 = 2 3/4 R; diuiſione inſtituta fit 1 R; pretium 1*6*0, Secundus, qui ponebatur *660* — 3 R, erit 180; & ſatisfaciunt Problemati, propterea quod, ſi primus accipit 1/3 à, ſecundo, accipit *6*0; qui quidem numerus additus ad 1*6*0, facit 220; at verò ſecundus 180; accipiens quartam partem, à primo, accipit 40; quibus additis ad 180, fit itidem 220 &c.

SCHOLION.

PRæcedentia duo Problemata reſoluimus per ſecundas radices. Ignorandum tamen non eſt, ipſis poſſe ſatisfieri per primam radicem.

Ad primum quod attinet potuiſſemus dicere. Primus eſto 1 R, ergo ſecundus, & tertius 1/2 R † 34, quoniam primus cum 68, erat duplus ſecundi, & tertij, ob id ſecundus, & tertius, erunt 1/2 R † 34; his autem ſi addatur 1 R, nempe primus, fient tres numeri 1 1/2 R † 34, quibus additis 92; fiet 1 1/2 R † 126, quibus diuiſis per 4; fit quotiens 3/8 R † 31 1/2, ducatur in 3, vt habeantur tres quartæ partes; & fiet 1 1/8 R † 94 1/2, detractis autem 92; remanebit 1 1/8 R † 2 1/2, & eſt ſecundus. Vt habeatur tertius. Primus erat 1 R, ſecundus eſt 1 1/8 R † 2 1/2, ergo ſimul erunt 2 1/8 R † 2 1/2. Vt habeatur igitur tertius; ſubtrahatur 2 1/8 R † 2 1/2, ab 1 1/2 R † 34, ſumma trium; remanebit 31 1/2 — 5/8 R, eritque tertius numerus. Quamobrem tres numeri quæſiti ſunt 1 R; 1 1/8 R † 2 1/2, & 31 1/2 — 5/8 R, huic tertio ſi addantur 88; debet fieri quadruplus numerus primi, & ſecundi; Ideo multiplicetur primus, & ſecundus per 4, nempe 2 1/8 R † 2 1/2, ducatur in 4; fit 8 1/2 R † 10; & æquabitur 119 1/2 — 5/8 R, ſcilicet tertio numero, plus 88, & ordinata æquatione, inſtitutaque diuiſione, fiet 1 R, valor 12.

Aduertendum autem quòd ſumma illa trium numerorum, puta 1 1/2 R † 34, debet diuidi in duas tales partes, vt ſi vni ipſarum addantur 92; ipſa tripla fiat alterius; quod aſſequemur addendo 92, ad 34, vt fiat 1 1/2 R † 126; his diuiſis per 4; fiet quotiens 3/8 R † 31 1/2, numerus qui ſi ducatur in 3; fiet 1 1/8 R † 94 1/2, & hic erit triplus alterius partis; ſi detrahantur autem 92; remanet 1 1/8 R † 2 1/2, pro ſecundo ex tribus; eſt enim pars vna illius numeri, pars inquam maior 3/8 R † 31 1/2, altera erit 1 1/8 R † 2 1/2, hæc tripla illius, ſi addideris 92; remanet enim 1 1/8 R † 31 1/2, cui ſi addat

92,

92; ſit numerus triplus illius; itaque ſatisfaciunt, ordinata autem æquatione, & diuiſione inſtituta, fit 1 R, valor 12.

Sic etiam ſecundum reſolui poteſt ſine ſecundarum radicum auxilio.

PROBLEMA III.

T*Res numeros reperire, vt primus accipiens* $\frac{1}{3}$*, à ſecundo faciat* 100*, ſecundus accipiens* $\frac{1}{4}$*, à tertio, faciat* 100*, tertius denique accipiens* $\frac{1}{5}$*, à primo, faciat itidem* 100*, quæruntur ſinguli.*

Dico primum eſſe 1 R, ſecundum verò 1 A, tertium 1 B, primus autem, quia habens $\frac{1}{3}$, ſecundi, haberet 100, ideo accipiat $\frac{1}{3}$, à ſecundo, vt habeat 1 R, † $\frac{1}{3}$ A = 100, & per Antitheſin fiet $\frac{1}{3}$ A = 100 — 1 R; vt autem cognoſcamus valorem 1 A; omnia ducantur in 3; fiet enim 1 A = 300 — 3 R, quamobrem ſecundus, qui ponebatur 1 A, eſſet 300 — 3 R, itaque primus erit 1 R, ſecundus 300 — 3 R; at verò ſecundus, qui ponebatur 300 — 3 R, cum $\frac{1}{4}$, tertij dicebatur æqualis 100, proinde ſecundus 300 — 3 R † $\frac{1}{4}$ B, æquabitur 100, erit igitur æquatio 300 — 3 R † $\frac{1}{4}$ B = 100. Vtrinque additis 3 R, fiet æquatio 300 † $\frac{1}{4}$ B = 100 † 3 R, ſublatis vtrinque 100; remanebit 200 † $\frac{1}{4}$ B = 3 R, & rurſus per Antitheſin fiet $\frac{1}{4}$ B = 3 R — 200, omnibus ductis in 4, fit 1 B = 12 R — 800. Itaque tertius, qui ponebatur 1 B, erit 12 R — 800; Primus ergo erit 1 R, ſecundus 300 — 3 R, tertius 12 R — 800, hic autem ſi haberet $\frac{1}{5}$ R, nempe $\frac{1}{5}$, primi, eſſet 100, proinde $\frac{61}{5}$ R — 800, æquabitur 100; Vtrinque additis 800, fiet $\frac{61}{5}$ R = 900, ac proinde 61 R = 4500, Diuiſione inſtituta, fit 1 R, pretium 73 $\frac{47}{61}$. Si igitur 1 R, pretium eſt 73 $\frac{47}{61}$, reperiemus ſingulos, vti perſpicuum eſt, quamobrem ex tribus numeris, ille qui ponebatur 1 R, erit 73 $\frac{47}{61}$, qui verò ponebatur 300 — 3 R, erit 78 $\frac{42}{61}$. Tertius qui ponebatur 12 R — 800, ertt 85 $\frac{15}{61}$. Hi porrò numeri Problemati ſatisfaciunt: nam tertia pars numeri 78 $\frac{42}{61}$, eſt 26 $\frac{14}{61}$, quæ addita numero 73 $\frac{47}{61}$, facit 100, & ita de alijs &c.

Poſitio, & reſolutio.

PROBLEMA IV.

T*Res numeros reperire Arithmeticè proportionales, ita vt primo ducto in* 1*, ſecundo in* 2*, tertio in* 3*, fiant* 36*, ipſorum autem quadrata ſimul addita, faciant* 93*.*

Tres numeri quæſiti ſint 1 R, 1 A, 1 B; Quoniam autem ſunt Arithmeticè proportionales, extremorum 1 R, 1 B, ſumma 1 R † 1 B, dupla erit medij 1 A, quamobrem 1 R † 1 B, æquabitur 2 A, diuiſa verò vtraque æquationis parte per 2, fit 1 A = $\frac{1 R † 1 B}{2}$, Numerus ergo poſitus 1 A, erit $\frac{1 R † 1 B}{2}$. At verò ſi primus ducatur in 1, ſecundus in 2, tertius in 3, fiunt 36, proinde ducatur 1 R, in 1, fit 1 R, inſuper ducatur $\frac{1 R † 1 B}{2}$, in 2, fit 1 R † 1 B. Demum ducatur 1 B, in 3, fiunt 3 B, iſtorum autem productorum ſumma eſt 2 R † 4 B, quæ æqualis eſt 36, detractis autem 2 R, vtrinque, remanebit 4 B = 36 — 2 R, diuiſa verò vtraque parte æquationis per 4, fit 1 B = $\frac{18 — 1 R}{2}$, cum autem ſecundum numerum ſuperius inuenitemus æqualem $\frac{1 R † 1 B}{2}$, ob id ipſe ſecundus erit $\frac{18 † 1 R}{4}$.

Poſitio, & reſolutio.

1 R Primus.
$\frac{18 † 1 R}{4}$ Secundus.
$\frac{18 — 1 R}{2}$ Tertius.

Horum autem quadrata ſunt.

1 Q. Quadratum primi.
$\frac{324 † 36 R † 1 Q}{16}$ Quadratum ſecundi.
$\frac{324 - 36 R † 1 Q}{4}$ Quadratum tertij.
Horum ſumma eſt $\frac{1620 - 108 R † 21 Q}{16}$, quæ æquabitur 93, omnibus ductis in 16, erit æquatio 1620 — 108 R † 21 Q ⫨ 1488, & per Antitheſin 1620 † 21 Q ⫨ 1488 † 108 R; & rurſus fiet 132 † 21 Q ⫨ 108 R, atque adeo 108 R — 21 Q ⫨ 132, omnibus autem diuiſis per 21, fit $\frac{108 R}{21}$ — 1 Q ⫨ $\frac{132}{21}$, quadratum dimidij numeri radicum eſt $\frac{2916}{441}$, à quo ſi dematur $\frac{132}{21}$, ſeu $\frac{2772}{441}$, remanet $\frac{144}{441}$, huius radix quadrata $\frac{12}{21}$, ſubtrahatur à $\frac{54}{21}$, dimidio numeri radicum, relinquit $\frac{42}{21}$, hoc eſt 2, quamobrem numerus poſitus 1 R, erit 2, poſitus $\frac{18 † 1 R}{4}$, erit 5, poſitus $\frac{18 - 1 R}{2}$, erit 8, & ſatisfaciunt Problemati.

PROBLEMA V.

Tres numeros reperire, ita vt quadratum primi additum plano ſub primo in ſecundum, efficiat 12, idem autem quadratum ſubtractum ex plano ſub primo in tertium, relinquat 8, inſuper quadratum primi, plus qtadrato tertij ad quadratum ſecundi, rationem habeat, vt 5, ad 8.

Poſitio, & reſolutio. Primum numerum dico eſſe 1 R, ſecundum 1 A, tertium 1 B, primi quadratum eſt 1 Q, planum ſub primo in ſecundum eſt 1 R A, quamobrem 1 Q † 1 R A, æquabitur 12, vtrinque auferatur 1 Q, remanebit 1 R A ⫨ 12 — 1 Q, diuiſa verò vtraque æquationis parte per 1 R, fit 1 A ⫨ $\frac{12 - 1 Q}{1 R}$. Sic etiam planum ſub primo in tertium erit 1 R B, quamobrem 1 R B — 1 Q, æquabitur 8, vtrinque addito 1 Q, fit 1 R B ⫨ 8 † 1 Q, vtraque parte æquationis diuiſa per 1 R, fit 1 B ⫨ $\frac{8 † 1 Q}{1 R}$.

Primus igitur erit 1 R.
Secundus autem $\frac{12 - 1 Q}{1 R}$.
Tertius demum $\frac{8 † 1 Q}{1 R}$. Horum autem quadrata ſunt hæc 1 Q $\frac{144 - 24 Q † 1 QQ}{1 Q}$, & $\frac{64 † 16 Q † 1 QQ}{1 Q}$. Ipſorum autem extremorum quadrata ſimul addita faciunt $\frac{64 † 16 Q † 2 QQ}{1 Q}$. Vt verò 5, ad 2, ita debet eſſe $\frac{64 † 16 Q † 2 QQ}{1 Q}$, ad $\frac{144 - 24 Q † 1 QQ}{1 Q}$, & ita $\frac{128 † 32 Q † 4 QQ}{1 Q}$, æquabitur $\frac{720 - 120 Q † 5 QQ}{1 Q}$.

Seu 128 ✣ 32 Q ✣ 4 QQ ⫨ 720 — 120 Q ✣ 5 QQ
120 Q

120 ✣ 152 Q ✣ 4 QQ ⫨ 720 ✣ 5 QQ
128

152 Q ✣ 4 QQ ⫨ 592 ✣ 5 QQ
4 QQ

152 Q ⫨ 592 ✣ 1 QQ
152 Q — 1 QQ ⫨ 592

Huius autem æquationis radix quadrato-quadratica eſt 2. Numerus igitur poſitus 1 R, erit 2; poſitus $\frac{12 - 1 Q}{1 R}$, erit 4, poſitus demum $\frac{8 † 1 Q}{1 R}$, erit 6, & ſatisfaciunt Problemati.

PRO-

PROBLEMA VI.

D*Vos numeros reperire, quorum ſumma erit 100, ita vt ſi vnus per alium diuidatur fiat quotiens* $2\frac{1}{3}$.

Dico primum eſſe 1 R, ſecundum autem 1 A; & quia ambo debent facere 100, proinde 1 R + 1 A, æquabitur 100, vtrinque verò ſublata 1 R, fiet 1 A = 100 — 1 R. Itaque primus eſt 1 R, ſecundus 100 — 1 R, horum ſumma eſt 100, diuidatur autem numerus ſecundus puta 100 — 1 R, per 1 R, numerum primum, & fit $\frac{100 - 1R}{1R}$, hic autem quotiens æquabitur $2\frac{1}{3}$, ſiue $\frac{7}{3}$, reuocetur æquatio ad integra decuſſatim facta multiplicatione, fiet æquatio 300 — 3 R = 7 R. Vtrinque addiris 3 R, fit æquario 10 R = 300; diuiſione inſtituta, fit 1 R, pretium 30, proinde, qui ſupponebatur 1 R, erit 30, qui verò 100 — 1 R, erit 70, diuiſis autem 70, per 30, fit quotiens $2\frac{1}{3}$, vti perſpicuum eſt. *Poſitio, & reſolutio.*

SCHOLION.

P*Erſpicuum eſt etiam ſine ſecundis radicibus poſſe hoc Problema reſolui.*

PROBLEMA VII.

D*Vos numeros reperire, quorum quadrata ſimul addita faciant 100, ipſi verò numeri inter ſe ducti faciant* $\frac{3}{4}$, *quadrati maioris, quærantur ipſi numeri.*

Maior numerus ſit 1 R, minor erit 1 A, quadrata ſunt 1 Q, & 1 A Q, horum ſumma eſt 1 Q + 1 A Q, ſed eſſe debet 100, ob id 1 Q + 1 A Q = 100, vtrinque auferatur 1 A Q, erit igitur 1 Q = 100 — 1 A Q, & ita etiam 1 A Q = 100 — 1 Q, illi autem numeri 1 R, & 1 A, ducti inter ſe, faciut 1 R A, & hoc æquabitur $\frac{3}{4}$, maioris quadrati, nimirum 1 Q, quoniam autem 1 R A, æquatur $\frac{3}{4}$ Q, ergo 1 Q A Q, æquabitur $\frac{9}{16}$ QQ, reducta æquatione ad integra, fiet 16 Q A Q = 9 QQ, & per depreſſionem, ſiue hypobibaſmum, fiet æquatio 16 A Q = 9 Q. *Poſitio, & reſolutio.*

Si igitur 9 Q, valent 16 A Q, certè 1 Q, valebit $\frac{16 AQ}{9}$.

9 16 A Q 1 Q $\frac{16 AQ}{9}$

At verò 1 A Q, æquabatur numero 100 — 1 Q, proinde 1 A Q, æquabitur 100 — $\frac{16 AQ}{9}$, etenim 1 Q, reperiebatur æquale $\frac{16 AQ}{9}$, poteſt igitur eius loco ſubſtitui. Additis autem $\frac{16 AQ}{9}$, ex vtraque parte, fiet 1 A Q + $\frac{16 AQ}{9}$ = 100, eſt autem 1 A Q + $\frac{16 AQ}{9}$. Idem quod $\frac{25}{9}$ A Q, quamobrem $\frac{25}{9}$ A Q, æquabuntur 100, ac proinde 25 A Q = 900; ſeu $\frac{5}{3}$ A, æquabuntur 10, quamobrem 1 A, pre-

tium

tium erit *6*, cuius quadratum eſt *36*, quo ſubtracto ex 100, remanebit *64*; pro pretio ipſius 100 — A Q, & ſatisfaciunt Problemati.

QVINTVM EXEMPLORVM GENVS.

Ad hoc Genus Exemplorum, ea pertinere dicebamus Problemata, quæ rebus Geometricis ſunt applicata.

PROBLEMA I.

EST rectangulum quoddam, cuius latera ſunt in proportione data, & data quoque eſt proportio, quam habet ſumma quadratorum ex yſdem lateribus, ad ſummam eorundem laterum. Oportet reperire rectangulum.

Poſitio, & reſolutio. Data ſit laterum proportio vt 4, ad 1, ſitque proportio ſummæ quadratorum ad ſummam laterum, vt 34, ad 5, oportet reperire rectangulum. Latus vnum eſto 1 R, aliud erit 4 R, horum quadrata ſunt 1 Q; 16 Q, quorum ſumma eſt 17 Q. Sed hæc ſumma debet eſſe ad 5 R, ſummam laterum, vt 34, ad 5, ob id erunt proportionales 17 Q, 5 R, 34, 5, quamobrem fiet æquatio 85 Q = 170 R, & per hypobibaſmum 85 R = 170, diuiſione inſtituta fit 1 R, valor 2, & eſt latus minus; erit autem maius 8, vt patet &c.

PROBLEMA II.

EST rectangulum, cuius latus maius eſt duplum minoris, minus quatuor vnitatibus; area verò eſt 96, quæruntur latera.

Poſitio, & reſolutio. Latus minus eſto 1 R, maius igitur erit 2 R — 4, rectangulum ſub his eſt 2 Q — 4 R, & æquatio erit 2 Q — 4 R = 96, inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio 1 Q — 2 R = 48, huius autem æquationis radix eſt 8, vt patet, quamobrem latus minus eſt 8, maius antem eſt *16*, minus 4, nempe 12.

PROBLEMA III.

EST rectangulum, cuius area eſt 48, diameter autem eſt 10, Quæruntur latera.

Poſitio, & reſolutio. Lateris vnius quadratum eſto 1 R, & quoniam laterum quadrata æqualia ſunt quadrato diametri ſi nimirum ſimul accipiantur, proinde latus alterum erit, cuius quadratum eſt 100 — 1 R, ergo latera ipſa erunt 1 R, & ℞ (100 — 1 R), quæ quidem latera ſi inuicem multiplicentur producunt 100 R — 1 Q, & erit æquatio huiuſmodi 100 R — 1 Q = 2304, nimirum 100 R — 1 Q, productum quadratorum æquale erit quadrato aeris, huius autem æquationis radix eſt duplex, eo quod æquatio ſit amphibola, atque adeo *64*, erit maior, minor autem erit *36*, ſi verò

hæc

hæc ſunt laterum quadrata; latera ipſa erunt 8, 6, & ſatisfaciunt Problemati.

Cæterùm quadrata laterum ad inuicem multiplicata, producere quadratum areæ facilè demonſtrabitur.

Si namque duo numeri inter ſe multiplicentur, producunt numerum medio loco proportionalem inter ipſorum quadrata. *Demonſtratio.*

Sint duo numeri A, & B, ex A, in B, fiat C, ex A, in ſe fiat quadratum D, ex B, in ſe quadratum E. Dico C, medium eſſe proportionalem inter D, & E, hoc eſt E, C, D, eſſe continuè proportionales in proportione B, ad A; Quoniam enim A, multiplicans A, & B, facit C, & D, ergo vt B, ad A, ita erit C, ad D, & quia B, multiplicans B, & A, produxit E, & C, erit vt B, ad A, ita E, ad C, ſunt igitur E, C, D, in continua ratione, vt B, ad A. Hoc eodem modo demonſtratur à Clauio.

A 3		B 4
D 9	C 12	E 16

Poſſet etiam alijs modis inſtitui poſitio. Dicamus latus vnum eſſe 1 R, eius quadratum eſt 1 Q, aliud autem latus erit 100 — 1 Q.

Hæc autem ſi multiplicentur inter ſe, fit productum 100 Q — 1 QQ, quod æquale eſt numero 2304, ſcilicet quadrato ex area eiuſdem rectanguli, & fient latera, vt ſuprà 6, & 8.

$$100\,Q - 1\,QQ = 2304$$

5 0	5 0			2 5 0 0	
1 4	1 4			2 3 0 4	
3 6	6 4			1 9 6	
6	8			1 4	

PROBLEMA IV.

EST rectangulum cuius area eſt 60, & laterum aggregatum eſt 17, quæruntur latera.

Latus vnum eſto 1 R, aliud erit 17 — 1 R, hæc autem inter ſe ducta, faciunt 17 R — 1 Q, & erit æquatio 17 R — 1 Q = 60, huius autem æquationis duplex eſt radix, ſcilicet 5, & 12. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA V.

EST rectangulum, cuius latus vnum eſt 9, productum autem ex alterò latere in diametrum eſt 180. Quæritur latus alterum, diameter, ac area.

Latus ignotum eſto 1 R, latus notum erit 9, proinde laterum quadrata erunt 1 Q, & 81, at verò hæc quadrata ſimul iuncta ſunt æqualia quadrato diametri, ſed diameter eſt $\frac{180}{1\,R}$, nam productum ex altero latere ſcilicet 1 R, in diametrum eſt 180, ſi $\frac{180}{1\,R}$, ducatur in 1 R, fit 180, quamobrem erit æquatio 1 Q + 81 = $\frac{32400}{1\,Q}$, eſt nimirum 1 Q + 81, æquale quadrato diametri, & per multiplicationem *Poſitio, & reſolutio.*

in

in crucem, fit æquatio huiuſmodi 1 QQ + 81 Q = 32400. Huius autem æquationis radix quadrato-quadratica eſt 12.

PROBLEMA VI.

EST rectangulum, cuius area, cum diametro facit 58, *& laterum differentia eſt* 2; *Quæruntur latera, diameter, & area.*

Poſitio, & reſolutio. Latus minus eſto 1 R — 1, (eſt enim 1, dimidium differentiæ), maius latus autem erit 1 R + 1, hac enim ratione differunt dato interuallo 2, rectangulum ſub his eſt 1 Q — 1, & eſt area, quam ſi dempſeris à 58, conflato ex area, & diametro ipſius rectanguli, habebis 59 — 1 Q, pro diametro ipſa, cuius quadratum eſt 3481 — 118 Q + 1 QQ; At verò quadrata ipſorum latera ſunt 2 Q + 2, erit igitur æquatio huiuſmodi 3481 — 118 Q + 1 QQ = 2 Q + 2, & per Antitheſin 3481 + 1 QQ = 120 Q + 2, & rurſus 3479 + 1 QQ = 120 Q, & rurſus 120 Q — 1 QQ = 3479. Huius autem radix eſt quidem 7; atque adeo latus, quod ponebatur 1 R — 1, erit 6, quod autem poſitum fuit 1 R + 1, erit 8.

PROBLEMA VII.

EST quadratum, cuius diameter cum latere facit 4, *quærantur latera.*

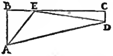
Poſitio, & reſolutio. Latus illud eſto 1 R, ergo diameter erit 4 — 1 R, huius quadratum eſt 16 — 8 R + 1 Q, his æqualia erunt 2 Q, itaque 2 Q = 16 — 8 R + 1 Q, per Antitheſin autem 1 Q + 8 R = 16. Semiſſis numeri radicum eſt 4, ad cuius quadratum 16, addito 16, numero abſoluto, fiet 32, cuius radix quadrata eſt ℞ 32, à qua ſi ſubtrahatur 4; dimidium numeri radicum, remanebit ℞ 32 — 4, pro latere quæſiti quadrati, diameter autem erit 8 — ℞ 32.

PROBLEMA VIII.

EST figura A B C D, in qua ſcimus A B, eſſe 8, *& B C,* 20, *item C D,* 2, *ſcimus etiam productum ex A B, in B E, æquale eſſe producto ex E C, in C D, ſunt autem anguli A B C, B C D, recti, quæritur B E, & E C, inſuper A E, & E D.*

Poſitio, & reſolutio. Hoc nil aliud eſt, quàm diuidere B C, in duas partes, vt productum ſub vna, & A B, æquale ſit producto ſub alia, & C D.

Pars vna puta B E, ſit 1 R, alia E C, erit 20 — 1 R, ſi ducatur 1 R, in 8, puta A B, fiunt 8 R, ſi verò multiplicetur 20 — 1 R, per 2, puta C D, fiet 40 — 2 R, erit igitur æquatio 8 R = 40 — 2 R, & per Antitheſin, fiet 10 R = 40, quamobrem B E, erit 4, vt E C, erit 16, innoteſcent autem A E, ℞ 80, & E D, ℞ 260, per 47, primi.



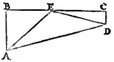
PRO-

PROBLEMA IX.

E*ST ſigura A B C D, in qua nota eſt A B, 8, B C, 20, item C D, 2, notum eſt etiam A E, æqualem eſſe ipſi E D, quæro quanta ſit B E, quanta E C, quanta A E, demum quanta E D, ſuppoſitis angulis A B C, B C D, rectis.*

Oportet autem quadratum ex B C, plus altero, è duobus quadratis maius eſſe reliquo.

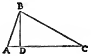
Dico B E, eſſe 1 R, reliqua E C, erit 20 — 1 R, quadratum ex 1 R, eſt 1 Q, quo addito ad 64, quadratum ex A B, 8, fit 1 Q + 64. Deinde quadratum ex E C, eſt 400 — 40 R + 1 Q, quo addito ad 4, quadratum ex C D, 2, fit 404 — 40 R + 1 Q, hæc igitur æqualia debent eſſe inter ſe; nimirum 1 Q + 64, & 404 — 40 R + 1 Q, radices enim ipſorum ſupponuntur æquales nimirum ℞ (1 Q + 64), & ℞ (404 — 40 R + 1 Q), quę ſunt A E, & E D; obſeruatis autem præceptis Artis, reperiemus 40 R = 340, quamobrem diuiſione inſtituta innoteſcet 1 R, pretium; puta B E, nempe 8 $\frac{1}{2}$, reliqua E C, erit 11 $\frac{1}{2}$, &c. *Poſitio, & reſolutio.*



PROBLEMA X.

E*ST triangulum A B C, rectangulum, in quo ſcimus quadrata ex A C, A B, A D, ſimul iuncta conficere 84, & ſi 40, diuidatur per ſingula, quotientibuſque multiplicatis, nimirum ducto primo, in ſecundum, & producto ducto in tertium, proueniat 1000, quærantur latera.*

Quoniam ſi ſint tres numeri proportionales ducatur autem primus in ſecundum, productum ducatur in tertium, prouenit numerus, cuius latus cubicum eſt numerus ſecundus ex tribus, ob id quia ſi primus ducatur in ſecundum, & productum, in tertium fit 1000, propterea ſecundus erit 10, radix nimirum cubica numeri 1000, ſi igitur diuidatur 40, per 10, fit quotiens 4, pro ſecundo numero ex tribus quæſitis. Modò dicere oportet primum, & tertium ex quæſitis eſſe 1 R, & opus eſt diuidere 1 R, in duas partes, vt ex ductu vnius in aliam fiat 16, ſumatur dimidium ipſius 1 R, & eſt $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ Q, à quo ſubtrahatur 16; quadratum illius ſecundi numeri 4, & remanebit $\frac{1}{4}$ Q — 16, cuius radix quadrata puta ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16), eſt ſubtrahenda à dimidio 1 R, vt habeatur $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16), & erit pars prima; pars autem ſecunda erit $\frac{1}{2}$ R + ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16). Iſtorum autem quadratorum ſumma eſt 1 Q — 16, & æquabitur 84, & per Antitheſin 1 Q = 100, quamobrem 1 R, pretium erit 10. Itaque pars poſita $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16), erit 2, & erit A D; quantitas autem poſita $\frac{1}{2}$ R + ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16, erit 8, nimirum A C, itaque A D, erit 2 A B, erit 4, & A C, erit 8, &c. *Poſitio, & reſolutio.*



PROBLEMA XI.

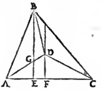
EST triangulum rectangulum, in quo notum eſt ſegmentum minus baſis 5 $\frac{2}{5}$, itemque nota eſt differentia, qua baſis ſuperat latus conterminum, cum illo ſegmento nempe 6, oportet reperire quantitatem baſis &c.

Poſitio, & reſolutio. Latus illud circa rectum, & conterminum eum ſegmento minori, ſit 1 R, erit igitur baſis 1 R ✠ 6, quoniam autem ſegmentum minus eſt 5 $\frac{2}{5}$, ergo 5 $\frac{2}{5}$ R ✠ 32 $\frac{2}{5}$, æquabitur 1 Q; atq; adeo 1 Q — 5 $\frac{2}{5}$ R, æquabitur 32 $\frac{2}{5}$, ſit autem explicata æquatione 1 R, pretium 9.

PROBLEMA XII.

EST triangulum A B C, in quo nota ſunt latera A C, 14, A B, 13, B C, 15, eſt autem punctum D, vel extra, vel intra, intunctum ſit conoſcere, quanta ſit A D, quanta D B, quanta demum D C, ſi ad quadratum ex A D, addatur 100, ad quadratum ex D B, addatur 36, ad quadratum ex D C, addatur 64, hac nimirum additione facta omnia ſint inter ſe aqualia.

Poſitio, & reſolutio. Primò diuidatur A C, 14, in duas partes vt quadratum vnius plus 100, æquale ſit quadrato alterius, plus 64. Proinde pars vna eſto 1 R, altera erit 14 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q, iſtius autem eſt 196, — 28 R ✠ 1 Q. Si ad 1 Q; addatur 100, ſit 100 ✠ 1 Q. Si ad 196 — 28 R ✠ 1 Q, addatur 64, ſit 260 — 28 R ✠ 1 Q; erit igitur 100 ✠ 1 Q ⚌ 260 — 28 R ✠ 1 Q, & per Antitheſin, fiet 100 ✠ 1 Q ✠ 28 R ⚌ 260 ✠ 1 Q, & rurſus vtrinque ſublatis 100, & 1 Q, fiet 28 R ⚌ 160, diuiſione inſtituta, ſit 1 R, pretium 5 $\frac{5}{7}$, & eſt A F, eum autem A E, ſit 5; erit igitur E F, $\frac{5}{7}$, remanebit autem F C, 8 $\frac{2}{7}$.



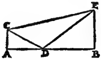
Sit autem F D, I R, eius quadratum eſt 1 Q, quo addito ad 68 $\frac{32}{49}$, quadratum ex 8 $\frac{2}{7}$, ſit 68 $\frac{32}{49}$ ✠ 1 Q, ad quod addito 64, ſit 132 $\frac{32}{49}$ ✠ 1 Q, & quia B E, erat 12, ductaque eum ſit D G, ad rectos angulos ad B E, & D F, ad A C, atque adeo E G, ſit 1 R, erit G B, 12, — 1 R, cuius quadratum eſt 144 — 24 R ✠ 1 Q; ad quod intelligatur addi $\frac{25}{49}$, quadratum ex G D, fiet 144 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q, ad quod ſi intelligatur addi 36, quadratum ex 6, fiet 180 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q: & erit æquatio 132 $\frac{32}{49}$ ✠ 1 Q ⚌ 180 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q, & per Antitheſin fiet 132 $\frac{32}{49}$ ✠ 24 R ✠ 1 Q ⚌ 180 $\frac{25}{49}$ ✠ 1 Q, & rurſus 24 R ✠ 1 Q ⚌ 47 $\frac{42}{49}$ ✠ 1 Q, & denique 24 R ⚌ 47 $\frac{42}{49}$, diuiſione autem inſtituta, ſit 1 R, valor 1 $\frac{1169}{1176}$. Neque diſſimili artificio procedendum erit; cum punctum eeciderit extra triangulum &c.

PRO-

PROBLEMA XIII.

EST figura A B E C: in qua nota ſunt A B, 26 A C, 8, B E, 15. anguli C A B, A B E, ſunt recti; oportet cognoſcere quanta ſit C D, & D E, cognita ratione ipſius C D, ad D E, nimirum vt 2, ad 5.

Problema iſtud indiget determinatione, vt patet; cæterum hoc nihil aliud eſt, quam diuidere A B, in duas partes; vt quadratum vnius, plus quadrato ex A C, ad quadratum alteriùs, plus quadrato ex B E, ſit in duplicata ratione 2, ad 5, nempe vt 2, ad 12, $\frac{1}{2}$. *Poſitio, & reſolutio.*



Pars vna eſt 1 R; alia erit 26 — 1 R; quadratum illius eſt 1 Q; cui addito 64; quadrato ex A C, 8; fit 64 + 1 Q; deinde quadratum ex 26 — 1 R, eſt 676 — 52 R + 1 Q, cui addito 225, quadrato ex B E, 15, fit 901 — 52 R + 1 Q, ergo ℞ (64 + 1 Q), ad ℞ (901 — 52 R + 1 Q), debet eſſe vt 2, ad 5, ſeu 64 + 1 Q, ad 901 — 52 R + 1 Q, debet eſſe, vt 2, ad 12 $\frac{1}{2}$, ſeu vt 4, ad 25, erit igitur 1600 + 25 Q = 3604 — 208 R + 4 Q, & per Antithenſin 1600 + 25 Q + 208 R = 3604 + 4 Q, & rurſus 1600 + 21 Q + 208 R = 3604, rurſus fiet æquatio 21 Q + 208 R = 2004, inſtituto Paraboliſmo, fit 1 Q + $\frac{208}{21}$ R = $\frac{2004}{21}$.

Huius æquationis radix eſt 6, nam dimidium numeri radicum eſt $\frac{104}{21}$, cuius quadratum $\frac{10816}{441}$, ſi addatur ad $\frac{2004}{21}$, ſeu quod idem eſt $\frac{42084}{441}$, fit numerus 52900, cuius latus quadratum eſt 230, & erit $\frac{230}{21}$, ab hoc autem ſubtracto $\frac{104}{21}$, dimidio numeri radicum remanet $\frac{126}{21}$, nimirum 6, quamobrem, pars vna erit 6, altera erit 20; &c.

```
                    104
  2904              104
    21              ---
  ----              416
  2004             000
 4008             104
 -----            -----
 42084            10816
                  42084
                  -----
                  52900

                  52900
                  .  .  .
                  2  3  0
                  -------
 104/21   230/21    230
                    104
                   ----
                   1266
                   ----
                     21
```

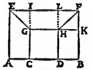
SCHOLION.

REctè dicebamus id nil aliud eſſe, quàm diuidere A B, in duas partes, vt ſumma quadratorum ex vna parte ſit ad ſummam quadratorum ex alia in duplicata ratione 2, ad 5; Si enim recta potens duo quadrata, ad rectam potentem alia duo, eſt vt 2, ad 5; quadratum erit in ratione duplicata; vt conſtat ex 20, prop. 6. Elementorum.

PROBLEMA XIV.

Datum ſit rectangulum A B F E, conſtet autem latus vnum ipſius nimirum maius, quale eſt E F, eſſe 10, at verò F B, latus minus eſſe 6, in eoque deſcriptum ſit parallelogrammum rectangulum C G H D; quod ſit quarta pars totius A E F B, adeo vt A C G E; G E F H, H F B D, & C G H D, ſint æqualia; quorum vnum quodque eſt quarta pars totius A E F B, quæritur quanta ſit G H, & quanta H D.

Poſitio, & reſolutio. Producatur C G, ad I, & G H, ad K, quoniam igitur rectangulum C G H D, æquale eſt trapetio G E F H, ob id rectangulum G I F K, quod eſt illi trapetio æquale, erit æquale rectangulo C G H D, quamobrem erit *, vt F I, ad G H, ita D H, ad G I, eſt autem G H, differentia, qua F I, ſuperat I E, diuidenda ſunt igitur latera E F, F B, in duobus punctis I, K, ea lege quemadmodum eſt F I, ad G H, ſeu I L, differentiam, &c. ita ſit D H, ſeu B K, ad H L, ſeu K F.



Dico igitur G H, eſſe 2 R, ob id I F, erit 5 † 1 R, quemadmodum E I, erit 5 — 1 R, harum autem partium ſumma eſt 10, vt autem 5 † 1 R, ad 2 R, ita debet eſſe B K, ad K F, quamobrem fiat vt 5 † 1 R, ad 2 R, ita vna pars ad alteram, quarum ſumma ſit 6, nimirum B F, addatur 2 R, differentia, ad 5 † 1 R, partem vnam, & fit 5 † 3 R, per hanc diuidatur 6, fit quotiens $\frac{6}{5 † 3 R}$, modò hic ducatur in illas partes 5 † 1 R, & 2 R, fiunt numeri producti 30 † 6 R, & 12 R, diuidantur per communem diuiſorem, & erunt $\frac{30 † 6 R}{5 † 3 R}$, & $\frac{12 R}{5 † 3 R}$, in ratione data, conficientes ſimul additæ numerum 6, & erunt hi termini proportionales.

5 † 1 R   2 R $\frac{30 † 6 R}{5 † 3 R}$ $\frac{12 R}{5 † 3 R}$

Sumamus productum, vel ab extremis, vel à medijs; ſunt enim vnum, & idem $\frac{60 R † 12 Q}{5 † 3 R}$, & erit æquale quartæ parti totius rectanguli E B; quod eſt 60; ergo æquabitur numero 15, quartæ parti totius.

$\frac{60 R † 12 Q}{5 † 3 R}$ = 15.

Tollatur fractio per communem multiplicationem, & erit æquatio 60 R † 12 Q = 75 † 45 R, per Antitheſin verò 15 R † 12 Q = 75, ſiue 12 Q † 15 R = 75, omnibus autem applicatis ad 12, fiet æquatio 1 Q † 1 $\frac{1}{4}$ R = 6 $\frac{1}{4}$.

$\frac{5}{8}$	*Dimidium numeri radicum.*	
$\frac{25}{64}$	*Quadratum dimidij numeri Radicum.*	} *Adde.*
6 $\frac{16}{64}$	*Numerus abſolutus.*	
6 $\frac{41}{64}$	*Aggregatum.*	
℞ 6 $\frac{41}{64}$	*Aggregati latus.*	} *Subtrahe.*
$\frac{5}{8}$	*Dimidium numeri radicum.*	

Erit

Erit igitur 1 R, valor ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$. Illius autem æquationis eam eſſe radicem patet ex præceptis Artis. Diuidatur ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$, per 4, & fit quotiens, ſiue quarta pars radicis ℞ $\frac{425}{1024} - \frac{5}{32}$, hæc autem quarta pars radicis addita ad vnam Radicem (eſt enim in æquatione numerus radicum $1\frac{1}{4}$ R,) facit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$, quandoquidem ſi ad $-\frac{5}{8}$, addamus $-\frac{5}{32}$, fit $-\frac{25}{32}$. Si verò ad ℞ $6\frac{41}{64}$, addatur ℞ $\frac{425}{1024}$, fit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$, ſunt enim commenſurabiles ℞ $\frac{425}{64}$, & ℞ $\frac{425}{1024}$.

℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$

℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$

− ℞ $\frac{10625}{4096}$ ✠ $-\frac{25}{64}$

$6\frac{41}{64}$ − ℞ $\frac{10625}{4096}$

$7\frac{1}{32}$ − ℞ $10\frac{1540}{4096}$ Radicis quadratum.

℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ Radicum pretium.

$6\frac{1}{4}$ Summa.

℞ $\frac{425}{64} - \frac{5}{8}$ radix.

℞ $\frac{425}{1024} - \frac{5}{32}$ Quarta pars radicis.

℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ Summa, & radicum pretium.

```
    425
    425
  -----
   2125
   850
  1700
  ------
 180625
```

$6\frac{41}{64}$

$3\frac{82}{256}$

9

$1\frac{1540}{4096}$

℞ $10\frac{1540}{4096}$

```
  1024
    64
  ----
  4096
 6144
 -----
 65536
```

```
 65536
 .  . .
 -----
 2 5 6
```

```
   256
    64
  ----
  1024
 1536
 -----
 16384
```

$\frac{82}{256}$ ✕ $\frac{41}{64}$

```
   82
   64
  ---
  328
 492
 ----
 5248
```

```
    256
     41
   ----
    256
  1024
  -----
  10496
   5248
  -----
  15744
```

Siquidem ex ℞ $\frac{425}{64}$ in ℞ $\frac{425}{1024}$, fit ℞ $\frac{180625}{65536}$, (hic autem eſt vnus ex modis, quibus Radix quadrata, quadratæ radici additur, vt conſtat, ex præceptis, quibus tractantur numeri irrationales), eſt igitur productum ℞ $\frac{180625}{65536}$.

Digitized by Google

$\frac{425}{1024} \times \frac{15744}{16384}$ ſeu quod idem eſt $\frac{123}{128}$

```
    16384              15744
     1024               1024
 --------           --------
    65336              62976
   32768              31488
 163840            15744
 --------          ---------
 16777016          16121856
                    6963200
                   ---------
                   23085056
```

$1\frac{6308040}{16777016}$

Ipſius autem $\frac{180625}{65536}$, radix quadrata eſt $\frac{425}{256}$; cuius duplum eſt $\frac{850}{256}$, hoc eſt $3\frac{82}{256}$. Si verò ad 6, addatur 3, fit 9. Si $\frac{82}{256}$, addatur ad $\frac{41}{64}$, fit $\frac{123}{128}$; namque ſi huius fractionis, ſcilicet $\frac{41}{64}$, duplicemus numeratorem, & denominatorem fiet $\frac{82}{128}$. Si verò ſumamus dimidium, tàm numeratoris quàm denominatoris, illius fractionis $\frac{82}{256}$, fit $\frac{41}{128}$, modò fractiones ſunt redactæ ad eandem denominationem. Si addantur numeratores fiet fractio $\frac{123}{128}$, quę quidem fractio, addita ad $\frac{425}{1024}$, facit ſummam $1\frac{49280}{131072}$, hoc eſt $1\frac{1540}{4096}$, quæ addita ad 9, facit $10\frac{1540}{4096}$, ob id ſumma erit ℞ $10\frac{1540}{4096}$, at verò — ℞ $10\frac{1540}{4096}$, addita ad † ℞ $10\frac{1540}{4096}$, nihil remanet. Si verò ad $7\frac{1}{32}$, addatur — $\frac{25}{32}$, fit $6\frac{1}{4}$. Igitur ſi ad $7\frac{1}{32}$ — ℞ $10\frac{1540}{4096}$, quadratum radicis addatur ℞ $10\frac{1540}{4096}$ — $\frac{25}{32}$, radicum pretium, fit $6\frac{1}{4}$, vt oportebat.

```
                                        1024
                                         123
                                        -----
  123         425                       3072
  ---    ×   ----                      2048
  128        1024                     1024
              128                    -------
            -----                     125952
             8192                      54400
            2048                     -------
           1024                       180352
          -------
           131072

 49280      1540     180352        49280
 ------ [  ------   -------- [ 1 --------
 Diui- 32            131072       131072
 ſor.

 131072 [  4096   [  hoc eſt    1540
                             1 ------
 Diui- 32                       4096
 ſor.

  41     82     82     41        82
  --    ---    ---    ---        41
  64    256    128    128       ----
                                 123
                                 128
```

Modò videndum, ex additione, huius fractionis nimirum $\frac{26\frac{1}{4} \dagger ℞\ 239\frac{7}{16}}{3\frac{1}{4} \dagger ℞\ 59\frac{49}{64}}$ ad hanc $\frac{℞\ 956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4} \dagger ℞\ 59\frac{49}{64}}$ fieri numerum 6.

In

℞ 956 $\frac{4}{16}$ — 7 $\frac{1}{2}$
26 $\frac{1}{4}$ ✠ ℞ 239 $\frac{1}{16}$

18 $\frac{3}{4}$ ✠ ℞ 2151 $\frac{9}{16}$

7 6 5 0
2

1 5 3 0 0

1 6

In primis addantur numeratores; & ex ✠ 26 $\frac{1}{4}$, ad — 7 $\frac{1}{2}$, fit 18 $\frac{3}{4}$, & fit ✠; ex ℞ 239 $\frac{1}{16}$ ad ℞ 956 $\frac{4}{16}$, fit ℞ 2151 $\frac{9}{16}$. Propterea quod ℞ 239 $\frac{1}{16}$, & ℞ 956 $\frac{4}{16}$, ſunt commenſurabiles; ſi igitur $\frac{15300}{16}$ (hæc fractio idem eſt, quod 956 $\frac{4}{16}$,) ducatur in $\frac{3825}{16}$, fit $\frac{58522500}{256}$, huius radix quadrata eſt $\frac{7650}{16}$, huius duplum eſt $\frac{15300}{16}$, quadrata illarum fractionum ſunt $\frac{15300}{16}$, & $\frac{3825}{16}$, horum ſumma eſt $\frac{34425}{16}$, nempe 2151 $\frac{9}{16}$. Proinde ſi ℞ 239 $\frac{1}{16}$, addatur ad ℞ 956 $\frac{4}{16}$, fit ſumma ℞ 2151 $\frac{9}{16}$. Itaque numerator erit 18 $\frac{3}{4}$ ✠ ℞ 2151 $\frac{9}{16}$, & denominator erit 3 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 59 $\frac{49}{64}$, & ſtabit hoc modo.

$$\frac{18\,\frac{3}{4} ✠ ℞\ 2151\,\frac{9}{16}}{3\,\frac{1}{8} ✠ ℞\ 59\,\frac{49}{64}}$$

9 5 6
1 6

5 7 3 6
9 5 6

1 5 2 9 6
4

1 5 3 0 0

1 6

2 3 9
1 6

1 4 3 4
2 3 9

3 8 2 4
1

3 8 2 5

1 6

1 5 3 0 0
3 8 2 5

7 6 5 0 0
3 0 6 0 0
1 2 2 4 0 0
4 5 9 0 0

5 8 5 2 2 5 0 0

Eritque ſumma quęſita. Conſtat autem hanc fractionem valere 6, namque 3 $\frac{1}{8}$, in 18 $\frac{3}{4}$, continetur, ſexies; ſeu metitur 18 $\frac{3}{4}$, per 6, & ℞ 59 $\frac{49}{64}$, metitur ℞ 2151 $\frac{9}{16}$, per 6, vt patet, ſi 3 $\frac{1}{8}$, multiplicemus per 6, fit 18 $\frac{3}{4}$. Si verò ℞ 59 $\frac{49}{64}$, multiplicemus per 6, fit ℞ 2151 $\frac{9}{16}$. Quod autem ſi ducatur ℞ 26 $\frac{9}{16}$ — 1 $\frac{1}{4}$ in

$$\frac{26\,\frac{1}{4} † ℞\ 239\,\frac{1}{16}}{3\,\frac{1}{8} † ℞\ 59\,\frac{49}{64}}$$, producatur 15, quarta pars totius rectanguli 60, facilè conſtabit.

3 $\frac{1}{8}$
6
18 $\frac{6}{8}$ ſeu $\frac{3}{4}$

59 $\frac{49}{64}$
36

354
177

2124
27 $\frac{36}{64}$

2151 $\frac{9}{16}$

49
36

294
147

1764

Hæc

26 $\frac{1}{4}$ ✠ ℞ 239 $\frac{7}{16}$
℞ 26 $\frac{9}{16}$ — 1 $\frac{1}{4}$

— 32 $\frac{13}{16}$ — ℞ $\frac{76500}{256}$
$\frac{678500}{256}$ ✠ ℞ $\frac{1629625}{256}$ hoc eſt 79 $\frac{13}{16}$

℞ 13447 $\frac{17}{64}$ ✠ 46 $\frac{14}{16}$ ſeu 46 $\frac{7}{8}$

3 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 59 $\frac{49}{64}$

Hæc autem fractio $\frac{℞\ 13447\frac{17}{64}\ ✠\ 46\frac{14}{16}\ \text{ſeu}\ \frac{7}{8}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$, valet 15, quandoquidem 3 $\frac{1}{8}$, metitur 46 $\frac{7}{8}$ per 15, & ℞ 59 $\frac{49}{64}$, metitur ℞ 13447 $\frac{17}{64}$ per 15. Itaque ſi ducamus ℞ 26 $\frac{9}{16}$ — 1 $\frac{1}{4}$ in $\frac{26\frac{1}{4}\ ✠\ ℞\ 239\frac{9}{16}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$, fit 15; vt oportet.

Quod autem ex multiplicatione quoque ℞ 956 $\frac{6}{16}$ — 7 $\frac{1}{8}$, per 4 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 6 $\frac{41}{64}$, (his autem intelligatur ſubſcriptus denominator communis 3 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 59 $\frac{49}{64}$,) producatur idem numerus 15, patet ſiquidem dum multiplicamus 7 $\frac{1}{8}$, per 6 $\frac{41}{64}$, producitur ℞ $\frac{95625}{256}$, at ✠ in —, ductum facit —, deinde dum ducitur ℞.

℞ 956 $\frac{6}{16}$ — 7 $\frac{1}{8}$
4 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 6 $\frac{41}{64}$

79 $\frac{11}{16}$ — ℞ $\frac{95625}{256}$
℞ 18302 $\frac{11580}{16384}$ — 32 $\frac{11}{16}$

℞ 13447 $\frac{17}{64}$ ✠ 46 $\frac{7}{8}$
3 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 59 $\frac{49}{64}$

6 $\frac{41}{64}$, in ℞ 956 $\frac{6}{16}$, producitur ℞ $\frac{6502500}{1024}$. Radix quadrata numeratoris eſt 2550, denominatoris eſt 32. Itaque productum erit $\frac{2550}{32}$, hoc eſt 79 $\frac{11}{16}$, at ductum ✠, in ✠, facit ✠. Deinde dum ducitur 4 $\frac{1}{8}$, in 7 $\frac{1}{8}$, fit 32 $\frac{11}{16}$, & ✠ in —, facit —. Denique ſi ducatur 4 $\frac{1}{8}$, in ℞ 956 $\frac{6}{16}$, fit ℞ 18302 $\frac{11580}{16384}$, ſumma verò horum productorum eſt $\frac{℞\ 13447\frac{17}{64}\ ✠\ 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$

6	5	0	2	5	0	0		1 0 2 4		
·		·		·		·		·		·
2		5		5		0		3		2
		3		2						

Quandoquidem ſi ✠ 79 $\frac{11}{16}$, & — 32 $\frac{11}{16}$, ſimul addantur, fit ✠ 46 $\frac{7}{8}$. Si verò ✠ ℞ 18302 $\frac{11580}{16384}$, ad — ℞ $\frac{95625}{256}$, addatur, fit ſumma ℞ 13447 $\frac{17}{64}$. Itaque erit productum ℞ 13447 $\frac{17}{64}$ ✠ 46 $\frac{7}{8}$, cui ſubſcribi debet idem denominator 3 $\frac{1}{8}$ ✠ ℞ 59 $\frac{49}{64}$, vt fiat fractio iſta ℞ $\frac{13447\frac{17}{64}\ ✠\ 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$, dum nimirum multiplicatur fractio illa ſupra poſita ℞ $\frac{956\frac{6}{16}\ —\ 7\frac{1}{8}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$, in alteram $\frac{4\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 6\frac{41}{64}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$.

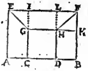
Quemadmodum explicuimus; At verò liquet fractionem illam productam ℞ $\frac{13447\frac{17}{64}\ ✠\ 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8}\ ✠\ ℞\ 59\frac{49}{64}}$, valere 15, ſi quidem, & 3 $\frac{1}{8}$, metitur 46 $\frac{7}{8}$, per 15, & ℞ 59 $\frac{49}{64}$, metitur pariter ipſam ℞ 13447 $\frac{17}{64}$, per 15.

Prima

Prima igitur I F, poſita 5 + 1 R, erit 4 $\frac{3}{8}$ + ℞ 6 $\frac{41}{64}$.
Secunda G H, ſeu I L, poſita 2 R, erit ℞ 26 $\frac{9}{16}$, — 1 $\frac{1}{4}$.
Tertia H D, ſeu K B, poſita $\frac{10 + 6 R}{5 + 1 R}$, erit $\frac{26 \frac{1}{4} + ℞\, 239 \frac{1}{16}}{3 \frac{1}{8} + ℞\, 59 \frac{49}{64}}$.
Quarta I G, ſeu F K, poſita $\frac{15 R}{5 + 1 R}$, erit ℞ $\frac{956 \frac{1}{16} \text{ ſeu } \frac{1}{4} - 7 \frac{1}{2}}{3 \frac{1}{8} + ℞\, 59 \frac{49}{64}}$.

Aliter eidem Problemati ſatisfieri poteſt. Pars B K, eſto 3 + 1 R, reliqua K F, erit 3 — 1 R; harum ſumma eſt 6; vt patet quoniam 3 + 1 R, pars maior numeri 6, ſi ducatur in differentiam partium numeri 10, debet producere 15, quemadmodum pars minor eiuſdem numeri 6, ducta in partem maiorem numeri 10, debet efficere 15, ſunt enim proportionales, ob id diuidatur 15, per 3 + 1 R, & fiet $\frac{15}{3 + 1 R}$, differentia partium lateris maioris 10; deinde diuidatur numerus 15; per 3 — 1 R, & fiet quotiens $\frac{15}{3 - 1 R}$, pro parte maiori eiuſdem 10; à qua ſi ſubtrahatur $\frac{15}{3 + 1 R}$, remanebit $\frac{30 R}{9 - 1 Q}$, pro parte minori eiuſdem 10, ſi igitur $\frac{30 R}{9 - 1 Q}$, addatur ad $\frac{15}{3 - 1 R}$, fiet ſumma $\frac{45 + 45 R}{9 - 1 Q}$, æqualis 10, atque adeo 45 + 45 R = 90 — 10 Q, & ordinata æquatione, fiet 45 + 10 Q + 45 R = 90, & vtrinque ſublatis 45; erit 10 Q + 45 R = 45, diuiſione verò inſtituta fit æquatio 1 Q + 4 $\frac{1}{2}$ R = 4 $\frac{1}{2}$. Huius autem æquationis radix reperietur, ſi ſumatur 5 $\frac{1}{16}$, quadratum dimidij numeri radicum, & addatur numero abſoluto; fiet enim 9 $\frac{9}{16}$, huius radix quadrata eſt ℞ 9 $\frac{9}{16}$, à qua ſubtrahi debet 2 $\frac{1}{4}$, dimidium numeri radicum remanet ℞ 9 $\frac{9}{16}$ — 2 $\frac{1}{4}$, & eſt 1 R; valor; Itaque pars, quæ ponebatur 3 + 1 R, erit ℞ 9 $\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$. Idem eſt autem ℞ 9 $\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$, ac eſt fractio $\frac{26 \frac{1}{4} + ℞\, 239 \frac{1}{16}}{3 \frac{1}{8} + ℞\, 59 \frac{49}{64}}$ elicita ſuperiori methodo.

Aliter idem perficitur.



1 Q + 4 $\frac{1}{2}$ R = 4 $\frac{1}{2}$
2 $\frac{1}{4}$
2 $\frac{1}{4}$
4
1
5 $\frac{1}{16}$
4 $\frac{1}{2}$
9 $\frac{9}{16}$
℞ 9 $\frac{9}{16}$ — 2 $\frac{1}{4}$

Cæterę partes non latebunt, altera namque ipſius 6, erit 5 $\frac{1}{4}$ — ℞ 9 $\frac{9}{16}$, alias quoque facilè eſt reperire.

Quod autem illa fractio $\frac{26 \frac{1}{4} + ℞\, 239 \frac{1}{16}}{3 \frac{1}{8} + ℞\, 59 \frac{49}{64}}$; æqualis ſit huic numero ℞ 9 $\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$, hunc in modum oſtendemus. Quoniam enim 3 $\frac{1}{8}$ + ℞ 59 $\frac{49}{64}$, ſi ducatur in ℞ 9 $\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$, debet producere 26 $\frac{1}{4}$ + ℞ 239 $\frac{1}{16}$, proinde multiplicemus prędictos numeros inter ſe. Si itaque ducamus $\frac{3}{4}$, in ℞ 59 $\frac{49}{64}$, fiet ℞ $\frac{34425}{1024}$, ſi verò multiplicemus 3 $\frac{1}{8}$, per $\frac{3}{4}$, producetur $\frac{75}{32}$, at verò multiplicata

3 $\frac{1}{8}$ + ℞ 59 $\frac{49}{64}$
℞ 9 $\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$
$\frac{75}{32}$ + ℞ $\frac{34425}{1024}$
℞ $\frac{95625}{1024}$ + ℞ $\frac{585225}{1024}$
26 $\frac{1}{4}$ + ℞ 239 $\frac{1}{16}$

℞ 9 $\frac{9}{16}$, per ℞ 59 $\frac{49}{64}$, fit ℞ $\frac{585225}{1024}$, habet autem radicem hic numerus fractus $\frac{585225}{1024}$, & eſt $\frac{765}{32}$, hoc eſt 23 $\frac{29}{32}$. Præterea ſi ducatur ℞ 9 $\frac{9}{16}$, in 3 $\frac{1}{8}$.

Fit R $\frac{95625}{1024}$; at verò ſi $\frac{75}{32}$, addantur ad 23 $\frac{23}{32}$, fit ſumma 26 $\frac{1}{4}$, inſuper quoniam R $\frac{34425}{1024}$, & R $\frac{95625}{1024}$, ſunt commenſurabiles; communis enim diuiſor eſt R 153; quæ diuidens R 34525; facit quotientem R 225, nempe 15, & diuidens R 95625, facit quotientem R 625, cuius radix quadrata eſt 25; at verò 40, eſt ſumma ex 15, & 25, quadratum eius eſt 1600, quo ducto in 153, quadtatum communis diuiſoris; fit 244800, atque adeo erit $\frac{244800}{1024}$, huius latus quadratum eſt R 239 $\frac{1}{16}$, nam ſi 244800, diuidatur per 1024, fit 239, $\frac{1}{16}$, cuius radix quadrata eſt R 239 $\frac{1}{16}$.

34425 | 225
153 | 15
95625 | 625
153 | 25

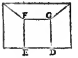
15
40
40
1600
153
4800
8000
1600
244800

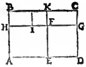
$\frac{244800}{1024}$ | 239 $\frac{1}{16}$.

Duobus modis hucuſque propoſito Problemati ſatisfecimus; placet etiam alia via incidenter idem Problema enodare; Quamobrem ſatisfaciemus.

Aliter idem abſoluitur.

Aliter iiſdem ſuppoſitis; & latus maius eſſe 10, latus verò minus eſſe 6, ſit rectangulum E F, G D, quarta pars totius rectanguli; adeo vt ſi F H, ſecetur bifariam in I, rectangulum I C, ſit quoque quarta pars, atque adeo eidem E G, çquale; adeo nimirum vt A C, rectangulum ad E G, vel ad I C, rationem habea vt 4, ad 1, quæritur F E, ſiue G D. Dico igitur eam eſſe 1 R, rectangulum A C; erit 60; & E G, erit $\frac{60}{4}$, hoc enim modo erit vt 4, ad 1, ita 60, ad $\frac{60}{4}$. Sed recta F G, erit $\frac{60}{4R}$, at B H, erit 6 − 1 R, & B K, erit 10 − $\frac{60}{4R}$. Rectangulum verò H K, erit illud, quod fit ſub B H, 6 − 1 R, & B K, 10 − $\frac{60}{4R}$, rectangulum autem eſt 60 − $\frac{360}{4R}$ − 10 R ✠ $\frac{60R}{4R}$, rectangulum verò F C, erit $\frac{360 - 60R}{4R}$.





Duplum verò rectangulum I C, ſeu rectangulum duplum I K, plus duplo rectangulo F C, ſeu rectangulum H K, plus duplo rectangulo F C, eſt 60 − $\frac{360}{4R}$ − 10 R ✠ $\frac{60}{4}$ ✠ $\frac{720}{4R}$ − $\frac{120}{4}$ ſeu 60 − 10 R − $\frac{60}{4}$ ✠ $\frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum I C, eſt 60 − $\frac{360}{4R}$ − 10 R ✠ $\frac{60}{4}$ ✠ $\frac{720}{4R}$ − $\frac{120}{4}$. Vel 60 − 10 R − $\frac{60}{4}$ ✠ $\frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum E G, eſt $\frac{120}{4}$. Sed ex hypotheſi æqualia ſunt I C, E G, ob id eorum dupla etiam erunt æqualia 60 − 10 R − $\frac{60}{4}$ ✠ $\frac{360}{4R}$ = $\frac{120}{4}$. Addita verò fractione

10 − $\frac{60}{4R}$
6 − 1 R
− 10 R ✠ $\frac{60R}{4R}$
60 − $\frac{360}{4R}$
60 − $\frac{360}{4R}$ − 10 R ✠ $\frac{60R}{4R}$ ſeu $\frac{60}{4}$

ne $\frac{60}{4}$, vtrinque fiet æquatio $60 - 10\,R + \frac{150}{4\,R} = \frac{180}{4}$. Diuiſis autem omnibus per 10, fit $6 - 1\,R + \frac{15}{4\,R} = \frac{18}{4}$. Atque adeo $6 - 1\,R + \frac{9}{1\,R} = 4\frac{1}{2}$. Ductis omnibus in 1 R, fit æquatio $6\,R - 1\,Q + 9 = 4\frac{1}{2}\,R$. Proinde $6\,R + 9 = 4\frac{1}{2}\,R + 1\,Q$, & rurſus $1\frac{1}{2}$ ℞ $+ 9 = 1\,Q$. Denique $1\,Q - 1\frac{1}{2}\,R = 9$. Huius autem æquationis radix ſic eruetur. Dimidium numeri radicum eſt $\frac{3}{4}$, quadratum huius eſt $\frac{9}{16}$, quo addito ad 9, fit $9\frac{9}{16}$, cuius radix quadrata eſt ℞ $9\frac{9}{16}$, quæ ſi addatur ad $\frac{3}{4}$, dimidium numeri radicum, fiet ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$. Partes autem reliquæ non latebunt.

SCHOLION.

Aliter instituitur resolutio.

Eandem etiam æquationem eſſemus conſecuti, ſi nimirum, à nobis poſitum fuiſſet $\frac{60\,R + 12\,Q}{5 + 1\,R} = 60$. In primo ſcilicet modo iſtarum reſolutionum; quandoquidem fuiſſet æquatio $\frac{240\,R + 48\,Q}{5 + 1\,R} = 60$.

Atque adeo $240\,R + 48\,Q = 300 + 180\,R$, proinde $48\,Q + 60\,R = 300$, factoque paraboliſmo, eadem æquatio, vt ibi $1\,Q + 1\frac{1}{4}\,R = 6\frac{1}{4}$, conſurget, quod animaduertiſſe volumus.

Hinc autem perſpicuum fit, qua arte duo latera propoſita diuidere valeamus, & ne vtamur yſdem numeris, ſint 20, & 12, & oporteat diuidere vtrumque in tales duas partes nimirum 12, in duas tales partes, & 20, in duas quoque huiuſmodi partes, quod minor pars numeri 12, ad maiorem ſit, vt differentia partium numeri 20, ad maiorem partem eiuſdem numeri 20, multiplicata verò minori parte ipſius 12, in maiorem numeri 20, fiat 60.

Pars maior numeri 12, eſto $6 + 1\,R$, minor erit $6 - 1\,R$, pars autem minor numeri 12, ducta in partem maiorem numeri 20, tantum facit, quantum differentia partium numeri 20, ducta in partem maiorem numeri 12, & vtrumque productum debet efficere 60; ob id oportet diuidere 60, per $6 + 1\,R$, vt habeatur $\frac{60}{6 + 1\,R}$, pro differentia duarum partium ipſius 20, deinde diuidatur idem numerus 60, per $6 - 1\,R$, & habebimus $\frac{60}{6 - 1\,R}$, pro parte maiori ipſius 20, vt autem minorem partem indagemus ſubtrahatur differentia partium numeri 20, nimirum $\frac{60}{6 + 1\,R}$, ab ipſa maiori parte $\frac{60}{6 - 1\,R}$, & remanebit $\frac{120\,R}{36 - 1\,Q}$, hoc autem reſiduum ſi addatur $\frac{60}{6 - 1\,R}$, maiori parti numeri 20, habebimus $\frac{360 + 180\,R}{36 - 1\,Q}$, ſiquidem reperto bimonio, per quod ſi multiplicetur denominator $6 - 1\,R$, fiat denominator $36 - 1\,Q$, reuocabitur fractio $\frac{60}{6 - 1\,R}$, ad eandem denominationem alterius fractionis $\frac{120\,R}{36 - 1\,Q}$, binomium autem iſtud eſt $6 + 12$, per quod ſi ducatur $6 - 1\,R$, proueniet $36 - 1\,Q$, ſi verò ducatur 60, proueniet $\frac{360 + 60\,R}{36 - 1\,Q}$, facta autem additione iſtarum fractionum, proueniet $\frac{360 + 180\,R}{36 - 1\,Q}$, hoc autem æquatur numero 20, & extracta radice ſecundum artem reperiemus 1 R, pretium ℞ $38\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}$, atque adeo partes non latebunt.

ADMONITIO.

Cæterùm ſuperius allatum Problema illud eſt; quod mihi reſoluendum propoſitum fuit; Vnuſquiſque videbit ex dictis me Quæſtioni per modum Zeteſeos propoſitæ ſatisfeciſſe; in Algebra verò Specioſa; ſeu potius in Tractatu de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica conſpiciet, me idem Problema de parallelogrammo propoſitum Analyticè explicaſſe, & ipſius Analyſeos veſtigijs obſeruatis compoſuiſſe; atque adeo Geometricè feliciter illud enodaſſe. Verùm enim verò in libro, cui titulum fecimus, Diuerſorum Problematum collectio; in quo quamplurima ſumus Problemata explicaturi; & ſimilia huic, & longè dificiliora in Artis illuſtrationem enodabimus. Interim enim hoc, cum alijs, hiſce attulimus vt ſtatim Artis præcepta tradita, exemplis quoque conſpicerentur illuſtrata; non enim dubium quin præcepta

ipſa longè facilius percipiantur, dum ad praxim reuocata conſpiciuntur. Longè tamen iucundius erit Problemata, & numeris enodata, & beneficio Specioſæ Logiſtices reſoluta; repertiſque ipſius Analyſeos veſtigijs compoſita (quando tamen Problematis natura id patitur) atq; Geometricè demonſtrata conſpicere, quod nos in præcitato loco præſtabimus. Quinimo noſtras quoque partes eſſe putamus non ſolum nouæ vt dictum eſt, ſed etiam veteris, ſeu numeroſæ logiſtices ſic Problemata Geometrica tractare; vt conſtet ea vti nos poſſe ad affectionem Geometricam comparandam, relicta demonſtrationis cura doctrinæ ex Elementis Euclidis ac aliorum excerptæ; Artem tamen ipſam, huiuſmodi logiſticem ſcilicet ad id conſequendum in Tractatu de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica explicabimus; & quidem copioſius, quam in noſtro opere hac de re pridem edito præſtiterimus.

PROBLEMA XV.

Data baſe trianguli, datis etiam exceſſibus, quibus crura ſuperant perpendicularem ipſius oportet reperire trianguli latera, & perpendicularem.

Poſitio, & reſolutio. Hoc Problema duplicem caſum habet, Vel enim perpendicularis cadit intra triangulum, quo caſu oportet compoſitum ex exceſſibus minorem eſſe baſe, vel cadit extra, quo caſu neceſſe eſt differentiam exceſſuum minorem eſſe baſe.

PRIMVS CASVS.

Data ſit baſis 21, & exceſſus quo crus maius ſuperat perpendicularem ſit datus 8, exceſſus quo crus minus ſuperat eandem ſit 1, ſupponendum differentiam exceſſuum idem eſſe, ac differentiam laterum.

Primi caſus reſolutio. Differentia ſegmentorum baſis ſit 1 R, quamobrem 21 ✠ 1 R, erit duplum ſegmentum maius quapropter ipſum ſegmentum maius erit $10\frac{1}{2}$ ✠ $\frac{1}{2}$ R. At verò rectangulum comprehenſum ſub differentia laterum, & eorundem aggregato, æquale eſt illi, quod comprehenditur ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſi; proinde erit vt 7, differentia laterum ſiue differentia exceſſuum ad 1 R, ita 21, ad aliud puta $\frac{21\,R}{7}$, adeo vt aggregatum laterum ſit $\frac{21\,R}{7}$, huic ſubtrahatur exceſſus, quo latus minus ſuperat perpendicularem, vt fiat reliquum $\frac{21\,R}{7} - 1$, eſt autem rectangulum ſub exceſſu quo latus maius ſuperat perpendicularem, & ſub aggregato ex latere maiori, & perpendiculari, æquale quadrato ſegmenti maioris, quod eſt $10\frac{1}{2}$ ✠ $\frac{1}{2}$ R. Proinde $\frac{168\,R}{7} - 8$, quod eſt rectangulum ſub $\frac{21\,R}{7} - 1$, nempe aggregato laterum minus differentia, qua latus minus ſuperat perpendicularem, atque adeo aggregatum ex latere maiori, & perpendiculari ſub 8, exceſſu, quo latus maius ſuperat perpendicularem æquabitur $\frac{441}{4}$ ✠ $\frac{1}{4}$ Q ✠ $10\frac{1}{2}$ R, quadrato ſegmenti maioris, vt conſtat ex multiplicatione, omnibus ductis in 4, fiet $\frac{672\,R}{7} - 32 = 441$ ✠ 1 Q ✠ 42 R, & per Antitheſin $\frac{672\,R}{7} - 42\,R - 1\,Q = 441$ ✠ 32, hoc eſt 473, ſeu quod idem eſt 96 R − 42 R, hoc eſt;

Et

54 R — 1 Q ⊐ 473		27
	729	27
27		
16	256	189
		54
11	1 6	
		729

Et extracta radice ſecundum Artem, fiet 1 R, valor 11, & eſt differentia ſegmentorum baſis; Si verò fiat vt 7, differentia laterum ad 11, differentiam ſegmentorum baſis, ~~ita 21,~~ baſis ad aliud, nempe 33, innoteſcet aggregatum laterum, à quo dempta 7, differentia laterum remanet 26, cuius dimidium eſt latus minus; nempe 13, maius autem erit 20, nempe 13, plus 7. Sic etiam innoteſcet perpendicularis 12.

Aliter perpendicularis eſto 1 R, latus maius erit 8 + 1 R, latus autem minus erit 1 + 1 R, iſtorum quadrata ſunt 1 + 2 R + 1 Q, & 64 + 16 R + 1 Q, vtrinque ſublato 1 Q, nempe quadrato perpendicularis, remanebit 1 + 2 R, quadratum ſegmenti minoris, & 64 + 16 R, quadratum ſegmenti maioris, quamobrem ſegmenta ipſa erunt ℞ (1 + 2 R), & ℞ (64 + 16 R), ſi verò inuicem multiplicentur, & producti ſumatur duplum, fiet ℞ (256 + 576 R + 128 Q), addatur hoc ad 1 + 2 R, & 64 + 16 R, quadrata ſegmentorum, vt habeatur 65 + 18 R + ℞ (256 + 576 R + 128 Q), quod æquabitur 441, quadrato nimirum baſis, vtrinque auferatur 65 + 18 R, fiet æquatio ℞ (256 + 576 R + 128 Q) ⊐ 376 — 18 R, ergo etiam quadrata erunt inter ſe æqualia 256 + 576 R + 128 Q ⊐ 141376 — 13536 R + 324 Q, & obſeruatis Artis præceptis, fiet 72 R — 1 Q ⊐ 720, cuius radix eſt 12.

SECVNDVS CASVS.

Secundi caſus reſolutio.

DAti ſint exceſſus 3, & 8, data ſit baſis 7, compoſitum ex dupla intercepta, & baſi, dico eſſe 1 R, ergo 1 R † 7, erit duplum compoſiti ex baſe, & intercepta linea, vſque ad perpendicularem; quamobrem ſimplum erit $\frac{1}{2}$ R † 3 $\frac{1}{2}$; quoniam autem rectangulum ſub differentia laterum, & compoſito ex lateribus æquale eſt rectangulo ſub baſi, & ſub aggregato ex baſi atque ex dupla intercepta, proinde erit vt 8 — 3, ſeu quod idem eſt, vt 5, differentia exceſſuum, atque adeo differentia laterum ad 7, baſim ita 1 R, ad $\frac{7R}{5}$, cui ſi auferatur 3, exceſſus lateris minoris ſupra perpendicularem remanebit $\frac{7R}{5}$ — 3, pro aggregato ex latere maiori, & perpendicularis, eſt autem rectangulum ſub hoc aggregato, & exceſſu lateris maioris ſupra perpendicularem, puta 8, æquale quadrato aggregati ex baſe, & intercepta inter baſim, & perpendicularem, proinde $\frac{7R}{5}$ — 3, ducatur in 8, & fit $\frac{56R}{5}$ — 24, quod æquale eſt $\frac{1}{4}$ Q † $\frac{49}{4}$ † 3 $\frac{1}{2}$ R, ductis omnibus in 4, ad integrandam poteſtatem, & erit $\frac{224R}{5}$ — 96 ⊐ 1 Q † 49 † 14 R, atque adeo $\frac{224R}{5}$ — 14 R — 1 Q ⊐ 49 † 96, hoc eſt 44 $\frac{4}{5}$ R — 14 R, hoc eſt 30 $\frac{4}{5}$ R — 1 Q ⊐ 145, cuius æquationis radix eſt 25.

Aliter

Aliter iiſdem poſitis, nempe 8, 3, pro differentijs; ſitque baſis 7, vt priùs. Perpendicularis eſto 1 R, latus minus erit 3 † 1 R, eius quadratum eſt 9 † 6 R † 1 Q, à quo dempto 1 Q, quadrato nimirum perpendicularis, remanebit 9 † 6 R, cuius ℞ Q, nempe ℞ (9 † 6 R), erit intercepta linea inter perpendicularem; & angulum trianguli, at verò quadratum ex latere maiori eſt 64 † 16 R † 1 Q, à quo dempto 1 Q, nempe quadrato perpendicularis, remanebit 64 † 16 R, cuius ℞ Q, eſt ℞ (64 † 16 R), habebitur aggregatum ex baſe, & ex recta illa intercepta ſi ad ℞ (9 † 6 R), addatur 7, fiet enim ℞ (9 † 6 R) † 7, quod æquabitur ℞ (64 † 16 R), at verò quadratum ex ℞ (9 † 6 R) † 7, eſt ℞ (1764 † 1176 R) † 58 † 6 R, quod æquabitur 64 † 16 R, vtrinque ſublatis 58 † 6 R, fiet æquatio ℞ (1764 † 1176 R) ⧧ 6 † 10 R, atque adeo 1764 † 1176 R ⧧ 36 † 120 R † 100 Q, & conſequenter 1728 † 1056 R ⧧ 100 Q, & fiet 1 R, valor 12.

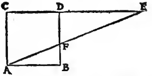
3 † 1 R
3 † 1 R
3 R † 1 Q
9 † 3 R
9 † 6 R † 1 Q

8 † 1 R
8 † 1 R
8 R † 1 Q
64 † 8 R
64 † 16 R † 1 Q

PROBLEMA XVI.

Propoſitum ſit quadratum A B C D, cuius latus ſit 2, ſitque protractum latus C D, itaut ſi à puncto A, ducatur recta, quæ occurrat ipſi C D, in E, protracta, triangulum efformet F D E, æquale quadrato iam dicto. Quæritur quanta ſit A E, quanta A F.

Poſitio, & reſolutio. Dico B F, eſſe 1 R, ergo D F, erit 2 — 1 R, quoniam autem angulus A B F, in triangulo A B F, rectus eſt, atque adeo æqualis angulo F D E, angulus autem A F B, æqualis [a], eſt ipſi D F E, vtpotè ad verticem, reliquus [b], erit æqualis reliquo, ſunt igitur triangula æquiangula; atq; adeo [c], habebunt latera proportionalia, quæ circum æquales angulos, quamobrem, vt 1 R, ad 2, ſcilicet vt F B, ad B A, ita erit F D, nimirum 2 — 1 R, ad D E, quare fiat vt 1 R, ad 2, ita 2 — 1 R, ad aliud, illud erit $\frac{4 - 2 R}{1 R}$, & quia triangulum F D E, eſt dimidium rectanguli, quod eſt duplum quadrati, cuius latus eſt 2, quadratum eſt 4, ob id rectangulum ſub F D, & D E, erit æquale 8, proinde rectangulum ſub 2 — 1 R, & $\frac{4 - 2 R}{1 R}$, æquale debet eſſe 8, & facta ordinatione æquationis ſecundum artem; reperietur 1 R, valor 4 — ℞ 12. Ita illi quatuor termini ſunt 4 — ℞ 12, 2, ℞ 12 — 2, $\frac{℞ 48 - 4}{4 - ℞ 12}$.



B F	1 R
A B	2
F D	2 — 1 R
D E	$\frac{4 - 2 R}{1 R}$

8 — 8 R † 2 Q ⧧ 8 R
8 † 2 Q ⧧ 16 R
8 ⧧ 16 R — 2 Q
8 R — 1 Q ⧧ 4
4 — ℞ 12, 1 R

Rectangulum

Rectangulum autem ſub ℞ 12 — 2, & $\frac{\text{℞}\,48-4}{4-\text{℞}\,12}$, debet eſſe æquale 8, & ita eſt, propterea quod, ſi ducamus $\frac{\text{℞}\,48-4}{4-\text{℞}\,12}$, in ℞ 12 — 2. Fit $\frac{32-\text{℞}\,768}{4-\text{℞}\,12}$, hoc eſt 8; Itaque F B, erit 4 — ℞ 12, pars altera F D, erit ℞ 12 — 2, at vero D E, erit $\frac{\text{℞}\,48-4}{4-\text{℞}\,12}$. Tota igitur C E, erit 2 † $\frac{\text{℞}\,48-4}{4-\text{℞}\,12}$. Vnde A E, non latebit.

℞ 48 — 4
℞ 12 — 2

— ℞ 192 † 8
24 — ℞ 192

32 — ℞ 768

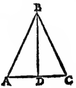
4 — ℞ 12

PROBLEMA XVII.

EST triangulum, cuius anguli ad baſim, dupli ſunt anguli ad verticem, eiuſque ſuperficies eſt 10, quæruntur latera.

Poſitio, & reſolutio.

Reperiamus triangulum aliquod prędictas habens conditiones, ſitque baſis eius 2, reperiemus autem latus hoc modo, ſupponendo illud eſſe 1 R † 2, diuidendum extrema ac media ratione, ducatur nimirum 2 † 1 R, in 1 R, & oritur 2 R † 1 Q, quod æquabitur quadrato partis maioris 2, nimirum 4, ſi enim baſis eſt 2, erit etiam pars maior illius lateris 2, huius autem æquationis radix eſt ℞ 5 † 1. Itaque pars minor erit ℞ 5 — 1, totum latus ℞ 5 † 1, & pars maior 2, ſumatur autem quadratum ex ℞ 5 † 1, illud erit 6 † ℞ 20, à quo ſi dematur 1, quadratum ex dimidio baſeos orietur 5 † ℞ 20, cuius ℞ Q eſt ℞ Q (5 † ℞ 20), hoc autem latus eſt quantitas perpendicularis iſtius trianguli. Nunc oportet indagemus triangulum, cuius ſuperficies eſt 10, dimidium baſeos iſtius, debet eſſe ad ſuam perpendicularem, vt vnum dimidium baſeos iam inuenti trianguli ad perpendicularem ſuam ℞ (5 † ℞ 20), ſi itaque dicamus. Vt eſt 1, ad ℞ Q (5 † ℞ 20), ita ſit vnum radicis ad aliud; illud erit ℞ Q (5 † ℞ 20), radicis quæ ſi inuicem multiplicentur, producent ℞ Q (5 † ℞ 20), quadrati, quod eſt rectangulum factum ſub dimidio baſeos, & ſub perpendiculari, æquale quidem ipſi triangulo, nimirum 10, quamobrem eorum quadrata erunt æqualia, ſcilicet 5 † ℞ 20, æquabitur 100, Diuiſis 100, per 5 † ℞ 20, quod fit ducendo 5 † ℞ 20, in 5 — ℞ 20, reſiduum, & fit 5, diuiſor; ducantur 100, in idem 5 — ℞ 20, & fit 500 — ℞ 200000, quo diuiſo per 5, fit ℞ 2 QQ (100 — ℞ 8000), & eſt 1 R, pretium quo ducto in 2, fit ℞ QQ (1600 — ℞ 2048000), reperiemuſque latus eſſe ℞ QQ (℞ 28800000 † 800 — ℞ 37888000), perpendicularis autem reperietur eſſe ℞ QQ (℞ 20000000) † 500 — ℞ 16200000),



℞ QQ (20000000 † 500 — ℞ 16200000)
℞ QQ (100 — ℞ 8000)

— ℞ 160000000000 — ℞ 2000000000 † ℞ 129600000000
4 0 0 0 0 0   3 6 0 0 0 0
℞ 200000000000 † 50000 — ℞ 162000000000

Productum eſt 10

Si fiat additio obſeruatis pręceptis ſignorum †, & —, reperiemus vtramque radicem

cem ℞ 16200000000, de medio tollendam eſſe, at verò ſi ad 360000, addantur 50000, fit ſumma 410000, à quo ſi demantur 400000, remanebit 10000, cuius radix quadrato-quadrata eſt 10. Habetur autem bis ℞ Q 16200000000, quoniam ex ductu 100, in ℞ 1620000, fit productum ℞ 16200000000, & afficitur ſigno —; quoniam †, in —, facit —. At verò ex ductu ℞ 2000000, in 100, fit ℞ 20000000000, & afficitur nota †, ſi verò ducatur ℞ 8000, in 500, fit ℞ 2000000000, horum ſumma eſt ℞ 16200000000, nam communis diuiſor eſt ℞ 2000000000, quæ diuidens ſe facit quotientem ℞ 1, nempe 1, & diuidens ℞ 20000000000, facit quotientem ℞ 100, nempe 10, à quo dempto 1, fit reſiduum 9, ducatur in ℞ 2000000000, quod aſſequemur reducendo 9, ad naturam radicis, nimirum quadratè multiplicando, & fit productum ℞ 16200000000, afficiturque nota †, cum altera afficeretur nota —. Quamobrem fit illud productum, vti dicebamus 10.

Oportet autem aduertere in ſuperiori pragmatia per mutuam ſcilicet illam multiplicationem, produci 10, etenim numerus 160000000000, eſt rationalis, eiuſque latus quadratum eſt 400000. Inſuper numerus 129600000000, eſt rationalis, eiuſque latus quadratum eſt 360000; Cum verò 50000, & 360000, afficiantur ſigno †, ex ijs fit ſumma † 410000, & quia 400000, afficitur ſigno —, propterea additione inſtituta, inſpecta natura ſignorum, proueniet 10000, cuius latus quadrato-quadratum eſt 10. Cæterùm ſi ad † ℞ 20000000000, addatur — ℞ 2000000000, prouenit † ℞ 16200000000, hæc autem cum bis ſit repetita, ſemel affecta ſigno †, & ſemel affecta ſigno —, euaneſcit.

S C H O L I O N.

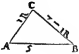
Ex huius Problematis reſolutione, multorum quoque reſolutio poteſt innoteſcere, vt ſuo loco manifeſtum fiet, ſcilicet in noſtro opere, in quo quamplurima Problemata reſoluenda ſuſcepimus.

Cæterùm hoc Problema reſoluendum nobis propoſitum fuit, nec apud aliquem Auctorem illud enodatum vidimus, id autem animaduertiſſe opera pratium iudicamus, ne ſi fortè lector viderit ab aliquo illi ſatisfactum fuiſſe, ab eo nos hanc reſolutionem emendicaſſe arbitraretur. Quod autem de hypotheſi ſuperficiei 10, pronunciauimus, cuicumq; numero quidem aptari poterit.

PROBLEMA XVIII.

Data ſumma laterum alicuius trianguli, dataque ratione ſumma quadratorum à lateribus ad eiuſdem trianguli ſuperficiem; reperire latera.

Poſitio, & reſolutio. Datum ſit triangulum A B C, cuius latera ſimul conficiant 12, ratio verò quadratorum ſimul ſumptorum à lateribus ad ſuperficiem trianguli ſit, vt 25, ad 3, latus A B, ſit 5, ſumma reliquorum erit 7, dicamus vnum ex ipſis eſſe 1 R, puta, A C, aliud, nempe B C, erit 7 — 1 R; ſumatur dimidium aggregati ex lateribus, nempe 6, & ab hoc dimidio ſubtrahantur ſingula latera, nimirum 1 R, 5, 7 — 1 R, fient reſidua hæc, puta 6 — 1 R, 1, 1 R — 1, ducatur 6 — 1 R, in 1, & fit 6 — 1 R,



hoc

hoc productum ducatur in 1 R — 1, & fit 7 R — 6 — 1 Q, ducatur in idem dimidium 6, & fit 42 R — 36 — 6 Q, huius radix quadrata, videlicet ℞ (42 R — 36 — 6 Q), eſt trianguli ſuperficies, Summa verò quadratorum ex lateribus eſt 74 — 14 R † 2 Q, cuius quadratum eſt 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ, & quadratum ex ℞ (42 R — 36 — 6 Q), eſt 42 R — 36 — 6 Q; vt verò eſt 3, ad 25, ita debet eſſe ℞ (42 R — 36 — 6 Q), ad 74 — 14 R † 2 Q; ergo vt eſt 9, ad 625, ita debet eſſe 42 R — 36 — 6 Q, ad 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ; quamobrem productum ſub extremis, æquale eſt producto ſub medijs; itaque erit æquatio hoc modo 26250 R — 22500 — 3750 Q = 49284 — 18648 R † 4428 Q — 504 C † 36 QQ, & per Antitheſin fiet hæc æquatio, puta 44898 R † 504 C = 71784 † 8178 Q † 36 QQ, atque demum 7483 R † 84 C — 1363 Q — 6 QQ = 11964, factoque Paraboliſmo fiet

6   6   6
1 R   5   7 — 1 R
6 — 1 R   1   1 R — 1
1

6 — 1 R
1 R — 1

— 6 † 1 R
6 R — 1 Q

7 R — 6 — 1 Q

7 — 1 R
7 — 1 R

— 7 R † 1 Q
49 — 7 R

49 — 14 R † 1 Q
25

74 — 14 R † 1 Q
74 — 14 R † 1 Q
1 Q

74 — 14 R † 2 Q
74 — 14 R † 2 Q

148 Q — 28 C † 4 QQ
— 1036 R † 196 Q — 28 C
5476 — 1036 R † 148 Q

5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ

æquatio huiuſmodi $\frac{7483\ R}{6}$ † $\frac{84\ C}{6}$ — $\frac{1363\ Q}{6}$ — 1 QQ = $\frac{11964}{6}$, & per iſomœriam reducetur ex præceptis traditis ſuo loco ad hanc æquationem, nimirum 269388 R † 84 C — 8178 Q — 1 QQ = 2584224, cuius radix eſt 18, & quia (vt nos cap. de Paraboliſmo docuimus) hæc noua radix diuidi debet per communem illum diuiſorem, ſiue per numerum elatioris poteſtatis, qui numerus cum ſit 6, inſtituta diuiſione, fiet quotiens 3, quamobrem Radix quæſita ſuperioris æquationis 748 R † 84 C — 1363 Q — 6 QQ = 11964, erit 3, cæterum huius æquationis 269388 R † 84 C — 8178 Q — 1 QQ = 2584224, reperitur 18, vti dicebam Arte ſuo loco ſuperiùs tradita, ad eum modum, quem vnicuique licet hic intueri. Neglex imus autem methodum Vietæam, vtpotè nimis longam, ſed noſtra hac vſi ſumus, quæ compendioſior eſt; eadem hæc autem adhiberi poteſt in omnibus huius generis Problematibus, in quorum ſcilicet explicationibus huiuſmodi æquationes occurrunt;

runt; æquationes enim, in quibus dignitates ad altiores gradus aſcendunt, non diſſimili artificio, poſſunt explicari; quemadmodum à nobis planum fiet.

1 8

269388 R † 84 C — 8178 Q — 1 QQ = 2584224

Quadrato-quadratum primæ figuræ adde.	1
Ex aggregato.	2594
Subtrahe cubum primæ figuræ ductum in numerum cuborum.	84
Ad reſiduum.	25102
Adde quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8178
Ab aggregato annexa ſequente figura.	332802
Subtrahe primam figuram ductam in numerum radicum.	269388
Ad reſiduum inuenta ſecunda figura.	63414
Adde quadruplum cubum primæ ductum in ſecundam.	32
Ad aggregatum.	66614
Adde ſextuplum quadrati primæ figuræ ductum in quadratum ſecundæ.	384
Ad aggregatum.	70454
Adde Quadruplum primæ figuræ, ductum in cubum ſecundæ.	2048
Ad aggregatum.	725024
Adde quadrato-quadratum ſecundæ figuræ.	4096
Ab aggregato.	729120
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à ſecunda figura.	2016
A reſiduo.	527520
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum cuborum, & à quadrato ſecundæ figuræ.	161280
A reſiduo ſubtrahe cubum ex ſecunda figura ductum in numerum cuborum.	366240
	43008
Ad reſiduum.	323232
Adde numerum à producto ex duplo primę, & ſecundę figurę in numerum quadratorum.	1308480
Ad aggregatum.	1631712
Adde numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ ducto in numerum quadratorum.	523392
A reſiduo.	2155104
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura ducta in numerum radicum, & nihil remanebit.	2155104
	0 0

Superiùs igitur poſitę æquationis Radix quadrata eſt 18; cæterum ſecunda figura 8, reperietur parato diuiſore ad eum modum, quo ſuperiùs inſinuauimus; diuiſor enim debet eſſe talis. Vt inſtituta diuiſione fiat quotiens, adeo vt additis addendis, & ſubtractis ſubtrahendis nihil remaneat; reperietur autem, vti dicebamus, diuiſor, ſine magno labore obſeruatis ijs, quæ nos ſuperiùs explicuimus.

Ex his autem, quæ nos in medium attulimus perſpicuum eſt iſtarum æquationum explicationem non inutilem eſſe. Quaſi nimirum nullius momenti in ijs, quæ vſu venire ſolent exiſtimari debeant. Quemadmodum nonnullos inſulsè loquentes ſępæſępius audiuimus; Sed longè clariùs earundem æquationum vtilitas conſtabit, vt opinor cum nos Opus illud, in quo multiſſima Problemata reſoluimus in ſtudioſorum gratiam Typis committemus, quod breui, Deo fauente, Beatiſſimaq; Virgine opitulante futurum eſſe ſperamus.

Vnde

Vnde autem hanc Pragmatiam deduxerimus, præſtabit adnotare, ne quis arbitretur eam caſu fuiſſe à nobis inſtitutam.

In cuius gratiam non pigebit afferre geneſin poteſtatum vſque ad Quadrato-quadratum.

$$
\begin{array}{r}
a + e \\
a + e \\
\hline
a e + e^2 \\
a^2 + \quad a e \qquad \\
\hline
a^2 + 2 a e + e^2 \\
a + e \\
\hline
a^2 e + 2 a e^2 + e^3 \\
a^3 + 2 a^2 e + \quad a e^2 \qquad \\
\hline
a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3 \\
a + e \\
\hline
a^3 e + 3 a^2 e^2 + 3 a e^3 + e^4 \\
a^4 + 3 a^3 e + 3 a^2 e^2 + \quad a e^3 \qquad \\
\hline
a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4
\end{array}
$$

Speciebus igitur numerorum loco vtentes, rem abſoluemus, vt inde innoteſcat, quo pacto in numeris idem perfici debeat.

Intelligatur itaque radicum numerus b^3, numerus autem Quadrarorum ſit f^2, & Cuborum numerus ſit d, vel ſi placet radicum numerus ſit b ſol. numerus autem Quadratorum ſit f planum, atque numerus Cuborum ſit d. Cum autem binomia radix ſit $a + e$, hæc quidem ducta in b ſolidum producet b ſolidum $a +$ b ſolido e. Cum autem Quadratum à binomia radice ſit $a^2 + 2 a e + e^2$, hoc ſi ducatur in f planum, proueniet f planum $a^2 + 2$ f pl. $a e +$ f pl. e^2; Et quoniam ab eadem radice binomia Cubus eſt $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$, ſi hic ducatur in d, proueniet $d a^3 + 3 d a^2 e + 3 d a e^2 + d e^3$. Et quia quadrato-quadratum à prædicta radice binomia eſt $a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$; propterea hoc ex radicum numero ſubtrahi debet, vnà cum numero Quadratorum, ex numero inquam radicum, plus cuborum numero, ex hoc enim aggregato ſubtractio facienda eſt iuxta tenorem æquationis propoſitæ. Quamobrem ſi pro Comparationis homogeneo intelligatur z pl. pl. proueniet æquatio b ſol. $a +$ b ſol. $e + d a^3 + 3 d a^2 e + 3 d a e^2 + d e^3 -$ f pl. $a^2 - 2$ f pl. $a e -$ f pl. $e^2 - a^4 - 4 a^3 e - 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4$, quod æquabitur z pl. pl.

Cum itaque conſtauerit radicem eſſe binomiam, atque repertum fuerit latus ſin-

$$
\begin{array}{l}
+ \text{ b ſol.} \\
+ 3 d a^2 \\
+ 3 d a \\
+ d \\
- 2 \text{ f pl.} \\
- \text{f pl.} \\
- 4 a^3 \\
- 6 a^2 \\
- 4 a
\end{array}
$$

gulare primum, illicò deprehendetur diuiſor ad indagandum latus ſingulare ſecundum. Diuiſor autem erit qui ſupra.

 Inſtituta

Inſtituta autem diuiſione, atque reperto ſingulari latere ſecundo, addenda ſunt plano-plana Comparationis homogeneo quędam, & quædam ſubtrahenda, prout ſignorum †, & —, affectio reperta in ęquatione indicat; ita vt additis addendis, & ſubtractis ſubtrahendis nihil remaneat.

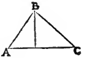
Vides igitur quo artificio procedat Analyſta ad extrahendam quidem radicem æquationis propoſitæ.

Et quod mirum eſt eadem induſtria infinitæ æquationes poſſunt explicari, quod Veteres ignorarunt; vndè à ſimilibus æquationibus abſtinendum putarunt.

PROBLEMA XIX.

DATA baſe trianguli, dataque ratione ſumma quadratorum à lateribus ad ſuperficiem trianguli reperire latera.

Poſitio, & reſolutio. Datum ſit triangulum A B C; cuius baſis A C, ſit 21; ratio verò quadratorum à lateribus ad ſuperficiem trianguli, ſit vt 569, ad 126. Dico perpendicularem dimidiam eſſe 1 R, quæ ſi ducatur in 21, ſit 21 R, & erit 21 R = 126. Itaque ſuperficies erit 126, & perpendicularis dimidium 6, atque adeo ipſa perpendicularis tota erit 12. Modò dico vnum ex ſegmentis baſeos eſſe 1 R, aliud erit 21 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q, cui addito 144 quadrato perpendicularis, ſit 1 Q + 144, cuius ℞ Q, nempe ℞ (1 Q + 144), erit latus vnum; aliud erit ℞ (585 — 42 R + 2 Q), nam quadratum ex 21 — 1 R, eſt 441 — 42 R + 1 Q, cui addito 144, quadrato perpendicularis, ſit 585 — 42 R + 1 Q, cuius latus quadratum eſt vt dicebam ℞ (585 — 42 R + 2 Q); ſumma quadratorum è lateribus erit 729 — 42 R + 2 Q; quæ æquabitur 569, & per Antitheſin fiet ęquatio 729 + 2 Q = 569 + 42 R, & rurſus 160 + 2 Q = 42 R; & rurſus 42 R — 2 Q = 160, inſtituto paraboliſmo. Fit æquatio 21 R — 1 Q = 80; cuius radix quadrata eſt 5. Itaque ſegmentum vnum erit 5; aliud erit ſit; at verò ſi 144, quadratum perpendicularis



21 — 1 R
21 — 1 R

— 21 R + 1 Q
441 — 21 R

441 — 42 R + 1 Q
144

585 — 42 R + 1 Q
℞ (585 — 42 R + 1 Q)
℞ (1 Q + 144)

585 — 42 R + 1 Q
144

729 — 42 R + 1 Q
1 Q

729 — 42 R + 2 Q = 569
42 R

729 + 2 Q = 569 + 42 R
569

160 + 2 Q = 41 R
42 R — 2 Q = 160
21 R — 1 Q = 80

Digitized by Google

dicularis addatur, ad 25; quadratum ex 5; fiet 169; cuius ℞ eſt 13; ſi idem 144, addatur ad 256, fit 400; cuius ℞ eſt 20, itaque latus vnum erit 13; aliud verò 20.

$$\begin{array}{l} 10\ \frac{1}{2} \\ 10\ \frac{1}{2} \\ \hline 110\ \frac{1}{4} \\ 80 \\ \hline 30\ \frac{1}{4} \\ 121 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{4}{11} \Big| \quad \frac{10\ \frac{1}{2}}{5\ \frac{1}{2}}$$

$$2 \qquad 5 \quad 1\ R\ \text{valor}$$

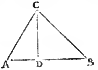
PROBLEMA XX.

Cognitis lateribus alicuius trianguli, latus in eo inſcriptibilis quadrati cognoſcere.

Datum ſit triangulum, cuius latera ſint 13, 20, 21. Oportet reperire &c. Reperiatur perpendicularis, quæ erit 12; & ſegmenta baſis erunt 16, & 5, exceſſus perpendicularis ſupra latus quadrati inſcriptibilis eſto 1 R; ergo latus ipſum erit 12 — 1 R, vt autem eſt 12, perpendicularis ad ſegmentum vnum baſis, ita exceſſus ille, ad ſegmentum lateris quadrati, quod illi ſegmento baſis homologum eſt; (ſi enim in triangulo deſcribatur quadratum, certè perdendicularis ſecabit latera ipſius), ergo illud ſegmentum lateris erit $\frac{16\ R}{12}$, & vt eadem perpendicularis ad aliud ſegmentum baſis; ita idem exceſſus ad ſegmentum alterum lateris quadrati; erit igitur $\frac{5\ R}{12}$, quamobrem $\frac{16\ R}{12}$ ✠ $\frac{5\ R}{12}$ ⵉ 12 — 1 R, & per Antitheſin erit $\frac{21\ R}{12}$ ✠ 1 R ⵉ 12, ſublata fractione, fiet 21 R ✠ 12 R ⵉ 144, demum æquatio 33 R ⵉ 144; quapropter 1 R, pretium erit $4\ \frac{12}{33}$, itaq; latus quadrati erit $7\ \frac{21}{33}$, ſiue $7\ \frac{7}{11}$ &c. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA XXI.

Triangulum reperire æquale dato triangulo, eiuſdem ambitus, ſiue perimetri, & eiuſdem altitudinis, ita tamen vt perimetrum ad perimitrum habeat datam rationem.



Datum ſit triangulum A B C, cuius latus A B, ſiue baſis ſit 21, latus A C, ſit 13, latus autem B C, ſit 20, perpendicularis C D, erit 12, ſegmenta erunt A D, 5, & D B, 16, ſuperficies autem 126, ratio verò data ſit vt 1, ad 4, nempe perimetri trianguli A B C, ad trianguli quæſitum perimetrum. *Poſitio, & reſolutio.*

Sit baſis quæſiti trianguli 21, Ambitus trianguli A B C, eſt 54, fiat, vt 1, ad 4, ita 54, ad aliud puta ad 216, igitur perimetrum quæſiti trianguli erit 216, a quo ſubtracta baſe 21, remanebit 195; Dicamus igitur latus

latus vnum eſſe 1 R, latus alterum erit 195 — 1 R, dimidium ipſius perimetri erit 108, ab hoc autem dimidio ſubtrahatur 21, nempe baſis remanebir 87, ducatur 108 — 1 R, in 87, & prouenit 9396 — 87 R, quo ducto in 1 R — 87, & proueniet 16965 R — 817452 — 87 Q, quo multiplicato per 108, prouenit 1832220 R — 88284816 — 9396 Q, quod æquabitur 15876, quadrato ex 126, nimirum ex ſuperficie trianguli qua propter per Antitheſin fiet æquatio 1832220 R — 9396 Q ⫆ 88300692. Inſtituto paraboliſmo fiet æquatio huiuſmodi 195 R — 1 Q ⫆ 9397 $\frac{[illegible]}{[illegible]}$, ſeu $\frac{60}{87}$, obſeruatis autem Artis præceptis, reperiemus latera eſſe 97 $\frac{1}{2}$ — ℞ 108 $\frac{65}{116}$, & 97 $\frac{1}{2}$ ✠ ℞ 108 $\frac{65}{116}$.

S C H O L I O N.

Hic aliqua explicatur in gratiā ſupradictorum.

Accepimus veluti certiſſimum ſi fuerit triangulum, cuius latera e. g. ſint 10, & 17, baſis autem 21; differentia inter 24, dimidium perimetri, & baſim 21, hæc inquam differentia eſt 3, dimidium perimetri eſt 24, multiplicetur 24, per 3, fit 72, quo ducto in 24, dimidium ſupra dictum fit 1728, multiplicetur hic numerus per 3, differentiam ſupradictam fit 5184, huic addatur 7056, quadratum ex 84, ſuperficie trianguli; & fit 12240, quo diuiſo per 72, ſuperiùs multiplicatione habitum &c. fit quotiens 170, numerus cui æqualis eſt ille, qui fit ex multiplicatione vnius lateris in ſummam laterum minus quadrato lateris prædicti, vt ſi latus 10, ducatur in 27, ſummam laterum, producitur 270, à quo ſi ſubtrahatur 100, quadratum eiuſdem lateris, remanet 170, vel ſi latus eſt 17, ducatur in 27, fit 459, à quo ſi dematur 289, quadratum eiuſdem lateris, remanet 170. Id quod etiam declarari poteſt in hoc alio triangulo, cuius baſis eſt 140, latera verò ſunt 130, 150, perimetrum erit 420, ſuperficies autem (cum perpendicularis ſit 120,) erit 8400, differentia verò qua baſis ſuperatur à dimidio perimetri eſt 70, nam baſis eſt 140, & perimetri dimidium eſt 210, facta ſubtractione illius ab iſto remanet 70; ducatur 210, in 70, fit 14700, quo ducto in 210. Fit 3087000, quo multiplicato per 70, fit 216090000, cui addito 70560000, quadrato ex 8400, ſuperficie trianguli, fit 286650000, ſi verò ducatur 130, latus vnum trianguli in 280, ſummam laterum fit 36400, quadratum ex 130, eſt 16900, quo ſubtracto ex 36400, remanebit 19500, ſi numerus ille 286650000, diuidatur per 14700, fit quotiens 19500, quemadmodum ſi 19500, ducatur in 14700, producitur 286650000, &c. In idem coincidit iſte proceſſus, cum illo, quo ſuperiùs vſi ſumus ad Problema 18. Dico igitur latus vnum eſſe 1 R, aliud erit 195 — 1 R, dimidium perimetri eſt 108, à quo ſubtrahatur 1 R, remanet 108 — 1 R, & ex 108, ſubtrahatur 21, remanet 87, ſubtrahatur 195 — 1 R, remanet 1 R — 87, ducatur 108 — 1 R, in 87, fit 9396 — 87 R; hoc autem productum multiplicetur per 1 R — 87, & producitur 16965 R — 817452 — 87 Q, quod duci debet in 108, vt producatur 1832220 R — 88284816 — 9396 Q, cuius ℞ Q, nempe ℞ (1832220 R — 88284816 — 9396 Q), æquabitur 126, ſuperficiei trianguli, quamobrem eorum quadrata æqualia erunt, nimirum 1832220 R — 88284816 — 9396 Q ⫆ 15876, & per Antitheſin fiet 1832220 R — 9396 Q ⫆ 88300692, vt prius dictum eſt.

L E M M A I.

Quadratum aggregati cuborum æquale eſt quadrato differentiæ eorundem, plus quadruplo cubo rectanguli ſub lateribus.

Lemma vtile ad ſequens problema.

Sint latera 2, & 5, horum cubi ſunt 8, & 125, quorum ſumma 133, cuius quadratum

dratum eſt 17689, at verò differentia eorundem cuborum eſt 117, cuius quadratum eſt 13689, ſed differentia inter 17689, & 13689, eſt 4000, nempe quadruplus cubus, à rectangulo ſub lateribus.

Sint latera A, & B, quadratum ex A C ✠ B C, eſt A C C ✠ 2 A C, in B C ✠ B C C, quadratum ex A C — B C, eſt A C C — 2 A C, in B C ✠ B C C, ergo differeuria quadratorum ex A C ✠ B C, & ex A C — B C, erit A C, in B C, quater quod oportebat oſtendere &c. Vel adhibitis minuſculis.

Sint latera a, & b, quadratum ex $a^1 \dagger b^1$, eſt $a^2 \dagger 2\, a^1 b^1 \dagger b^2$, quadratum ex &c.

LEMMA II.

Cubus aggregati laterum minus triplo ſolido ſub aggregato laterum in rectangulum à ſub lateribus eſt æqualis aggregato cuborum à lateribus.

Hoc Lemma eadem facilitate, ac ſuperiùs declarabitur, & demonſtrabitur. *Lemma vtile ad ſequens Problema.*

Sint latera 2, & 5, horum aggregatum eſt 7, cuius cubus eſt 343, à quo ſi dematur 210, nimirum triplum ſolidi ſub aggregato laterum in rectangulum ſub lateribus remanebit 133, nempe aggragatum cuborum à lateribus.

Sint latera A, & B, cubus ab A ✠ B, eſt A C ✠ 3 A Q, in B ✠ 3 A, in B Q ✠ B C, eſt verò ſolidum ſub rectangulo 3 A, in B, & A ✠ B; idem quod 3 A Q, in B ✠ 3 A, in B Q, quamobrem &c. Vel adhibitis minuſculis.

Sin latera a, & b, cubus abs $a \dagger b$, eſt $a^3 \dagger 3\, a^2 b \dagger 3\, a\, b^2 \dagger b^3$, eſt vera &c.

PROBLEMA XXII.

EST notum rectangulum ſub lateribus, & aggregatum cuborum, quæruntur latera.

Notum ſit rectangulum, ſub lateribus 10, aggregatum autem cuborum à lateribus ſit 133; oporteat reperire latera; ſumma laterum eſto 1 R, per ſecundum Lemma, erit 1 C — 30 R ⊐ 133; at verò quadratum ex 133, eſt 17689, triplum rectangulum erat 30; rectangulum eſt 10; cuius cubus eſt 1000, quadruplus cubus eſt 4000; horum autem differentia eſt 13689, & per primum Lemma 13689; erit quadratum differentiæ cuborum à lateribus; at verò ℞ Q; numeri 13689, eſt 117; ob id 117; æquabitur differentiæ cuborum, quoniam autem 133, cum 117, faciunt 250, huius dimidium eſt 125; proinde 125, æquabitur cubo lateris maioris, ob id latus maius erit 5, & rurſus quia 133, differt à 117, per 16, cuius dimidium eſt 8, erit 8, cubus lateris minoris, quo fit vt latus minus ſit 2, & ſatisfaciunt Problemati. *Poſitio, & reſolutio.*

SCHOLION.

Accepimus autem ſuperiùs, quod euidentiſſimum eſt nempe ſi 133, addatur ad 117, ſit 250; cuius dimidium eſt 125, cuius latus cubicum 5, erit latus maius. Nec immeritò, ſint namq; duo numeri, & ad eorum aggregatum addatur eorundem differentia; aggregati verò ſumatur dimidium, illud erit æquale numero maiori. Quamobrem ſi ſint duo numeri cubi 64, & 1728, horum aggregatum eſt 1792; eorundem differentia eſt 1664, quæ illi addita ſit 3456, cuius dimidium eſt 1728, numerus maior cubus è duobus. Et ſi differentia numerorum ſubtrahatur ab eorundem aggregato, reſiduum verò biſariam diuidatur, *Quædam hic obſeruatur in gratiã ſupradictorum.*

habetur

Digitized by Google

habetur numerus minor, quamobrem in ſuperiori exemplo numeri cubi ſunt 1728, & 64, horum aggregatum eſt 1792, à quo ſi auferatur 1664, differentia cuborum remanet 128, cuius dimidium 64, eſt numerus cubus minor. Hæc autem de quibuſcunque verificantur.

Hoc autem ex eo deducitur, quia ſi ſit recta quadam linea, vel aliquis numerus, in duas partes diuiſus inæquales, tota linea, ſeu totus numerus, plus differentia partium, duplus eſt maioris partis. Et ſi differentia partium ſubtrahatur ab eorundem aggregato, reſiduum eſt duplum partis minoris.

LEMMA.

CVbus differentia laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, eſt æqualis differentia cuborum à lateribus.

Lemma vtile ad ſequens Problema.

Sint latera, vt ſupra, nempe 12, & 8, differentia ipſorum eſt 4, huius cubus eſt 64, cui addito triplo ſolido ſub eadem differentia in rectangulum ſub lateribus, nempe addito 1152; fit 1216, nimirum differentia cuborum à lateribus.

Sint latera A, & B, Cubus ab A — B, eſt A C — 3 A Q, in B + 3 A, in B Q — B C, at ſolidum illud triplum ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus eſt 3 A Q, in B — 3 A, in B Q, proinde horum ſumma erit A C — B C. Vel adhibitis minuſculis.

Sint latera a + b. Cubus abs a — b, eſt $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, at ſolidum &c.

PROBLEMA XXIII.

DAto rectangulo ſub lateribus cuborumque differentia reperire latera.

Poſitio, & reſolutio.

Datum ſit idem rectangulum 10, dataque ſit cuborum differentia 117, oportet reperire latera, differentia laterum eſto 1 R, & per Lemma, antecedens Problemati huic præpoſitum erit 1 C + 30 R, æquale 117, quadratum autem ex 117, eſt 13689, & rectangulum ſub lateribus eſt 10, cuius triplum erat 30, cubus verò ex 10, eſt 1000, huius quadruplum eſt 4000, eſt verò 17689, ſumma ex 13689, & 4000, & eius ℞ Q, eſt 133, & 133, æquatur cubo lateris maioris plus cubo minoris, ſed 133, plus 117, ſiue ſumma ex 133, & 117, eſt 250, cuius dimidium eſt 125, hic erit cubus maior, atque adeo 5, erit latus maius. Sed 133, multatus numero 117, eſt 16, æqualis huius autem dimidium eſt 8, proinde 8, erit cubus minor, atque adeo minus latus erit 2.

PROBLEMA XXIV.

EST triangulum cuius baſis eſt nota, & nota eſt ſumma laterum, eſt etiam nota proportio quadratorum à lateribus, quæruntur latera.

Poſitio, & reſolutio.

Trianguli baſis ſit 5, ſumma laterum nota eſt 7, proportio verò quadratorum à lateribus ſit, vt 9, ad 16. Dico latus vnum eſſe 1 R, aliud erit 7 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q. Iſtius verò eſt 49 — 14 R + 1 Q, vt verò eſt 9, ad 16, ita debet eſſe 1 Q, ad 49 — 14 R + 1 Q, quamobrem fiet æquatio 16 Q = 441 — 126 R +

Digitized by Google

R + 9 Q; & per Antitheſin fiet 16 Q + 126 R = 441 + 9 Q, & rurſus 7 Q + 126 R = 441. Facto verò paraboliſmo fiet æquatio 1 Q + 18 R = 63; huius autem æquationis radix eſt 3.

Sit baſis 10; laterum ſumma ſit 12, proportio quadrati lateris minoris, ad quadratum lateris maioris ſit vt 1, ad 4, latus vnum eſto 1 R, aliud erit 12 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q, iſtius verò 144 — 24 R + 1 Q, vt autam eſt 1, ad 4, ita debet eſſe 1 Q, ad 144 — 24 R + 1 Q, ob id erit æquatio 4 Q = 144 — 24 R + 1 Q, & per Antitheſin reiteratam fiet 3 Q + 24 R = 144, inſtituto paraboliſmo fiet æquatio 1 Q + 8 R = 48, huius autem æquationis radix eſt 4, itaque latus poſitum 1 R, erit 4, poſitum 12 — 1 R, erit 8, &c.

PROBLEMA XXV.

EST triangulum, cuius perimetrum eſt notum; eſt etiam nota proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus ad ſuperficiem trianguli, iniunctum ſit reperire latera.

Perimetrum notum ſit 12; & proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus ad ſuperficiem trianguli ſit vt 7, ad 6, quæruntur latera. Supponamus latus vnum, puta baſim eſſe 5, ex duobus autem reliquis vnum eſto 1 R, aliud erit 7 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q, iſtius autem eſt 49 — 14 R + 1 Q, horum differentia eſt 49 — 14 R; At verò ſuperficies trianguli eſt ℞ (42 R — 36 — 6 Q) vt igitur eſt 7, ad 6, ita debet eſſe 49 — 14 R, ad ℞ (42 R — 36 — 6 Q), quamobrem etiam, vt 49, ad 36, ita debet eſſe 2401 — 1372 R + 196 Q, nimirum quadratum è 49 — 14 R, ad 42 R — 36 — 6 Q, quadratum ſuperficiei. Proinde fiet æquatio 2058 R — 1764 — 294 Q = 86436 — 49392 R + 7056 Q, nempe productum ſub extremis ęquale erit producto ſub medijs, & per Antitheſin fiet æquatio talis 51450 R — 7350 Q = 88200; facto verò paraboliſmo, fiet æquatio huiuſmodi, nempe 7 R — 1 Q = 12. Huius autem æquationis radix eſt 3. *Poſitio, & reſolutio.*

Rurſus ſit notum perimetrum 48, & proportio, vt 189, ad 84, ſupponamus baſim eſſe 27. Latus vnum eſto 1 R, aliud erit 27 — 1 R, quadratum illius eſt 1 Q, iſtius verò 729 — 54 R + 1 Q, horum differentia eſt 729 + 54 R; eſt autem trianguli ſuperficies ℞ (1944 R — 5184 — 72 Q). Proinde eorum quadrata etiam proportionalia erunt.

Vt 34721, ad 7056; Ita 531441 — 78732 R + 2196 Q, ad 1944 R — 5184 — 72 Q, quamobrem productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs, obſeruatis Artis præceptis fiet 1 R, pretium 10.

PROBLEMA XXVI.

EST triangulum cuius perimetrum eſt notum, item nota eſt proportio, quam habet rectangulum ſub cruribus ad ſuperficiem trianguli, quæruntur latera ſuppoſita notitia baſeos.

Datum ſit perimetrum 12, ratio verò data ſit, vt 2, ad 1*, latus vnum eſto 1 R, aliud erit 7 — 1 R, (ſi baſim conſtituamus 5,) rectangulum ſub cruribus eſt 7 R — 1 Q, quod ad ℞ (42 R — 36 — 6 Q), debet eſſe, vt 2, ad 1, proinde horum quadrata proportionalia erunt, nempe 4, 1, 49 Q — 14 C + 1 QQ, & 42 R — 36 — 6 Q, ergo productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs, itaque 49 Q — 14 C + 1 QQ = 168 R — 144 — 24 Q, & per Antitheſin repe- *Poſitio, & reſolutio.* ** Ratio ſcilicet, quam habet rectangulum ſub cruribus ad ſuperficiem trianguli.*

titam fiet æquatio huiuſmodi 168 R + 14 C − 73 Q − 1 QQ = 144. Huius porrò æquationis radix eſt 3.

Analyſeos praxis.

Numero abſoluto.	144
Adde Quadrato-quadratum radicis, puta numeri 3.	81
Ad aggregatum.	225
Adde numerum factum à radicis quadrato in numerum quadratorum.	657
Ab aggregato.	882
Subtrahe numerum factum à cubo radicis in numerum cuborum.	378
A reſiduo.	504
Subtrahe numerum factum à radice in numerum radicum.	504
Nihil remanet,	0 0

Sit notum perimetrum 48, & proportio rectanguli ſub cruribus ad ſuperficiem trianguli vt 85, ad 42.

Exemplum aliud. Sit baſis 21, dicamus autem vnum ex cruribus eſſe 1 R, aliud erit 27 − 1 R, rectangulum ſub his eſt 27 R − 1 Q, & vt 85, ad 42, ita eſſe debebit 27 R − 1 Q, ad ℞ (1944 R − 5184 − 72 Q). Quandoquidem huius trianguli ſuperficies eſt ℞ (1944 R − 5184 − 72 Q). Proinde quadrata erunt proportionalia; itaque vt 7225, ad 1764, ita erit 729 Q − 54 C + 1 QQ, ad 1944 R − 5184 − 72 Q. Ob id productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs; proinde fiet æquatio 1285956 Q − 95256 C + 1764 QQ = 14045400 R − 37454400 − 52200 Q, & per Antitheſin fiet æquatio hoc modo 1806156 Q − 95256 C + 1764 QQ = 14045400 R − 374544, & rurſus fiet 1806156 Q + 2764 QQ = 14045400 R − 37454400 + 95256 C, & rurſus 1806156 Q + 37454400 + 1764 QQ = 14045400 R + 95256 C, rurſus fiet æquatio demum 14045400 R + 95256 C − 1806156 Q − 1764 QQ = 37454400. Inſtituto Paraboliſmo; fiet $\frac{14045400\,R}{1764} + \frac{95256\,C}{1764} - \frac{1806156\,Q}{1764} - 1\,QQ = \frac{37454400}{1764}$, & per Iſomœriam habebitur æquatio inter integra; hoc modo 437050140998400 R + 95256 C − 3186059184 Q − QQ = 205588590552473600; Huius æquationis radix erit 17640; qua diuiſa per 1764, numerum elatioris poteſtatis, fiet quotiens, & radix ſuperioris æquationis ante celebratam Iſomœriam 10, &c.

Iſomœriam recte inſtitutã eſſe declaratur. Ceterùm æquationem illam per Iſomœriam ad hanc reduci patet; cum enim R, diſtet à QQ, per C, ob id cubicè multiplicetur 1764, & producetur 5489031744, hic autem numerus ſi ducatur in 14045400, numerum radicum, producitur 77095646457177600, quo diuiſo per 1764, fit quotiens 43705014998400, & numerus radicum, quoniam autem C, diſtat à QQ, per R, ob id ducatur 95256, in 1764, & producto diuiſo per 1764, remanet idem numerus 95256, deinde quia Q, diſtat à QQ, per quadratum ducatur 1764, in ſe quadraticè, vt fiat 3111696, qui ductus in 1806156, producit 5620308400576, quo diuiſo per 1764, fit quotiens 3186059184, & eſt numerus quadratorum. Deinde quia numerus diſtat à QQ, per QQ, proinde multiplicetur 1764, quadrato-quadraticè, vt producatur 9682651996416, qui numerus ductus in 37454400, numerum abſolutum, facit productum 362657920934563430400, quo diuiſo per 1764, fit quotiens 205588390552473600, pro numero abſoluto.

PRO-

PROBLEMA XXVII.

EST triangulum rectangulum, cuius baſis eſt nota; eſt etiam nota proportio, quam habet exceſſus quadratorum à cruribus ſupra quadrata ſegmentorum baſeos, ad differentia quadratorum ſegmentorum eiuſdem. Iniunctum ſit reperire latera.

Baſis nota ſit 25, proportio verò, vt 288, ad 175. Segmentum vnum baſeos eſto 1 R, aliud erit 25 — 1 R, horum quadrata ſunt 1 Q, & 625 — 50 R + 1 Q, differentia iſtorum quadratorum eſt 625 — 50 R exceſſus autem quadratorum, à cruribus circa rectum, ſupra quadrata ſegmentorum baſeos eſt duplum rectangulum ſub ipſis ſegmentis, proinde 50 R — 2 Q, erit iſte exceſſus, vt autem eſt 175, ad 288, ita 625 — 50 R, ad 50 R — 2 Q, productum igitur ſub extremis æquabitur producto ſub medijs; ob id 180000 — 14400 R, ęqua-bitur 8750 R — 350 Q, per Antithesin fiet 180000 ⫦ 2350 R — 350 Q. *Poſitio, & reſolutio.*

Atque adeo fiet æquatio inſtituto paraboliſmo $\frac{23150\,R}{350}$ — 1 Q ⫦ $\frac{180000}{350}$, per Iſomœriam autem reducetur ad hanc 23150 R — 1 Q ⫦ 6300000, huius autem ęquationis radix eſt 3150; qua diuiſa per 350, numerum altioris poteſtatis fit quotiens 9, & radix ſuperioris æquationis vt patet.

Dimidium numeri radicum eſt 11575, cuius quadratum eſt 133980625, à quo ſi dematur 63000000, remanet 70980625, huius autem latus quadratum eſt 8425, quod ſi dematur ex 11575, remanet 3150, pro 1 R, pretio. Hic autem numerus Problemati ſatisfacit.

```
      11575
      11575
      -----
      57875
     81025
    57875
   11575
  11575
  ---------
  133980625
   63000000
  ---------
   70980625
   .  .  . .
   8  4  2 5

     11575
      8425
     -----
      3150
```

PROBLEMA XXVIII.

EST triangulum rectangulum cuius baſis eſt nota eſt etiam nota proportio, quam habet productum ab exceſſu quadratorum è cruribus ſupra quadrata ſegmentorum baſeos in differentiam quadratorum ſegmentorum ipſius baſeos, ad differentiam quadratorum eorundem ſegmentorum; quæruntur latera.

Baſis data ſit 25, & proportio, vt 2016, ad 7. Segmentum minus eſto 1 R, *Poſitio, & reſolutio.* maius erit 25 — 1 R, rectangulum ſub his eſt 25 R — 1 Q, cuius duplum eſt 50 R — 2 Q, & hic eſt exceſſus, quo crurum quadrata ſuperant quadrata ſegmentorum baſeos; at verò quadratorum differentia eſt 625 — 50 R, vt igitur eſt 2016, ad 7,

ita debet eſſe productum à 625 — 50 R, in 50 R — 2 Q, ad 625 — 50 R, huiuſmodi verò productum eſt 31250 R — 3750 Q + 100 C, fiat igitur, vt 2016, ad 7, ita 31250 R — 3750 Q + 100 C, ad 625 — 50 R, productum ſub extremis, nempe 218750 R — 26250 Q + 700 C, æquabitur 1260000 — 100800 R, & per Antitheſin, fiet 319550 R — 26250 Q + 700 C = 1260000.

Inſtituto autem paraboliſmo fiet æquatio hoc modo $\frac{319550 R}{700} - \frac{26250 Q}{700} + 1 C = \frac{1260000}{700}$. Et per Iſomœriam fiet æquatio huiuſmodi 223685000 R — 26250 Q + 1 C = 617400000000.

Huius autem æquationis radix eſt 6300, qua diuiſa per 700, fit quotiens 9, & radix ſuperioris æquationis.

Per Iſomœriam autem æquationem illam ſuperiorem ad hanc reduci, patet, quoniam R, diſtat à C, per Q, proinde 700, ducatur in ſe quadraticè, vt fiat 490000, quo ducto in 319550, numero radicum, fit 156579500000, quo diuiſo per 700, fit quotiens, & numerus radicum 223685000, deinde numerus quadratorum remanet idem 26250. At quia numerus abſolutus diſtat à C, per C, proinde 700, ducatur in ſe cubicè, vt producatur 343000000, qui ductus in 1260000, numerum abſolutum producit 432180000000000, quo diuiſo per 700, fit quotiens 617400000000, & eſt numerus abſolutus, ſeu comparationis homogeneum.

S C H O L I O N.

NON *erit abs re, numeroſam huius æquationis Analyſin obſeruare, ſit igitur æquatio.*

2 4

1 C + 20 Q + 200 R = 30144

Analyſis. *A numero abſoluto.*	8
Subtrahe cubum primæ figuræ, ſiue lateris primi.	
A reſiduo.	22
Subtrahe quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8
	14
A reſiduo.	4
Subtrahe numerum factum à numero Radicum in primam figuram.	1014
A reſiduo annexis ſequentibus figuris.	96
Subtrahe (inuenta ſecunda figura) numerum factum à triplo primæ figuræ in quadratum ſecundæ figuræ, ſiue lateris ſecundi.	918
A reſiduo.	48
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ in ſecundam figuram.	4384
A reſiduo annexa poſtrema figura,	64
Subtrahe cubum ſecundæ figuræ.	4320
A reſiduo.	32
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ figuræ, & ſecundæ in numerum Quadratorum.	1120
	320
A reſiduo.	
Subtrahe quadratum ſecundæ figuræ in numerum Quadratorum.	800
A reſiduo.	800
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura in numerum Radicum.	0 0

Secunda

Secunda verò figura reperitur animaduerſis ijs, quæ ſupra docuimus; tum loquentes de Poteſtatibus puris, tum de affectis: ſi enim a diuiſoribus fiat triplum quadratum lateris primi, inſuper triplum latus primum; deinde numerus quadratorum ducatur in duplum lateris primi; inſuper inter eoſdem diuiſores collocetur idem numerus, & præterea numerus radicum; omnibus tamen ſuis debitis locis collocatis conſurget diuiſor &c.

	2 4
SI foret æquatio. 1 C ✠ 200 R — 20 Q =	7 1 0 4 (Analyſis.)
Numero abſoluto Adde numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	8 0
Ab aggregato.	1 5 1 0 4
Subtrahe cubum primæ figuræ.	8
A reſiduo.	7 1
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum radicum.	4 0
Ad reſiduum.	3 1
Adde numerum factum (inuenta ſecunda figura) à producto dupla primæ figuræ, per ſecundam in numerum Quadratorum.	3 2
Ad aggregatum.	6 3 0
Adde quadratum ſecundæ figuræ ductum in numerum quadratorum.	3 2 0
Ab aggregato.	6 6 2
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ in quadratum ſecundæ.	9 6
A reſiduo.	5 6 6
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ in ſecundam figuram.	4 8
A reſiduo annexa poſtrema figura.	8 6 4
Subtrahe cubum ſecundæ figuræ.	6 4
A reſiduo.	8 0 0
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura in numerum radicum.	8 0 0
	0 0

Paratur autem diuiſor ad indagandam ſecundam figuram, quemadmodum dictum eſt, obſeruatis tamen obſeruandis, iuxta affectionis notam.

Ceterùm non diſſimili artificio procedendum erit, in conſimilibus æquationibus, quomodocumque varientur notæ ✠, & —.

Si ſit

$$a \dagger e$$
$$a \dagger e$$
$$a e \dagger e^2$$
$$a^2 \dagger a e$$
$$a^2 \dagger 2 a e \dagger e^2$$
$$a \dagger e$$
$$a^2 e \dagger 2 a e^2 \dagger e^3$$
$$a^3 \dagger 2 a^2 e \dagger a e^2$$
$$a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3$$

Æquatio proponitur.

$$1\,C \dagger \underset{d.}{20\,Q} \dagger \underset{b\,pl.}{200\,R} = 30140$$

2 4

$$a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3 \dagger d a^2 \dagger 2 d a e \dagger d e^2 \dagger b\,pl.\,a \dagger b\,pl.\,e = z \text{ ſolido},$$

3 a²
✠ 3 a
✠ b pl.
✠ 2 d a
✠ d

Æquationis explicatio. Si ſit æquatio 1 C † 20 Q † 200 R = 33140. Radicum numerus ſit b pl. & numerus quadratorum ſit d, comparationis homogeneum ſit z ſol. Deprehenſumque ſit radicem eſſe binomiam conſtantem ex duobus ſingularibus lateribus, quorum vnum ſit a, aliud verò e, ex a † e, autem quadratum eſt $a^2 \dagger 2 a e \dagger e^2$, at verò Cubus eſt $a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3$. Huic igitur intelligatur additum id quod fit, ex d, in $a^2 \dagger 2 a e \dagger e^2$, & aggregato intelligatur additum, quod fit ex b pl. in a † e, & proueniet $a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3 \dagger d a^2 \dagger 2 d a e \dagger d e^2 \dagger b\,pl.\,a \dagger b\,pl.\,e$, comparandum cum z ſol. Adinuento primo ſingulari latere eiuſq; cubo ſubtracto ex z ſol. itemq; ſubtracto, quod fit ex ſingulari latere primo in coefficiens planum, & ex quadrato eiuſdem lateris primi in coefficientem longitudinem ad indagandum ſecundum ſingulare latus deprehenditur idem diuiſor $3 a^2 \dagger 3 a \dagger b\,pl. \dagger 2 d a \dagger d$.

Æquatio proponitur.

$$1\,C \dagger \underset{b\,pl.}{200\,R} - \underset{d.}{20\,Q} = 7104$$

2 4

$$a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3 \dagger b\,pl.\,a \dagger b\,pl.\,e - d a^2 - 2 d a e - d e^2 = z \text{ ſolido}.$$

3 a²
✠ 3 a
✠ b pl.
— 2 d a
— d

Æquationis explicatio. Si fuerit æquatio 1 C † 200 R — 20 Q = 7104. Radicum numerus intelligatur b pl. numerus verò quadratorum ſit d, comparationis homogeneum ſit z ſol. procedatur, vt ſupra, & peruenietur, ad æquationem $a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3 \dagger b\,pl.\,a \dagger b\,pl.$

b pl. e — d a^2 — 2 d a e — d e^2 ⚌ z ſol. & habito primo ſingulari latere, addito quadrato producto ex eius quadrato in numerum quadratorum, & ex aggregato ſubducto Cubo lateris ſingularis primi, ad indagandum ſingulare latus ſecundum inſeruiet 3 a^2 † 3 a † b;pl. — 2 d a — d.

PROBLEMA XXIX.

EST triangulum rectangulum, cuius baſis eſt nota, item eſt nota proportio, quam habet rectangulum ſub cruribus ad rectangulum ſub ſegmentis baſeos; quaruntur latera.

Data ſit baſis 25, proportio iam dicta, vt 75, ad 36.

Segmentum minus eſto 1 R, maius erit 25 — 1 R, at verò crus, quod conterminum eſt ipſi ſegmento minori medio loco proportionale eſt inter ipſum ſegmentum minus, & totam baſim ob id illud erit ℞ (25 R), reliquum verò crus erit ℞ (625 — 25 R), rectangulum ſub his eſt ℞ (15625 R — 625 Q), at rectangulum ſub cruribus, debet eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis vt 75; ad 36, proinde vt 75, ad 36, ita erit ℞ (15625 R — 625 Q), ad 25 R — 1 Q, ob id etiam quadrata erunt proportionalia, vt igitur eſt 5625, ad 1296. Ita erit 15625 R — 625 Q, ad 625 Q — 50 C ✠ 1 QQ, atque adeo productum ſub extremis; æquabitur producto ſub medijs, & obſeruatis Artis præceptis reperiemus 1 R, pretium eſſe 9. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA XXX.

EST triangulum, cuius latera ſimul ſumpta conficiunt 18, at verò ſolida qua continentur ſub ſingulis lateribus, & rectangulo ſub lateribus, ſunt 64, & 512, quaruntur latera.

Supponendum eſt latera cubica ipſorum numerorum 512, & 64, puta 8, & 4, eſſe medio loco proportionalia inter latera quæſita in ratione continua. *Poſitio, & reſolutio.*

Dicamus vnum ex lateribus eſſe 1 R, eius cubus eſt 1 C, vt autem eſt 1 C, ad 512, ita 512, ad 64, proinde 64 C, æquabuntur 262144, quadrato ex 512, ob id 1 C, æquabitur 4096, atque adeo ſi eruatur radix cubica ex numero 4096, habitur 16, pro 1 R, pretio, & eſt latus vnum, latus alterum non latebit.

SCHOLION.

ORDO doctrina poſtulabat, vt in hac prima parte, ea Problemata ſolueremus, qua facilitora cum ſint, à Tyronibus meliùs percipiuntur; at verò qua ſunt abſtruſiora, quaq; maiorem difficultatem afferunt Analyſta in proprio volumine, fauente Deo nos afferemus. Non igitur nos carpat aliquis, quod nonnulla problemata attulerimus, qua ſine magno labore ſoluuntur, & etiam quadam ab alijs ſoluta; propterea quod ordinem doctrina ſecuti ſumus, à quo nimirum didimus à facilioribus initium deſumendum eſſe. Reliquum eſt, vt gradum faciamus ad ſextum exemplorum genus, in quo nonnulla Problemata exhibemus rebus contracta; hunc enim ordinem ad initium polliciti ſumus: vt nimirum horum Problematum genus in hac tractatione poſtremas partes ageret.

Quia

Digitized by Google

Quia tamen ad hoc genus pertinet Problema ſequens, plenum difficultatibus; propterea ſubijcere illud hoc loco placuit.

Sequens Problema à nemine reſolutum.

Cæterum idem Problema vnà cum alijs quibuſdam ad eruditiſſimos Viros tranſmiſimus, præſertim verò ad Iſmaelem Bullialdum nedum in Aſtronomicis, ſed etiam in alijs Matheſeos partibus apprimè verſatum, totoque terrarum orbe celeberrimum. Is a me rogatus vt Arithmeticè, ſimulque Geometricè illud reſolueret numeris prætermiſſis Geometricam reſolutionem aggreſſus in vno quidem caſu feliciter ſe geſſit, atque opus induſtrioſè perfecit. Huiuſmodi autem reſolutionem nos in tertia huius operis parte pluribus explicabimus noſtram reſolutionem è Geometrico fonte deductam afferentes; interim verò quo artificio vſi huiuſmodi Problema numeris, atque adeo Arithmeticè tractauerimus, breuiter hic aperiemus.

PROBLEMA XXXI.

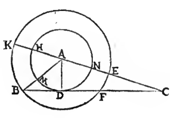
Datis baſe, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex altero latere, & perpendiculo, reperire triangulum.

Poſitio, & reſolutio.

In triangulo A B C, data ſit baſis B C 63, itidem data ſit perpendicularis A D, 20, atque demum data ſit proportio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari A D, ad aggregatum ex alio latere A C, & ex eadem perpendicularis A D, vt 5, ad 8, quæruntur latera.

Centro A, interuallo A D, deſcribatur circulus, deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus deſcribatur, & quærantur latera A B, A C.

Protrahatur C A, vſque ad K. Latus A B, eſto 1 R, K N, erit 1 R † 20, vt igitur 5, ad 8, ita debet eſſe 1 R † 20, nempe K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C, vt igitur 5, ad 8, ita 1 R † 20, ad $\frac{8 R \dagger 160}{5}$, ſingula autem aſſequemur; propterea quod cum, vt iam ſupra dictum fuit.



Datum ſit triangulum A B C, cuius baſis B C 63, ſit data; ſit itidem data perpendicularis A D 20, ſit demum data proportio &c. Suppoſuimus autem A B, eſſe 1 R, fecimus verò, vt 5, ad 8, ſecundum datam rationem, ita K N, 1 R † 20, ad $\frac{8 R \dagger 160}{5}$, pro H C, proinde ſi ex H C, puta $\frac{8 R \dagger 160}{5}$, auferamus H E, nimirum 1 R † 20, remanebit $\frac{8 R \dagger 160}{5}$ — 1 R — 20, pro E C, ſi verò ab A E, puta 1 R, auferamus A N, nempe 20, remanebit 1 R — 20, pro N E, atque adeo H K, erit 1 R — 20, quamobrem ſi ipſi H C, nempe $\frac{8 R \dagger 160}{5}$, addamus 1 R — 20, fiet ſumma $\frac{13 R \dagger 60}{5}$, pro K C.

Vt igitur 63, ad $\frac{13 R \dagger 60}{5}$, ita $\frac{8 R \dagger 160}{5}$ — 1 R — 20, ſeu $\frac{3 R \dagger 60}{5}$, ad $\frac{39 Q \dagger 960 R \dagger 3600}{1575}$.

Si igitur F C $\frac{39 Q \dagger 960 R \dagger 3600}{1575}$, ſubtrahatur ex 63, & remanebit pro B F $\frac{95625 - 39 Q - 960 R}{1575}$, huius dimidium eſt $\frac{95625 - 39 Q - 960 R}{3150}$, pro B D, huius autem quadratum eſt. $\frac{1521 QQ \dagger 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R \dagger 9144140625}{9922500}$.

Huic addatur 400, quadratum ſilicet perpendicularis A D, multiplicetur itaque 400, per 9922500, fiet productum 3969000000, addendum numero 9144140625, fiet igitur numerator fractionis 1521 QQ † 74880 C — 6537150 Q — 183600000 R † 13113140625; ac proinde erit fractio. $\frac{1521 QQ \dagger 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R \dagger 13113140625}{9922500} = 1 Q$. Tollatur fractio per multiplicationem in crucem, & fiet æquatio huiuſmodi 1521 QQ † 74880 C — 6537150 Q — 183600000

R †

Digitized by Google

R † 13113140625 ⊐ 9922500 Q, & per Antitheſin 1521 QQ † 74880 C — 183600000 R † 13113140625 ⊐ 16459650 Q, & rurſus per Antitheſin 16459650 Q † 183600000 R — 74880 C — 521 QQ ⊐ 13113140625, omnibus diuiſis per 1521, fiet æquatio huiuſmodi $\frac{16459650}{1521}$ Q † $\frac{183600000}{1521}$ R — $\frac{74880}{1521}$ C — 1 QQ ⊐ $\frac{13113140625}{1521}$; quæ per Iſomœriam reuocabitur ad hanc 25035127650 Q † 424747767600000 R — 74880 C — 1 QQ ⊐ 461417817613343906 25. Huius æquationis radix eſt 38025, vt patebit, qua diuiſa per 1521, prodibit 25, radix prioris illius æquationis. Æquationem illam per numeros fractos rectè ſe habere conſtat. Quandoquidem multiplicato numero quadratorum per 625, quadratum ex 25, producetur numerus 10287281250, quo diuiſo per 1521, proſilit in quotiente 6763498 $\frac{792}{1521}$, deinde ducto 183600000, in 25, radicis pretium, fit 4590000000, quo diuiſo per 1521, fit quotiens 3017751 $\frac{729}{1521}$, & eſt radicum pretium, quo addito, ad pretium quadratorum ſuperius habitum 6763498 $\frac{792}{1521}$, fit ſumma 9781250, ab hac ſumma ſubducatur 390625, numerus quadrato-quadratorum, fiet reſiduum 9390625, ab hoc tandem reſiduo ſubducatur pretium cuborum, quod quidem fit ex multiplicatione numeri 15625, cubi ex 25, in numerum cuborum 74880, & productum 1170000000, diuidatur per 1521, orietur pretium cuborum 769230 $\frac{1170}{1521}$, & remanebit 8621394 $\frac{351}{1521}$, quantum planè fit diuidendo numerum abſolutum 13113140625, per 1521.

Inſtituta reſolutio perficitur.

Æquationem hanc per Iſomœriam reuocari ad illam ſuperius allatam patet, ſi quidem pretium quadratorum eſt 36198306716089781250, pretium autem radicum, eſt 16151033862990000000, horum ſumma eſt 52349340579079781250, a qua ſi ſubtrahatur quadrato-quadratum radicis (eſt enim radix huius æquationis 38025, numerus habitus per multiplicationem 25, in 1521) nempe 2090628617375390625, & remanebit 50258711961704390625. Numerus abſolutus inſtius æquationis, ſiue comparationis homogeneum. Radix autem hunc in modum extrahetur.

Explicatur Iſomæriæ artificium.

Propoſita æquatio ſit huiuſmodi 25035127650 Q † 424747767600000 R — 74880 C — 1 QQ ⊐ 461417817613343906 25.

Proponitur explicanda æquatio.

Cum autem deprehenſum fuerit radicem vniuerſam pluribus ſingularibus lateribus, puta quinq; conſtare; ſitq; eadem lex obſeruanda non ſecus ac ſi radix binomia foret: quandoquidem priora quotqunq; ſingularia latera ſimul comparatione ſubſequentis, vnius munere funguntur. Proinde fingendum eſt eam eſſe binomiam, nempe a † e, coefficiens autem ſub quadrato ſit b pl. coefficiens ſub latere ſit d ſolidum; coefficiens ſub cubo ſit f. Comparationis homogeneum ſit z pl.pl.

Quadratum ex a † e, eſt a^2 † 2 a e † e^2, quo ducto in b pl. fit b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2. Radix a † e, ducatur in d ſol. & fiet d ſol. a † d ſol. e horum aggregatum eſt b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d ſol. a † d ſol. e, ex hoc ſubtrahatur productum, quod fit ex a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 † e^3, cubo nimirum ipſius a † e, in f, longitudinem.

Analyſis ſpecioſa ad æquationem propoſitam numeris explicandam.

Illud autem eſt f a^3 † 3 f a^2 e † 3 f a e^2 † f e^3, factaque ſubtractione remanebit b pl. a^2 † ✱ b pl. e^2 † d ſol. a † d ſol. e — f a^3 — 3 f a^2 e — 3 f a e^2 — f e^3, ex ✱ 2 b pl. a e. quo etiam ſubtrahere oportet quadrato quadratum eiuſdem radicis, & remabebit b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d ſol. a † d ſol. e — f a^3 — 3 f a^2 e — 3 f a e^2 — f e^3 — a^4 — 4 a^3 e — 6 a^2 e^2 — 4 a e^3 — e^4. Et hoc æquabitur z pl.pl. Comparationis homogeneo addatur a^4, & f a^3, ob notam defectus, & prouenit b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d ſol. a † d ſol. e — 3 f a^2 e — 3 f a e^2 — f e^3 — 4 a^3 e — 6 a^2 e^2 — 4 a e^3 — e^4 ⊐ z pl.pl. † a^4 † f a^3.

Hinc autem ſubtrahantur b pl. a^2, & d ſol. a, vt remaneant æquatio 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d ſol. e — 3 f a^2 e — 3 f a e^2 — f e^3 — 4 a^3 e — 6 a^2 a^2 — 4 a e^3 — e^4 ⊐ z pl.pl. † a^4 † f a^3 — b pl. a^2 — d ſol. a.

Hoc autem eſt illud reſiduum diuiſiſſe per diuiſores illos &c.

Diuiſores autem ſigillatim accepti ſunt 2 b pl. a ; b pl. ; d. ſol. ; 3 f a^2 ; 3 f a ; f ; 4 a^3 ; 6 a^2 ; & 4 a.

Diuiſores ad ſecundum ſingulare latus indagandum.

Quoniam verò quæſita radix pluribus, quàm duobus ſingularibus lateribus conſtat; propterea in eligendis diuiſoribus iiſdemque proprijs ſedibus collocandis oportet cautum eſſe Analyſtam; qui in memoriam ſi reuocauerit quæ iam ſuo loco explicuimus, nempe adhibendas eſſe cifras, eaſque apponendas, vt ratio dictat; cer-

tè reſolutionem hunc in modum ſine errore perficiet.

Diuiſione igitur inſtituta; fiet quotiens pro ſecundo ſingulari latere.

At verò inueſtigaturi tertium, vtemur duobus iam elicitis tanquam vno, & iuxta legem pręſcriptam operabimur. Iam enim omnis eſt operatio perficienda ea ratione, vt duo priora, ſingularia, quæ eliciuntur latera vnius munere fungantur, deinde procedendum omnino, quemadmodum fit in ſingulari latere primo tractando, duo enim, vel tria, vel plura ſint, nihil refert, eadem ſiquidem præcepta de ijs intelligenda ſunt, non ſecus ac vnicum ſingulare latus foret &c.

Huius autem æquationis 25035127650 Q † 42474776760000 R — 74880 C — 1 QQ = 4614178176133439062 5.

Secundus terminus tollitur diuidendo 74880, numerum cuborum per 4, exponentem maioris characteris; fit enim quotiens 18720.

Itaque cum in æquatione, tam primus, quam ſecundus terminus eodem ſigno — afficiatur; propterea vera radix augenda eſt, & quidem incremento quartæ partis ſuperius inuentæ.

Supponamus igitur a — 18720, æquari veteri, veręque radici; huius nouæ radicis poteſtates ſic ſe habent.

$$a - 18720$$
$$a - 18720$$

$$00000$$
$$37440$$
$$131040$$
$$149760$$
$$18720$$

$$- 18720\,a + 350438400$$
$$a^2 - 18720\,a$$

$$a^2 - 37440\,a + 350438400$$
$$a - 18720$$

$$- 18720\,a^2 + 700876800\,a - 6560206848000$$
$$a^3 - 37440\,a^2 + 350438400\,a$$

$$a^3 - 56160\,a^2 + 1051315200\,a - 6560206848000$$
$$a - 18720$$

$$- 18720\,a^3 + 1051315200\,a^2 - 19680620544000\,a + 122807072194560000$$
$$a^4 - 56160\,a^3 + 1051315200\,a^2 - 6560206848000\,a$$

$$a^4 - 74880\,a^3 + 2102630400\,a^2 - 26240827392000\,a + 122807072194560000$$

Huius

$-a^4 \dagger 74880 a^3 - 2102630400 a^2 \dagger 26240827392000 a - 122807072194560000$
$-74880 a^3 \dagger 4205260800 a^2 - 78722482176000 a \dagger 491228288778240000$
$\dagger 25035127650 a^2 - 93731517921600 0 a \dagger 8763270077461760000$
$\dagger 424747767600000 a - 7951278209472000000$
-46141781761334390625

$-a^4 \dagger 27137758050 a^2 - 565049066400000 a - 44951368676760950625$

$27137758050 a^2 - 565049066400000 a - 44951368676760950625 - a^4 = 0.$

Huius æquationis Radix eſt 56745, quare a, erit 56745, cumq; eſſet a — 18720 æqualis 1 R, proinde 56745 — 18720, hoc eſt 38025, erit propoſitæ initio æquationis Radix.

✠ 873834459106537012250	— 46141781761334390625
— 1036836796 024750625	— 7951278209472000000
	— 122807072194560000
✠ 770150779496258950625	— 54215867043000950625
— 3206370927286800000	✠ 926449836624000000000
✠ 44951368676760950625	— 44951368676760950625

```
              56745      Radix
              56745
             -------
             283725
            226680
           397215
          340470
         283725
        ----------
         3219995025     Q
              56745
       -------------
          161004751 25
         128803801 00
        225406651 75
       193205701 50
      161004751 25
      ---------------
      182718617693625   C
                56745
      ---------------
      9135930884 68125
    7308744707 74500
  12790303238 55375
 10963117061 61750
 9135930884 68125
 ---------------------
 1036836796102475 0625   QQ
 ---------------------
 877327007746176 0000
  49122828877824 0000
 ---------------------
  926449836624000000
```

350438400
18720

000000000
700876800
2453068800
2803507200
350438400

6560206848000

37440
18720

00000
74880
262080
299520
37440

700876800

6560206848000
18720

0000000000000
13120413696000
45921447936000
52481654784000
6560206848000

122807072194560000

1051315200
18720

0000000000
2102630400
7359206400
8410521600
1051315200

19680620544000

56160
18720

00000
112320
393120
449280
56160

1051315200

25035127650
350438400

00000000000
00000000000
100140510600
200281021200
75105382950
100140510600
00000000000
125175638250
75105382950

8773270077461760000

```
                    25035127650
                          37440
             ------------------
                    00000000000
                  100140510600
                 100140510600
                175245893550
                75105382950
             ------------------
                937315179216000

     74880        6560206848000
     56160                74880
     -----       --------------
     00000        0000000000000
    44928       52481654784000
   74880       52481654784000
  449280      26240827392000
 374400      45921447936000
 ---------   ------------------
 420526080   4912282887782400000

                     1051315200
                          74880
                 --------------
                     0000000000
                   84105216000
                  84105216000
                 42052608000
                73592064000
                ---------------
                78722482176000

                    27137758050
                     3219995025
                 --------------
                   135688790250
                   54275516100
                 00000000000
               135688790250
             244239822450
            244239822450
           244239822450
           27137758050
          54275516100
         81413274150
      -----------------------
         87383445910653701250

                  5650496640000
                          56745
                 --------------
              2825245332000000
           22601962656000000
          3955343464800000
         3390294398400000
        2825245332000000
        ---------------------
        32063709272868000000
```

Cæterum qua Arte reperiatur Radix æquationis quadrato-quadraticæ, in qua ſecundus terminus deeſt, iam ſupra nos docuimus; cùm de explicandis æquationibus multipliciter affectis loqueremur. *Ars explicandi æquationes quadrato-quadraticas.*

SEXTVM EXEMPLORVM GENVS.

Ad hoc genus ea reuocamus Problemata iuxta ordinem præſcriptum, quæ ſunt rebus accommodata.

PROBLEMA I.

DVOS mercatores ſocietatem inierunt, hac tamen cautione, vt quiſque lucretur iuxta poſitam à ſe pecuniæ quantitatem. Primus autem poſuit neſcio quid, & permanſit in ſupradicta ſocietate, per ſpatium 12, menſium; Secundus verò poſuit aureos 30, & permanſit in ſocietate per ſpatium 17, menſium; reperierunt denique lucrum totum eſſe 18 $\frac{1}{4}$, aureos; primus verò pro lucro, & pecunia poſita habuit 26, aureos, quæritur quantum poſuerit primus.

Poſitio, & reſolutio. Dico primum poſuiſſe 1 R, lucrum igitur primi erit 26 — 1 R, quandoquidem 26, lucrum eſt, & pecunia poſita à primo, eſt itaque 26 — 1 R. lucrum primi in menſibus 12; modo dicendum, ſi 1 R, dat 26 — 1 R, lucri menſibus 12, quantum nam dabit 30; pecunia poſita à ſecundo, & reperiemus $\frac{780 - 30\,R}{1\,R}$, ſpatio quidem eodem, ſcilicet menſium 12; At verò ſi tantum dant menſes 12, quantum dabunt menſes 17; reperiemus daturos $\frac{13260 - 510\,R}{12\,R}$, pro lucro ſecundi, horum lucrorum ſumma eſt $26 - 1\,R + \frac{13260 - 510\,R}{12\,R} = 18\,\frac{1}{4}$, & ordinata æquatione, erit æquatio huiuſmodi $12\,Q + 423\,R = 13260$. Ac deniq; $1\,Q + 35\,\frac{1}{4}\,R = 1105$, huius autem æquationis radix eſt 20.

Itaque primus poſuit 20, aureos, Secundus 30, lucrum primi erit 6, ſecundi verò 12 $\frac{1}{4}$, quæ quidem lucra ſimul ſumpta faciunt 18 $\frac{1}{4}$, vt opus eſt.

SCHOLION.

Hic aliqua ſunt obſeruanda. *HOC Problema anno 1653. Florentiæ publicè fuit expoſitum reſoluendum ab Arithmetico doctiſſimo, & quidem proponebatur omnibus Matheſeos profeſſoribus; cum autem Auctor aduerteret per plures menſes à nemine fuiſſe Quæſtioni ſatisfactum; affixit ſchedulam, in qua dicebat, cum à nemine ſuæ quæſtioni factum fuiſſet ſatis atq; adeo nemo eſſet, qui Florentiæ eam ſoluere ſciret, ſe cuicunque methodum explicaturum cupienti nimirum illam addiſcere; cum autem nihil mihi fuiſſet ignotius, demum relatum fuit rem ita ſe habere; & nimirum longo temporis ſpatio Quæſtionem illam publicè in locis ſolitis expoſitam extitiſſe, atque demum ſchedulam ſupra dictam affixam eſſe, rogitus à quondam magno mihi neceſſitudinis vinculo coniuncto, animum appuli ad ipſam quæſtionem enodandam, & ſolutio, quam paucis horis adinueni curaui, vt ad Auctorem perueniret, qui cum cognoſceret in ea nihil deſiderari poſſe, mihi gratias reddidit immortales; ſeque mea ſolutione magnopere gauiſum eſſe demonſtrauit, cum voluerit, vt quotidie ſibi multa ad has diſciplinas ſpectantia, demonſtrarem.*

Digitized by Google

PROBLEMA II.

TRES ſunt Mercatores ſocietatem inceuntes. Primus autem imponit 40, aureos amplius, quàm ſecundus. Secundus verò, ac tertius ſimul impoſuerunt 100, aureos; lucrati ſunt omnes ſimul 80, aureos, ex ipſis verò tertius pro ſuo lucro, ſeu pro lucri parte habuit 20. Quæritur quantum quiſque impoſuerit, & quantum quiſque lucratus fuerit.

Dico primum impoſuiſſe 1 R + 40, ſecundus autem nec eſſe eſt, vt impoſuerit 1 R, hoc enim pacto primus impoſuit 40, aureos amplius, quam ſecundus, & quia ſecundus, ac tertius ſimul impoſuerunt 100, aureos, ob id tertius neceſſe eſt, impoſuerit 100 — 1 R. Sunt igitur ea, quæ fuerunt impoſita 1 R + 40, nimirum à primo at 1 R, à ſecundo, & 100 — 1 R, à tertio Lucrum primi eſto 1 A, lucrum ſecundi ſit 1 B, lucrum tertij, iam notum eſt, nempe 20, fiat autem per regulam auream. *Poſitio, & reſolutio.*

Vt 140 + 1 R, ad 80 ita	1 R + 40	ad	1 A
	1 R		1 B
	100 — 1 R		20

Itaque productum ab extremis æquabitur producto ſub medijs; quamobrem 2800 + 20 R = 8000 — 80 R. Vtrinque additis 80 R, quod nimirum ſigno — afficiantur, & fiet 2800 + 100 R = 8000. Vtrinque ablatis 2800, fiet 100 R = 5200. Diuiſione autem inſtituta, fit quotiens 52, Itaque primus, qui poſuit 1 R + 40, neceſſe eſt, vt poſuerit 92, ſecundus verò 52, tertius 48, ſumma illa 140 + 1 R, erit 192.

140 + 1 R
20
———
2800 + 20 R
———
100 — 1 R
80
———
8000 — 80 R

192	80	92	$38\frac{64}{192}$
		52	$21\frac{128}{192}$
		48	20

Itaque lucrum Primi erit $38\frac{64}{192}$, Secundi $21\frac{128}{192}$. Tertij demum 20; & ſatisfaciunt &c.

PROBLEMA III.

DVO ſunt Peregrini proficiſcentes eadem die à duabus ciuitatibus inter quas 300, milliaria intercipiuntur, alter verſus alterum. Notum eſt autem vnum conficere 30, milliaria quolibet die, alterum verò milliaria 20, quæritur quando ſibi mutuo occurrent, atque conuenient.

Dico

Dico 1 R, dierum ſibi mutuo occurrere, & fiat, vt æquationem indagemus, quamadmodum 1, ad 30, ita 1 R, ad 30 R, & vt ſe habet, 1, ad 20, ita 1 R, ad 20 R, ſumma radicum eſto 50 R, & prior quidem in 1 R, dierum, confecit 30 R, milliarium, ſecundus autem in 1 R, dierum confecit 20 R, milliarium. Ita vt 50 R, milliarium confecerint ambo; ſed debebant conficere milliaria 300, proinde erit æquatio 50 R ⊏⊐ 300. Diuiſione autem inſtituta, fit 1 R, valor 6; Itaq; die ſexto peracto ſibi mutuo occurrent peregrini ſupradicti.

PROBLEMA IV.

EST quidem mercator, qui vendidit 50, libras partim Sacchari, & partim Cinamomi aureis 130, at verò Sacchari libram vendidit tribus denarijs, ſed Cinamomi libram denarijs duobus. Quæritur quot vendiderit libras Sacchari, & quot Cinamomi.

Poſitio, & reſolutio. Dico mercatorem vendidiſſe 1 R librarum Sacchari, ob id neceſſe eſt, vendiderit 50 — 1 R, librarum Cinamomi; inſtituatur autem Regula aurea hunc in modum.

Sacchari lib. 1. den. 3. lib. 1. R 3 R
Cinamomi lib. 1. den. 2. lib. 50 — 1 R 100 — 2 R

Summa erit 100 ✠ 1 R, nimirum ſumma denariorum, quæ æquabitur 130, & per Antitheſin fiet 1 R ⊏⊐ 30, atque adeo fit vnius R, pretium 30.

1.	3.	30.	90.
1.	2.	20.	40.
			130.

PROBLEMA V.

DECEM mercatores cuidam creditori, hoc modo pecuniam debent.

Nouem excluſo primo debent 545. *Deinde*	545 ✠ 1 *R*
Nouem excluſo ſecundo debent 540.	540 ✠ 1 *A*
Nouem excluſo tertio debent 535.	535 ✠ 1 *B*
Nouem excluſo quarto debent 595.	595 ✠ 1 *C*
Nouem excluſo quinto debent 571.	571 ✠ 1 *D*
Nouem excluſo ſexto debent 560.	560 ✠ 1 *E*
Nouem excluſo ſeptimo debent 589.	589 ✠ 1 *F*
Nouem excluſo octauo debent 625.	625 ✠ 1 *G*
Nouem excluſo nono debent 685.	685 ✠ 1 *H*
Nouem excluſo decimo debent 630.	630 ✠ 1 *I*

Quæritur totius debiti ſumma, & ſingulorum.

Poſitio, & reſolutio. Debitum primi dico eſſe 1 R, cum autem nouem ipſorum debeant 545, ergo omnes decem debebunt 545 ✠ 1 R. Quoniam excluditur debitum ſecundi, & eo excluſo reliqui debent 540, propterea tota ſumma erit 540 ✠ 1 A, erit enim A, debitum ſecundi, & ita 535 ✠ 1 B, erit tota ſumma; item 595 ✠ 1 C; item 571 ✠ 1 D; item 560 ✠ 1 E; item 589 ✠ 1 F; item 625 ✠ 1 G, præterea 685 ✠ 1 H, demum 630 ✠ 1 I, omnium radicum ſumma eſt 10 R — 355 ⊏⊐ 1 R ✠ 545, & per Antitheſin fit 9 R ⊏⊐ 900. Fitque 1 R, pretium 100.

545

Digitized by Google

Debita ſingulorum

✠ 1 R	1'	100
5 ✠ 1 R	2'	105
10 ✠ 1 R	3'	150
1 R — 50	4'	50
1 R — 26	5'	74
1 R — 15	6'	85
1 R — 44	7'	56
1 R — 80	8'	20
1 R — 70	9'	30
1 R — 85	10'	15
10 R — 355		

545 ✠ 1 R = 540 ✠ 1 A
540

5 ✠ 1 R = 1 A

545 ✠ 1 R = 535 ✠ 1 B
535

10 ✠ 1 R = 1 B

545 ✠ 1 R = 595 ✠ 1 C
595

1 R — 50 = 1 C

545 ✠ 1 R = 571 ✠ 1 D
571

1 R — 26 = 1 D

545 ✠ 1 R = 560 ✠ 1 E
560

1 R — 15 = 1 E

545 ✠ 1 R = 589 ✠ 1 F
589

1 R — 44 = 1 F

545 ✠ 1 R = 625 ✠ 1 G
625

1 R — 80 = 1 G

545 ✠ 1 E = 615 ✠ 1 H
615

1 R — 70 = 1 H

545 ✠ 1 R = 630 ✠ 1 I
630

1 R — 85 = 1 I

Quoniam autem ſumma omnium nempe totum debitum decies ponitur; habebimus decem æquationes, ſi ſuperiores, cum inferioribus conferamus. Quandoquidem quodlibet totum ſibi ipſi æquale eſt. Vt eſt 545 † 1 R = 540 † 1 A; proinde ablatis vtrinque 540, fiet 5 † 1 R = 1 A. Cùm autem pro debito ſecundi poneremus 1 A, ob id debitum ſecundi erit 5 † 1 R. Item 545 † 1 R = 535 † 1 B, ablatis vtrinque 535, remanet 10 † 1 R = 1 B, cum verò pro debito tertij poneremus 1 B, propterea debitum tertij erit 10 † 1 R.

Item erit 545 † 1 R = 595 † 1 C, ablatis vtrinque 595, fiet reſiduum 1 R — 50 = 1 C, cum autem poneremus 1 C, pro debito quarti, ob id 1 R — 50, erit debitum quarti. Præterea etiam 545 † 1 R, æquabitur 571 † 1 D, vtrinq; ſublatis 571, fiet reſiduum 51 R — 26 = 1 D; quoniam autem debitum quinti ponebamus 1 D; proinde debitum quinti erit 51 R — 26; Inſuper 545 † 1 R, æquabitur 560 † 1 E, ablatis vtrinque 560, remanebit 1 R — 15 = 1 E, cum verò pro debito ſexti poneremus 1 E, ob id debitum ſexti erit 1 R — 15. Amplius 545 † 1 R, æquabitur 589 † 1 F, vtrinq; ſublatus 589, fiet 1 R — 44 = 1 F, cum autem pro debito ſeptimi poneremus 1 F, propterea debitum ſeptimi erit 1 R — 44, & ita de reliquis. Summa autem debitorum ſingulorum erit 10 R — 355, quæ æqualis eſt 545 † 1 R, cum hic etiam numerus toti debito fuerit æqualis, & per Antitheſin fiet 9 R = 900. Diuiſione autem inſtituta, fit 1 R, pretium 100. Itaque tota ſumma eſt 645, ſingulorumque debita quiſque facilè diſtinguet, vt ſuperiùs adnotauimus.

Hunc igitur in modum iam oblato Problemati ſatisfecimus; nec diſsimili artificio alia eiuſdem generis cuique ſoluere licebit.

PROBLEMA VI.

QVIDAM moriens, teſtamentum condidit, & reliquit 9000, *aureos diſtribuendos inter Vxorem, Filium, & tres Filias hac conditione; vt portio Filij, ſit quadrupla portionis Matris, & portio Matris ſit tripla portionis vnius Filiæ; quæritur quanta ſit vniuſcuiuſq; portio.*

Poſitio, & reſolutio. Portio vnius Filiæ eſto 1 R, erit autem portio Matris 3 R, & portio Filij erit 12 R, erunt ergo 18 R, æquales 9000.

Filiæ	1 R	id eſt	500	aur.
Filiæ	1 R		500	
Filiæ	1 R		500	
Matris	3 R		1500	
Filij	12 R		6000	
	18 R		9000	

Diuiſis 9000, per 18, fiet quotiens 1 R, pretium 500, atq; portio vnius Filiæ; ob id portio Matris erit 1500, & Filij erit 6000.

PROBLEMA VII.

PINTAE 30, *Vini Rubri vna cum* 5, *pintis Vini Albi, conſtant aureis* 100, *atque eodem pretio* 15, *Pinta Vini rubri cum* 5, *pintis Vini albi conſtant aureis* 55, *quæritur pretium vnius Pintæ.*

Poſitio, & reſolutio. Pretium vnius pintæ Vini Rubri eſto 1 R, proinde 30, pintæ valebunt 30 R, igitur quinque pintæ Vini Albi valebunt 100 — 30 R, at verò pintæ 15, Vini Rubri, valebunt 15 R, quamobrem quinque pintæ Vini Albi conſtabunt 55 — 15 R, proinde fiet æquatio huiuſmodi 100 — 30 R = 55 — 15 R, & per Antitheſin erit 15 R = 45, atque adeo inſtituto paraboliſmo fit vnius radicis pretium 3, &c.

PROBLEMA VIII.

EST Mercator, qui in quatuor Nundinis eandem aureorum ſummam exponens Lucratus eſt in ſingulis $\frac{1}{10}$, *ſua ſumma, deinde ad alias ſe conferens Nundinas Lucratus eſt* $\frac{1}{7}$, *eiuſdem ſua ſumma priori lucro aucta; deprehendit autem habere aureos* 1600, *quæritur aureorum ſumma.*

Poſitio, & reſolutio. Summa aureorum eſto 1 R, quoniam autem in ſingulis Nundinis lucratus eſt $\frac{1}{10}$ R, ob id poſt quatuor illas Nundinas habebit 1 $\frac{4}{10}$ R, hoc eſt $\frac{14}{10}$ R, cum autem lucratus ſit deinde $\frac{1}{7}$, eiuſdem ſummæ priori lucro auctæ; proinde diuidatur

tur $\frac{16}{10}$, per 7, & fit $\frac{3}{5}$ R, addatur ad $\frac{10}{10}$ R, & fiet $\frac{8}{5}$ R, & erit æquatio $\frac{8}{5}$ R $=$ 1600, tollatur fractio, & fiet æquatio 8 R $=$ 8000, inſtituto paraboliſmo, fiet 1 R, pretium 1000, & hæc eſt aureorum ſumma quæſita.

PROBLEMA IX.

TRES ſunt mercatores, qui ſummam aureorum æqualiter diuidere volebant, interim contentione ſuborta ad manus ventum eſt, tantum autem quiſque rapuit quantum per eum potuit, contentione ſedata ſinguli ſuas pecunias numerarunt, ac demum deprehenderunt, primum acceptis 15, à ſecundo habere numerum æqualem reſiduo ipſius ſecundi, at verò ſecundum acceptis 18, à tertio habere numerum æqualem reſiduo tertij, tertium autem acceptis 22, à primo, habere numerum triplum illius, qui ſupereſt primo, quæritur ſumma.

Dicamus primum habuiſſe 1 R, igitur acceptis 15, à ſecundo habebat 1 R † 15, hic verò numerus æqualis eſt reſiduo ſecundi quamobrem ſecundus antequam daret 15, primo, habebat 1 R † 30, acceptis autem 18, à tertio, habebat 1 R † 48, & hic æqualis eſt reſiduo tertij, proinde tertius antequam daret 18, ſecundo habebat 1 R † 66, ſed tertius acceptis 22, à primo, eſt 1 R † 88, qui quidem numerus triplus eſt illius, qui ſupereſt primo, nimirum 1 R — 22, ob id multiplicetur 1 R — 22, per 3, & fiet æquatio 1 R † 88 $=$ 3 R — 66, obſeruatis Artis præceptis fiet æquatio 2 R $=$ 154, inſtituto paraboliſmo, fit vnius R, pretium 77. Itaq; primus habuit 77, ſecundus habuit 107, tertius deniq; 142, & hi numeri Quæſtioni ſatisfaciunt, vt perſpicuum eſt. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA X.

EST Serici magnum pondus, cuius multa libræ ſunt Serici Anglici, multa alia Mediolanenſis, multa demum Neapolitani, Sericum Anglicum eſt 5000, at verò multitudo librarum Serici Mediolanenſis, eſt dimidium librarum Serici Anglici, & Neapolitani, item multitudo librarum Serici Neapolitani eſt $\frac{1}{5}$, Serici Anglici, & Mediolanenſis, quæritur multitudo librarum Serici Mediolanenſis, & Neapolitani, & quanta ſit tota multitudo.

Supponamus multitudinem Serici Mediolanenſis eſſe 1 R, igitur multitudo librarum Serici Anglici cum multitudine librarum Serici Neapolitani, erit 2 R, tota itaque multitudo erit 3 R, ſed quia multitudo librarum Serici Neapolitani eſt $\frac{1}{5}$, Serici Anglici, & Mediolanenſis, & Sericum Mediolanenſe cum Anglico eſt 1 R † 5000, proinde Sericum Neapolitanum erit $\frac{1}{5}$ R † 1000, modò quia Sericum Anglicum eſt librarum 5000, Mediolanenſe 1 R, & Neapolitanum $\frac{1}{5}$ R † 1000, tota igitur ſumma erit 1 $\frac{1}{5}$ R † 6000, quæ æquabitur 3 R, ſubtracto autem 4 $\frac{1}{5}$ R, vtrinque fiet $\frac{9}{5}$ R $=$ 6000, inſtituto paraboliſmo fit 1 R, pretium 3333 $\frac{1}{3}$. Itaq; Sericum Anglicum erat 5000 Mediolanenſe vero 1333 $\frac{1}{3}$, Neapolitanum deniq; 1666 $\frac{2}{3}$. *Poſitio, & reſolutio.*

PROBLEMA XI.

QVIDAM emit numerum equorum, illud autem conſtat ſi ſcorſum emiſſet $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, *& inſuper 10, haberet equos 400, quæritur equorum numerus.*

Poſitio, & reſolutio. Numerus hic eſto 1 R, cuius $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, faciunt $\frac{13}{12}$ R, additis 10, fit $\frac{13}{12}$, R † 10, & erit æquatio $\frac{13}{12}$ R † 10 ⊏ 400, vtrinque ſublatis 10, remanet æquatio $\frac{13}{12}$ R ⊏ 390, diuiſione inſtituta fit quotiens 360, & eſt numerus quæſitus, nam eius dimidium eſt 180, tertia pars eſt 120, quarta verò pars eſt 90, horum ſumma eſt 390, cui additis 10, fiunt 400.

PROBLEMA XII.

EST quidam, qui ſeruo promiſit duodecim menſibus 20, aureos cum ſex ſeſtarijs frumenti, & quatuor Vini cadis, tranſactis menſibus octo, illi dedit duos aureos cum ſeſtarijs frumenti, & Vini cadis; quæritur pretium Vini, &c. cognita proportione vnius ad alterum, nimirum pretij frumenti; ad pretium Vini vt 3, ad 4.

Poſitio & reſolutio. Dico pretium vtriuſque eſſe 1 R, igitur illi debebatur 1 R † 20, aureis pro menſibus duodecim, modò inſtituatur regula aurea, ſi duodecim menſes poſcunt 1 R † 20, quid poſtulabit vnicus menſis, & reperitur $\frac{1 R † 20}{12}$, deinde dicendum ſi 8, menſes poſcunt 1 R † 2, quid requiret vnicus menſis, & reperietur $\frac{1 R † 2}{8}$, erit igitur æquatio $\frac{1 R † 20}{12}$ ⊏ $\frac{1 R † 2}{8}$, inſtituatur multiplicatio per crucem, & fit æquatio 8 R † 160 ⊏ 12 R † 24, & obſeruatis Artis præceptis, reperietur vnius R, valor 34, & eſt pretium frumenti, & Vini ſimul, vt autem eorum pretia ſeorſum cognoſcamus, cum notum ſit pretium frumenti, ad pretium Vini eſſe, vt 3, ad 4, fiat ob id diuiſio, numeri 34, in duas partes hac ſeruata cautela, & reperiemus partes eſſe 14 $\frac{4}{7}$; 19 $\frac{3}{7}$. Itaque pretium frumenti erit 14 $\frac{4}{7}$, Vini autem 19 $\frac{3}{7}$.

PROBLEMA XIII.

QVIDAM habet duos equos, & vnum mulum, eius pretium eſt 200 aur: hoc additum ad pretium primi equi facit pretium quadruplum pretij ſecundi equi. Idem autem muli pretium additum ſecundo facit pretium æquale pretio primi equi.

Poſitio, & reſolutio. Pretium primi equi eſto 1 R, ergo 1 R † 200, ſunt quadrupla pretij ſecundi equi; quamobrem eius æſtimatio erit $\frac{1}{4}$ R † 50 aur: cui ſi acceſſerit muli pretium 200 aur: erit eius pretium $\frac{1}{4}$ R † 250, quod æquabitur 1 R; nempe pretio primi equi; vtrinque ſublata $\frac{1}{4}$ R, fiet $\frac{3}{4}$ R ⊏ 250, diuiſione inſtituta fit 1 R, pretium 333 $\frac{1}{3}$, & eſt pretium primi equi; Secundus equus, cuius pretium erat $\frac{1}{4}$ R † 50, erit 133 $\frac{1}{3}$, & ſatisfaciunt Quæſtioni.

Quo

Quo pacto cognoſcantur Problemata Impoſſibilia.

CAPVT XXXII.

PROBLEMA quidem impoſſibile cenſetur, cum in eius Analyſi incidimus in æquationem impoſſibilem.

Quid ſit Problema impoſſibile, traditur.

At verò æquatio impoſſibilis illa eſt, in qua totum proponitur æquari parti, & magnitudo maior ponitur minori æqualis, & contra.

Exemplum primum. *Reperire numerum, qui additus dato numero, faciat numerum, cuius quadratum æquale ſit quadrato dato numeri.*

Exemplis propoſitum explicatur.

Datus ſit numerus 12, & oporteat reperire numerum qui additus ad 12, faciat numerum cuius quadratum æquale ſit quadrato ipſius 12.

Exemplum primum.

Numerus addendus eſto 1 R; ergo aggregatum erit 12 † 1 R, cuius quadratum 144 † 24 R † 1 Q, debet eſſe æquale 144; hoc eſt Problema impoſſibile; ſi quidem plus eſt ex vna parte æquationis, quam ex altera.

Exemplum ſecundum. *Numerum reperire, qui ductus in 6, tantum faciat, quantum facit idem numerus ductus in 24.*

Exemplum ſecundum.

Quæſitus numerus eſto 1 R, qui ductus in 6, facit 6 R; idem verò ductus in 24, facit 24 R, ergo erit æquatio 6 R = 24 R; quæ quidem æquatio eſt impoſsibilis; totum enim foret æquale parti.

Exemptum tertium. *Numerum inuenire, cuius quadratum ductum in 3, & producto additis 15, fiat tantum quantum fit ſi eiuſdem numeri quadratum ducatur in 2, productoque addantur 10.*

Exemplum tertium.

Numerus quæſitus eſto 1 R, eius quadratum eſt 1 Q, quod ſi ducatur in 3, fiunt 3 Q, quibus ſi addantur 15, fiunt 3 Q † 15, his autem deberet æquari 10 † 2 Q, quod eſt impoſſibile.

Exemplum quartum. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt ex ductu vnius in alterum gignatur quadratum totius.*

Exemplum quartum.

Datus ſit numerus 12, diuidendus &c. Pars vna eſto 1 R, alia erit 12 — 1 R, productum à partibus eſt 12 R — 1 Q, quod deberet æquari 144, quadrato totius. Hoc Problema eſt impoſſibile ob impoſſibilitatem æquationis, eſt autem æquatio impoſſibilis; etenim quadratum dimidij numeri radicum eſt 36, à quo nequit ſubduci 144, numerus abſolutus; Accedit etiam quod 144, quadratum totius, maius eſt, quam rectangulum ſub partibus, vt patet ex 2. Elementorum prop. 4.

Cautè proponenda ſunt autem huiuſmodi Problemata, ne quis credat impoſſibilitatem eorum ignorari à proponente, vt hic elapſis annis contingit, nam cum à peritiſſimo Viro huiuſmodi Problema erudiendi gratia data opera diſcipulo proponeretur, quidam impudens Sicophanta ab eo impoſſibilitatem ignorari, conſtanter affirmabat.

Cautè ſunt hæc proponenda Problemata.

Præſtat autem ſe plurimùm in his exercere, cum vſu, ac exercitatione, non minus, quàm præceptis comparentur. De his proinde haud rarò conſueui diſcipulos admonere, ne aliquando ſe ſe irridendos fraudis, qua Problema traditur ignoratione præbeant; de quibus à me admonitus Michael Scipio Renaldinius, ex fratre nepos, oblati Problematis Analyſin aggreſſus, vtpote ſatis perſpicaci præditus ingenio; ſtatim impoſsibilitatem aſecutus, condiſcipulos irridebat, iniurijs imò Problematis auctorem laceſſebat, hinc altercatione quadam ſuborta, quam commendabilem æmulationem rectè diceres, impenſius operam ſtudijs nauando mirum in modum proficiebant in Arte. Tantum poteſt æmulationis calcar ad capeſſendam virtutem.

Præſtat in his ſe plurimum exercere.

Digitized by Google

Qua Arte cognoſcantur Problemata Vana, & Nugatoria.

CAPVT XXXIII.

Quid ſit Problema vanum & nugatoriũ. Exemplis propoſitum explicatur.

PROBLEMA vanum, & nugatorium eſt, in cuius reſolutione Analyſta incidit in æquationem inutilem. Inutilis ea porrò cenſetur æquatio, in qua duo numeri ęquales, & eiuſdem denominationis comparantur. Dum itaque contingit æquatio inter duos numeros æquales, & eiuſdem denominationis æquatio illa cenſetur vana, & nugatoria; Ita quidem nugatoria foret æquatio iſta 6 R = 6 R, ex huiuſmodi enim æquationibus nulla noua cognitio erui poteſt.

Exemplum primum.

Exemplum primum. *Numerum diuidere in duas partes; vt illi qui fiunt ſub toto, & qualibet parte ſimul æquales ſint quadrato totius.*

Numerus datus ſit 12, diuidendus &c. Pars vna eſto 1 R, alia erit 12 — 1 R, numeri facti ſub toto, & qualibet ex partibus erunt 12 R, & 144 — 12 R, horum ſumma eſt 144, numerus autem hic omninò æqualis eſſe debet 144, quadrato totius.

Exemplum ſecundum.

Exemplum ſecundum. *Numerum reperire, qui ductus in ſe, & in 4, inde numerus productus, multiplicatus per 5, faciat numerum æqualem illi, qui fit ex multiplicatione quæſiti in ſe ipſum, & ex producto in 20.*

Quæſitus numerus eſto 1 R, qui ductus in ſe, & in 4, facit 4 Q, hic autem ductus in 5 facit 20 Q. Si verò 1 R, ducatur in ſe, fit 1 Q, quod ſi multiplicetur per 20, fiunt 20 Q, debet igitur eſſe æquatio inter 20 Q, & 20 Q, quæ quidem inutilis eſt quandoquidem inde nulla eruitur noua cognitio.

Exemplum tertium.

Exemplum tertium. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt quadruplus numerus factus ſub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æqualis ſit qudrato totius.*

Datus ſit numerus 12, diuidendus &c. pars vna ſit 1 R, alia erit 12 — 1 R, qui fit autem à partibus eſt 12 R — 1 Q, huius quadruplum eſt 48 R — 4 Q, ſi huic autem addatur 144 — 48 R † 4 Q, quadratum differentiæ partium fit 144, hoc autem debet æquari 144, quadrato totius.

Exemplum quartum.

Exemplum quartum. *Datum numerum diuidere in duas partes; vt ille qui fit à partibus vna cum quadrato à differentia partis maioris, & dimidij, æqualis ſit quadrato ipſius dimidij.*

Datus ſit numerus 12, diuidendus &c. pars vna ſit 1 R, alia erit 12 — 1 R, qui fit numerus ab his partibus eſt 12 R — 1 Q, cui addito quadrato ex differentia 6 — 1 R, quod eſt 36 — 12 R † 1 Q, fit 36, & hoc æquale eſſe debet quadrato ex dimidio; nempe ex 6, quod eſt 36. Inutilis autem hęc eſt æquatio, vt conſtat, ac proinde Problema vanum, & nugatorium eſt.

Hæc nobis dicenda videbantur, in gratiam Veterum Analyſtarum, quorum Artem, ſi minus benè explicuimus indulce ingenij tenuitati, ſin autem, à Deo optimo Maximo, à quo omne bonum recognoſce. Interim expecta ſecundam partem, nunc extantem ſub prælo; in qua dignitatem Artis reſolutiuæ longe magis conſpicies cum ad Geometriam apprimè conducat, vt vix Problema excogitari queat, quod huius Artis præſidio enodari non poſſit. Huius Diſciplinæ ſubtilitatem mirabatur Benedictus Maghettus, alioquin in Arte veteri ſummopere verſatus, & à quo prima illius elementa didicimus is; nihil; magis dicebat, operępretium eſſe cupientibus Matheſin addiſcere, quàm nouam hanc Analyticen colere, & ſi ipſius vtilitatem, atque ſuauitatem à longe vidiſſet, & vix ſenio confectus prima, rudimenta deguſtaſſet.

LAVS DEO.

Digitized by Google

D. Auguſtinus Suetonius videat, & referat an in hoc Opere ſit aliq; quod Fidei Catholicæ, & bonis moribus ſit aduerſum 2. Maij 1663.

Vinc. de Bardis Vic. Gener. Florentiæ.

Vidi opus hoc inſigne Excellentiſs. D. Caroli Renaldinij &c. nihilq; in eo reperi à Catholica Fide alienum aut bonis moribus diſſonum ideoq; typis digniſſimum exiſtimo.

Auguſtinus Suetonius.

Imprimatur Vinc. de Bardis Vic. Gener.

Die 10. Maij 1663.

Excellentiſſimus Dominus Aduocatus Auguſtinus Coltellini huius Sancti Officij Florentiæ Conſultor videat, & referat &c.

Fr. Dominicus Antonius Ranieri de Aquapendente Conſ. S. Officij Flor. de mand.

Reuerediſs. Pater D. Maioris Arithmeticæ grande opus perlegi, in quo V. Cl. tali arte numerorum pathemata, ænigmataq; reſoluit, vt qui eius firma regula vtatur Flexili Lesbia neglecta, nihil præpoſteri agat; & dum per ingenioſam Analyſim ducto glomeris filo, non Creticum, ſed Coſſicum ingreditur Labyrinthum, inextricabiles error. ambages non exhorreſcat; verum ſaluis moribus Religioneque Catholica, inoffenſo pede, prima hæc vniuerſi operis pars ad ſcientiam ſacratioris Arithmeticæ * ita teſtor, meaque manu ſubſcribo. *Puenia

Auguſtinus Coltellini librorum Cenſor &c.

Stante prædicta atteſtatatione Imprimatur Florentiæ hac die 13. Maij 1663.

Fr. Dominicus Antonius Ranieri qui ſupra &c.

Giouanni Federighi.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDEX
CAPITVM
RERVMQVE MEMORABILIVM,
QVÆ IN HAC PRIMA OPERIS PARTE CONTINENTVR.

PRÆFATIO TOTIVS OPERIS *pag.* 1.

Natura opera non ſunt aquè perfecta. ibid.
Artes, ac Diſciplinæ haud æque perfecta ſunt. ibid.
Mathematicæ Diſciplinæ rei conſideratæ dignitate à plurimis ſuperantur. ibid.
Cogitatio, ac ſtudium animi pabulum eſt. ibid.
Ars Analytica in magno pretio apud veteres extitit. 2.
Locus ἀναλυόμενος quid. ibid.
Nihil à principio perfectum. ibid.
Multi Mathematica ſciunt, pauci autem Matheſin. ibid.
Alij etiam hanc prouinciam aggreſſi ſunt. ibid.
Huius Artis difficultas. 3.
Operis Argumentum. ibid.

IN PRIMAM OPERIS PARTEM PRÆFATIO 4.

Mathematicarum dignitas.
Socratis dictum. ibid.
Algebra Mathematicarum præſtantiſſima pars. ibid.
Græci ſe hanc adinueniſſe profitentur. 5.
Arabes hanc Matheſeos partem, quam maximè celebrarunt. ibid.
Cum Græcis de eius inuentione contendunt. ibid.
Noua Algebra maximè commendabilis. ibid.
Horatij locus ad propoſitum faciens. ibid.
Eius dignitas magis declaratur, & vtilitas explicatur. ibid.
Vtilitas eius comprobatur. 6.
Cætera Matheſeos partes commendantur. ibid.
Geometria. ibid.
Aſtronomia. ibid.
Muſice. ibid.
Mechanice. ibid.
Arithemetica cæteris præfertur. ibid.
Eius æſtimatio apud Romanos. ibid.
Algebra præſtantiſſima Arithmeticæ pars. ibid.

Noua celebratur, vtpotè veteri præſtantior. ibid.
Vieta locus in Iſagoge faciens ad inſtitutum. 7.
Senecæ locus obſeruandus. ibid.
Nomen huius Artis explicatur. ibid.
Veteris Algebræ inuentor. ibid.
Diophanti Alexandrini in proœmio auctoritas. ibid.
Varia nomina ſortita eſt. ibid.
Almucabula dicitur. ibid.
Ars magna. ibid.
Regula rei, vel cenſus dici conſueuit. ibid.
Nouæ Algebræ inuentor. ibid.
Vetus cur Numeroſa dicatur. ibid.
Noua cur Specioſa. ibid.
Algebræ definitio. ibid.
Noua, & exactior Operis diuiſio, ac ordo. ibid.

De numeris denominatis, ſiue poteſtatibus. Caput I. pag. 9.

Numeri, quos propriè Algebra ſpeculatur. ibid.
Progreſſio Geometrica quid. ibid.
Huiuſmodi numeri quomodo dicantur. 10.
Nomina, & characteres iuxta quoſdam Analyſtas. ibid.
Arithmus quid ſecundum Diophantum. ibid.
Nominum, & characterum deſignatio. ibid.
Secundus character veteribus eſt ℞. 11.
Tertius character eſt 𝒬. ibib.
Nomina, & characteres iuxta Diophantum, & Vietam. ibid.
Non omnes conueniunt cum Diophanto in nominandis dignitatibus. ibid.
N, quid ſignificet. ibid.
Exponentes numeri, qui dicantur. ibid.
Explicatur deſcriptio progreſſionum naturalium, & Geometricæ. 12.
Superior tabula explicatur. ibid.
Cur numeri naturalis progreſſionis dicantur exponentes. ibid.
Prima cauſa. ibid.

* *Nota*

Digitized by Google

Nota o, quid ſignificet. ibid.
Secunda ratio. ibid.
Tertia ratio. ibid.
Quarta ratio. ibid.
Quinta ratio. ibid.
Sexta ratio. 13.
Septima ratio. ibid.
Explicatur hæc ſeptima ratio tàm iuxta viam communem, quàm iuxta Diophantum. ibid.
Dato poteſtatis loco, ſecundum vtramque viam characterem adinuenire, & contra. ibid.
Characteres vel ſunt ſimplices, vel compoſiti. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Quomodo ſit inſtituenda diuiſio. 14.
Secundus modus. ibid.
Quid agendum, quando poteſtatis exponens fuerit numerus impar. ibid.
Quando numerus exponens oblatus, fuerit numerus primus. ibid.
Huius methodi fundamentum. ibid.
Quomodo dato charactere, & poteſtate, reperiatur exponens, & locus. ibid.
Exemplum ad ſuperiorem doctrinam illuſtrandam. ibid.
Quando propoſitus character exponitur à numero incompoſito. ibid.
Quomodo hæc omnia fieri debeant in via Diophanti, & Vieta. 15.
Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Poteſtates ſecundum Diophantum vnde ſumant denominationem. ibid.
Quando dato charactere quæritur poteſtatis exponens, & locus. ibid.
Exemplum. ibid.
Huius regula fundamentum. ibid.
Quando exponens plures habet reſolutiones, ea eſt vſurpanda, quæ pauciores partes habet. ibid.
Quænam via ſit eligenda. ibid.
Duplici modo poteſtates propagari poſſunt. ibid.
Primus propagationis modus. ibid.
Secundus propagationis modus. ibid.
Exemplum ad explicandam ſuperiorem doctrinam. ibid.
Diophantus qua ratione innixus. ibid.
Diſcrimen vnde proueniat. 16.
Poteſtatum denominatio ad mentem Diophanti. ibid.
Sententia, & rationes Glorioſi. ibid.
Alia ratio. ibid.
Refellitur ab Auctore opinio Glorioſi. ibid.
Vnde ſumatur denominatio poteſtatum. ibid.
Secunda ratio ad idem oſtendendum. ibid.
Numerus 16, cur quadrato quadratus dicatur. ibid.
Quæ Analyſta mutuatur ab Elementis Matheſeos, nempe ſexdecim effata. 17.
Septima propoſitio ex iam commemoratis explicatur, ac demonſtratur. ibid.
Octaua explicatur, ac demonſtratur. ibid.
Nona propoſitio comprobatur. ibid.
Decima explicatur, & exemplo illuſtratur. ibid.
Proportiones, quæ ex iiſdem proportionibus componuntur, inter ſe ſunt eædem. 18.
Declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Hæc eſt proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionum compoſitione. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Decima prima propoſitio, ex iis, quæ Analyſta mutuatur ex Elementis Matheſeos. ibid.
Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Demonſtratio principalis ſupradictorum. ibid.
Speculum demonſtrationis. 20.
Compendioſius idem oſtenditur ibid.
Scholion. ibid.
Declarantur ea, quæ ſuperiùs aſſumpta fuerunt. ibid.
Duodecima oſtenditur. ibid.
Scholion. 21.
Iis, quæ ſuperiùs allata fuerunt, præcipue innititur Algebra. ibid.
Elementorum cognitio maximè neceſſaria ad hanc Matheſeos partem. ibid.
Definitiones. ibid.
Quadratum, ſeu potentia, quid. ibid.
Cubus, quid. ibid.
Quadrato-quadratum, quid. ibid.
Cætera poteſtates quid ſint, inſinuatur. ibid.
Quid ſint radices. ibid.
Additio, quid. ibid.
Subtractio, quid. ibid.
Multiplicatio, quid. ibid.
Aliter. ibid.
Productum, quid. ibid.
Diuiſio, quid. ibid.
Aliter. ibid.
Quotiens, quid. ibid.
Characterum nonnullorum explicatio præcipuè apud Auctorem. ibid.
Signum †*, quid ſignificet, quid ſignum* —*, quid* ⊏⊐ *ſignificet.* ibid.
Character R, quid ſignificet. ibid.
Character ℞*, quid ſignificet.* ibid.

De

De numeratione numerorum denominarorum, ſeu poteſtatum tam ſimplicium, quàm compoſitarum per numeros, tam abſolutos, quàm irrationales, ſeu ſurdos. Caput II. pag. 22.

Numeratio poteſtatum quid. ibid.
Numeri ſimplices, qui dicantur. ibid.
Numeri compoſiti. ibid.
Diminuti numeri, qui. ibid.
Horum numerorum expreſſio. ibid.
Quo pacto fiat numerorum pronunciatio. ibid.
Numeratio poteſtatum per numeros irrationales. ibid.
Radix ligata ſimplex. ibid.
Radix ligata, ſeu vniuerſalis compoſita. 23.
Declarantur præcepta ſuperius tradita. ibid.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
Quando fiat incluſio intra parentheſin. ibid.
Quando dignitas habet radicem, numerus autem non habet. ibid.
Quæ ſuperiùs dicta ſunt magis declarantur. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Propoſitio faciens ad inſtitutum. Si duo ſint numeri, ſumanturque &c. 24.
Demonſtratio. ibid.
Aliter idem vniuerſaliter demonſtratur. ibid.
Quædam in memoriam recolenda. ibid.

De Algorithmo Denominatorum numerorum, ſiue Poteſtatum. Caput. III. pag. 25.

Algorithmus quid. ibid.
Numerorum denominatorum Additio.
Operatio prima. ibid.
Simplices, Compoſiti, Diminuti, Mixti. ibid.
Simplices, vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ denominationis. ibid.
Præceptum additionis. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Quando numeri denominati fuerint denominationis diuerſæ. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Præceptum faciens, ad id de quo agitur. ibid.
Exemplum. ibid.
Algorithmus ſignorum †, & —. 26.
Signorum †, & —, additio. ibid.
Declarantur ſuperiora præcepta, & exemplis illuſtrantur. ibid.
Commutatur operatio additionis in ſubtractionem. ibid.
Hac de quantitate generatim accepta oſtendi poſſunt; & in Specioſa præſtabitur. 27.
Demonſtratio. ibid.
Propoſitio. Idem eſt partes addere partibus &c. ibid.
Additio †, ad †. ibid.
Propoſitio. Si duo ſint numeri diuiſi &c. ibid.
Exemplum. ibid.
Additio —, ad —. ibid.
Propoſitio. Si ſint duo numeri, à quibus &c. ibid.
Propoſitio. Si ſint duo numeri, à quibus &c. ibid.
Additio †, ad —, & —, ad †. 28.
Propoſitio. Si duo ſint numeri inæquales &c. ibid.
Propoſitio. Si numerus aliquis fuerit &c. ibid.
Exemplis declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Demonſtratio quoad poteſtates. ibid.
Propoſitio. Si numerus in numerum ducatur &c. ibid.
Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. 29.
Propoſitio. Numerus planus factus &c. ibid.
Exemplo declaratur. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Additionis examen duplex eſt; ſcilicet per ſubtractionem, & per reſolutionem in numeros abſolutos, &c. ibid.
De numeris ſurdis. ibid.
Quando numeri ſunt inæquales commenſurabiles quid agendum. ibid.
Quando radices fuerint incommenſurabiles. 30.
Primus incommenſurabilitatis modus. ibid.
Secundus modus incommenſurabilitatis. ibid.
Additio numerorum ſimplicium, qui intra parentheſin clauduntur. ibid.
Quando fuerint commenſurabiles, quid agendum. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Senſus harum radicum magis declaratur. ibid.
Propoſitio. Si numerus quiſpiam duos &c. ibid.
Declaratur ſuperior propoſitio. ibid.
Alio exemplo declaratur. 31.
Rurſus affertur alia declaratio. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Analytica demonſtratio. ibid.
Præmittuntur nonnulla ad Geometricam demonſtrationem. ibid.
Lemma primum. Si fuerint quantitates &c. ibid.
Demonſtratio. ibid.

Digitized by Google

Lemma ſecundum. Si fuerit circulus &c. 32.
Demonſtratio. ibid.
Proponitur, quod aſſumitur ad Geometricam demonſtrationem. ibid.
Theorema. Sint A C, C F &c. ibid.
Demonſtratio Geometrica. ibid.
Lemma primum. Sint duo numeri &c. 33.
Lemma ſecundum. Si duo numeri &c. 34
Pars Spectans ad primum Paradigma. ibid.
Pars Spectans ad ſecundum Paradigma. ibid.
Paradigma primum. ibid.
Paradigma ſecundum. ibid.
Vniuerſaliter demonſtratur Arithmeticè, quod ſupra fuit propoſitum oſtendendum, & quod Geometricè de radicibus quadratis tantummodo demoſtratum fuit. ibid.
Proponitur quod eſt oſtendendum. 35.
Paradigma primum. ibid.
Paradigma ſecundum. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Notarum ſignificatio. ibid.
Exemplis declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Quando ſunt numeri ſurdi, qui radices vniuerſales compoſita dicuntur, quid agendum. ibid.
Primò, videndum, num ſint ſimiles natura, & numero. ibid.
Secundò obſeruandum, num ſint commenſurabiles. 36.
Quando fuerint commenſurabiles. ibid.
Exemplis explicantur, quæ ſuperius dicta ſunt. ibid.
Superior operatio numeris illuſtratur. ibid.
Exempla. 37.
Superior doctrina declaratur exemplis. ibid.
Superiora exempla numeris illuſtrantur. 38.
Scholion. ibid.
Numerorum Denominatorum ſubtractio. Operatio ſecunda. 39.
Subtractionis præcepta. ibid.
Quando ſunt appellationis eiuſdem. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Propoſitio. Differentia duorum numerorum &c. ibid.
Quando ſunt appellationis diuerſæ. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Signorum †, & —, ſubtractio. ibid.
Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina. 40.
Quando in ſubtractione alter numerorum habet ſignum †, alter verò —. ibid.
In ſubtractione commutatur ſpecies operationis. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Exemplo declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Retinendum eſſe idem ſignum †, vel —. ibid.
Propoſitio. Si fuerint duo numeri &c. ibid.
Retinendum ſignum —. ibid.
Quando terminus ſuperior afficitur ſigno —, eſtque minor inferiori affecto ſigno itidem —, remanere ſignum †, oſtenditur. ibid.
Declaratur magis ſuperior doctrina. 41.
Retinendum eſſe intercedens ſignum —. ibid.
Propoſitio. Si ſint duo numeri &c. ibid.
Propoſitio. Si fuerit numerus &c. ibid.
Exemplum ad ſuperiùs allata explicanda. ibid.
Quoad poteſtates. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Subtractionis examen bifariam inſtitui poteſt, primò per additionem, ſecundò per reſolutionem in numeros abſolutos. 42.
Declaratio per exempla. ibid.
Secundum ſubtractionis examen. ibid.
Numeri denominati, dum numerantur per numeros irrationales. ibid.
Quando fuerint incommenſurabiles. ibid.
Exempla ad ſuperiora præcepta declaranda. ibid.
Quando fuerint incommenſurabiles. ibid.
Lemma primum. Sit recta A B &c. 43.
Lemma ſecundum. Si tres quantitates &c. ibid.
Theorema. Sint A E, D E, numeri &c. ibid.
Lemma. Sint duo numeri &c. 44.
Quando ſunt compoſita vniuerſalia. 45.
Quando numeri fuerint commenſurales, qua Arte ſit inſtituenda ſubtractio. ibid.
Scholion. 46.
Numerorum denominatorum multiplicatio. Operatio tertia. ibid.
Eadem numerorum diſtinctio in multiplicatione, quæ in cæteris operationibus. 46.
Multiplicatio numeri denominati per numerum abſolutum. ibid.
Multiplicatio numeri denominati per numerum denominatum. ibid.
Demonſtratio quantum ad numeros. ibid.
Demonſtratio quantum ad characteres. 47.
Propoſitio. Si fuerint quatuor numeri &c. ibid.
Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Demonſtratio ſupradictorum. ibid.
Scholion. ibid.
Demonſtrantur ſuperiùs dicta, per reductionem numerorum denominato-

rum

Digitized by Google

rum in numeros abſolutos. ibid.
Demonſtratio multiplicationis poteſtatum. ibid.
Propoſitio. Si numerus in Geometrica &c. ibid.
Additione exponentium comporatur nunumerus à quo deſignatur poteſtas emergens ex multiplicatione, quando poteſtas in ſe ducitur, quando etiam in aliam. 48.
Propoſitio. Si minor quiſpiam numerus &c. ibid.
Tabula conducens plurimùm ad poteſtatum multiplicationem. ibid.
Eiuſdem vſus. ibid.
Quando numeri fuerint oompoſiti. 49.
Signorum †, & — multiplicatio. ibid.
Explicantur pracepta. ibid.
Exemplis enucleatur ſuperior doctrina. ibid.
Huius operationis demonſtratio. ibid.
Exemplis explicatur ſuperior doctrina. 50.
Demonſtratio. ibid.
Propoſitio. Ss duo numeri fuerint &c. ibid.
Exemplis declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Demonſtratio quoad ſigna. 51.
Propoſisio. Si duo fuerint vtcumque &c. ibid.
Exemplo declaratur ſuperior propoſitio. ibid.
Demonſtratio quoad ſigna —, & —: nempe —, in —; efficere †. ibid.
Propoſitio. Si fuerint duo numeri &c. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Concluditur ex —, in —, fieri †. ibid.
Quoad ſigna †, & —, & contra. 52.
Quoad numeros ſurdos. ibid.
Explicatur multiplicatio Poteſtatum numeratarum à numeris irrationalibus. ibid.
Difficultas. ibid.
Quid agendum: ibid.
Num in multiplicatione, numeri irrationales dignitate affecti debeat dignitas redigi ad naturam &c. Itant quadraticè multiplicando numerum abſolutum, etiam dignitatem non diſſimili modò multiplicare debeamus. ibid.
Exemplis res illuſtratur. ibid.
Quando radices ſunt natura diuerſa. 53.
Quando radices ſunt vniuerſales. ibid.
Huius multiplicationis partitio. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Declaratio. ibid.
Demonſtratio ſupradictorum. 54.
Subtractio commemorata qua arte fiat à Geometra. ibid.
Vnitatis vſus in rebus Geometricis magni momenti eſt. ibid.
Lemma primum. Sit numerus A &c. ibid.
Lemma ſecundum. Sint duo numeri &c. 55.
Arithmetica domonſtratio ad oſtendendum preceptum multiplicationis inter numerum abſolutum, & radicem ſimplicem vniuerſalem. ibid.
Lemma. Sint duo numeri &c. 56.
Arithmetica demonſtratio cùm radix ſimplex vniuerſalis ducitur in radicem ſimplicem vniuerſalem. ibid.
Multiplicationis probatio. 57.
Primus probationis modus. ibid.
Secundus modus probationis. ibid.
Exemplo declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Additio terminorum Arithmetica progreſſionis reſpondet multiplicationi Geometrica progreſſionis. ibid.
Scholion. ibid.
Numerorum Denominatorum Diuiſio. Operatio quarta. 58.
In diuiſione, vt in cateris operationibus occurrit numerorum varietas, aeque diſtinctio. ibid.
Quando numerus denominatus diuidi debet per numerum abſolutum. ibid.
Exemplo declarantur pracepta. ibid.
Quando numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatum. ibid.
Diuiſionis ſupradicta pracepta. ibid.
Exemplis doctrina tradita illuſtratur. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. 59.
Demonſtratio ad poteſtatem quod ſpectat. ibid.
Propoſitio. Si fuerint quatuor numeri &c. ibid.
Exemplo explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Demonſtratio. 60.
Exemplis declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Additione exponentium rectè fieri poteſtatum multiplicationem, oſtenditur. ibid.
Diuiſio ſignorum †, & —. 61.
Si †, diuidatur per †. ibid.
Si †, diuidatur per †, fieri †, oſtenditur. ibid.
Si —, diuidatur per —, fieri †, demonſtratur. ibid.
Quando †, diuiditur per —, vel contra &c. ibid.
Exemplis explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Quando diuiſor fuerit numerus compoſitus. ibid.
Quando per numerum compoſitum inſtitui poteſt diuiſio. ibid.
Quando diuiſio per numerum compoſitum.

tum inſtitui nequit, fit fractio. ibid.
Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Quando diuiſor eſt numerus denominatus maioris appellationis. ibid.
Diuiſio per numeros irrationales. ibid.
Quando numeri irrationales ſunt eiuſdem denominationis, & ſunt aquales. ibid.
Quando numeri fuerint eiuſdem natura; at verò fuerint inaquales quid agendum. ibid.
Num, dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus. 62.
Exemplis enucleatur ſuperior doctrina. ibid.
Quando radices ſunt tàm numero, quàm natura diſſimiles. ibid.
Quando numerus per radicem, vel è contra diuidere debeamus. ibid.
Quando numeri irrationales fuerint compoſiti. ibid.
Diuiſionis probatio. ibid.
Additio numerorum Arithmetica progreſſionis, reſpondet multiplicationi terminorum progreſſionis Geometrica. ibid.
Scholion. 63.
Qua paulò obſcurius tradita ſunt, hic maximè declarantur, & exemplis præcipuè illuſtrantur, ibid.
Additionis doctrina magis declaratur. ibid.
Methodus generaliſſima pro omnibus radicibus. ibid.
Alia exempla ad eadem illuſtranda præcepta. ibid.
Subtractionis præcepta explicantur. ibid.
Exemplis explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Quando radices ſunt quadrata. ibid.
Quando radices ſunt cubica, vel cuiuſque alterius generis. 64.
Quando ſunt numeri irrationales compoſiti. ibid.
Subtractionis præcepta explicantur. ibid.
Exempla, quibus ſuperior doctrina explicatur. ibid.
Qua de additione dicta ſunt, etiam de ſubtractione ſunt intelligenda. ibid.
Quando radices ſunt vniuerſales compoſita, & commenſurabiles; earum additio explicatur. ibid.
Explicatur ſubtractio radicum vniuerſalium. ibid.
Adnotatio circa ea, qua hactenus dicta ſunt de radicibus vniuerſalibus ſimplicibus. 65.
Exemplis enucleatur ſuperior doctrina. ibid.
Cum terminus minor afficitur ſigno —, maior †. ibid.
Si maior afficitur ſigno —, & minor †. ibid.
Cum terminus minor afficitur ſymbolo —, at verò maior, à quo fit ſubtractio notatur ſigno †. 66.
Explicantur ſuperius dicta. ibid.
In additione caſuum ſufficientia. ibid.
Idem in ſubtractione. ibid.
Appendix. ibid.
Nomine lateris abſolutè prolati intelligendum eſt latus quadratum. 67.
Generale præceptum traditum eſt, ſed quadratis radicibus tantùm applicatum, facilitatis gratia. ibid.
Lemma. Sint duo numeri &c. ibid.
Ad alia radicum genera quomodo transferendum oſtenditur. ibid.
Idem ad generalem formam redactum. ibid.

De fractionibus, ſiue minutijs numerorum denominatorum, ac de earundem Algorithmo. Caput IV. pag. 68.

Operationes occurrentes in fractionibus numerorum denominatorum. ibid.
Quo pacto numerentur fractiones numerorum denominatorum. ibid.
Operationes fractionum, qua, & quot. ibid.
Fractionum abbreuiatio quoad numeros. ibid.
Abbreuiationis ars quoad numeros in quo conſiſtat. ibid.
Datis duobus numeris non primis inter ſe, maximam eorum exhibere menſuram. ibid.
Superior doctrina declaratur exemplo. ibid.
Operatio abbreuiationis fractionum coſſicarum oſtenditur. ibid.
Demonſtratio. 69.
Abbreuiatio characterum qua arte fiat. ibid.
Qua hactenus dicta ſunt explicantur. ibid.
Explicantur magis, qua hactenus allata ſunt. ibid.
Demonſtratio abbreuiationis characterum ibid.
Exemplo illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Huius operationis demonſtratio. 70.
Propoſitio. Si numerus duos numeros &c. ibid.
Quando fractio adhæret integris. ibid.
Quatuor operationes circa fractiones. ibid.
Scholion. ibid.
Notandum. ibid.
Explicatur ſuperior fractionum doctrina. ibid.
Additio fractionum denominatarum.

Opera-

Operatio prima. ibid.
Minutiæ addendæ, vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ denominationis. ibid.
Quando habent ſimilem denominatorem. ibid.
Quando ſunt denominatores diuerſi. 71.
Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina. ibid.
Exemplum per numeros abſolutos. ibid.
Supradictæ operationis demonſtratio. ibid.
Scholion. ibid.
Subtractio fractionum denominatarum. Operatio ſecunda, 72.
Subtractionis præcepta. ibid.
Subtractionis exempla. ibid.
Quando denominatores non fuerint omnino ſimiles. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina reſolutis exemplis in numeros abſolutos. ibid.
Demonſtratio quoad characteres. ibid.
Demonſtratio quoad numeros. ibid.
Multiplicatio fractionum denominatarum. Operatio tertia. 73.
Multiplicationis præcepta. ibid.
Demonſtratio multiplicationis. ibid.
Aliter idem oſtenditur. 74.
Diuiſio fractionum denominatarum. Operatio quarta. ibid.
Diuiſionis præcepta explicantur. ibid.
Exempla ad maiorem explicationem præceptorum. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Compendioſius eadem demonſtratio traditur, ibid.
Aliter ipſius diuiſionis operatio oſtenditur. ibid.
Algorithmus irrationalium fractionum denominatarum. 75.
Scholion. ibid.
Animaduerſio. ibid.

De extractione radicum numerorum denominatorum, ſeu numerorum cum dignitatibus, vel poteſtatibus. Cap. V. pag. 76.

Radicum numerorum denominatorum extractio, quid ſit. ibid.
Radicum extractio ex numeris vulgaribus alibi tractanda promittitur. ibid.
Radicum numerorum denominatorum extractio, qua arte fiat. ibid.
Aliter idem efficere. ibid.
℞ Q extractio. ibid.
℞ C extractio. ibid.
℞ QQ extractio, ibid.
℞ QC extractio. ibid.
Per primum modum. ibid.
Per ſecundum modum. ibid.
Ad euitandam confuſionem, quid ſit agendum. 77.
Quando numerus non habet radicem, & dignitatis exponens diuidi poteſt per exponentem characteris, à quo radix denominatur. ibid.
Quando nec ex numero, nec ex poteſtate latus erui poteſt. ibid.
Radicum extractio ex numeris compoſitis. ibid.
Quando commemorati numeri fuerint irrationales. qua arte procedendum ſit. ibid.
Quando fuerint rationales quid agendum. ibid.
Methodus extractionis, & primò quid obſernandum. ibid.
Quid ſecundo in extractione ſit obſeruandum. ibid.
Quid tertiò expediat obſeruare. ibid.
Lateris indagatio 2 R † 5. 78.
Operationis comprobatio. ibid.
Operationis demonſtratio. ibid.
Declaratio ſupradictorum. ibid.
Radicis cubicæ extractio. ibid.
Exquatrimonio qua methodo radix extrahatur. 79.
Prima figura indagatio. ibid.
Secunda figura inuentio. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Quando latus conſtiterit ex pluribus figuris, quam duabus. ibid.
Secunda figura inquiſitio. ibid.
Radicis quadrato-quadratæ inuentio. 80.
Nota diligenter. ibid.

De ſecundis radicibus, earumque Algorithmo. Caput VI. pag. 81.

Secundarum radicum Algorithmus. ibid.
Explicatur finis, ob quem ſecundæ radices adinuentæ fuerint. ibid.
Secundarum radicum numeratio, quo pacto ſe habet. ibid.
Secundarum Radicum additio. Operatio prima. ibid.
Additionis præcepta. ibid.
Quando radices ſecundæ ſunt eiuſdem generis. ibid.
Quando non ſunt generis eiuſdem. ibid.
Secundarum radicum ſubtractio. Operatio ſecunda. ibid.
Subtractionis præcepta. ibid.
Secundarum radicum multiplicatio. Operatio tertia. 82.

Multi-

Multiplicationis præcepta. ibid.
Multiplicationis exempla. ibid.
Cum abſolutus numerus ducitur in numerum ſecundæ radicis. ibid.
Secundæ radices diuerſa litera inter ſe. ibid.
Secundæ radices eiuſdem literæ inter ſe. ibid.
Secundæ radices in ſe quadraticè, vel cubicè. ibid.
Quando numerus ſecundæ radicis ducitur in numerum alium eiuſdem ſecundæ radicis. ibid.
Quando numerus denominatus ſimplex abſque nota radicis ſecundæ multiplicatur in numerum ſignatum litera, & ſigno denominato. ibid.
Cum numerus poſt literam ſecundæ radicis gerens ſignum dignitatis ducitur in numerum, qui poſt eandem literam ſecundæ radicis gerit quoq; dignitatis ſignum, qui proueniat. ibid.
Secundarum radicum Diuiſio. Operatio quarta. 83.
Præcepta diuiſionis. ibid.
Supradictarum operationum comprobatio. ibid.
Declaratur ſuperior doctrina. 84.
Secundarum radicum extractio. Operatio quinta. ibid.
Radicum extractio ex ſecundis radicibus. ibid.

De æquatione Algebrica. Caput. VII. pag. 85.

Æquatio Algebrica quid ſit. ibid.
Definitionis explicatio. ibid.
Requiritur ad commemoratam æquationem. ibid.
Æquatio ſimplex, vel compoſita. ibid.
Poteſtas pura, vel affecta. ibid.
Æquatio ſimplex, quid. ibid.
Æquatio compoſita, quid. ibid.
Poteſtas quid. ibid.
Homogeneum comparationis quid. ibid.
Gradus parodici quid. ibid.
Affectio. ibid.
Cataphatica. ibid.
Apophatica. ibid.
Amphibolo. ibid.
Negatio directa. ibid.
Negatio inuerſa. ibid.
Poteſtas tot affectionibus implicari poteſt, quot ſunt gradus parodiei ad poteſtatem. 86.
Quot ſint combinationes, quomodo cognoſcatur. ibid.
Combinationes iſtæ multiplicantur ratione ſignorum †, & —. ibid.
Pridem haud eràt inuenta ars, qua æquationes omnos compòſitæ explicantur. ibid.
Quando exponentes non ſecuant Arithmeticam proportionem. ibid.
Quomodo regula nouiter excogitata inſeruiant. ibid.
Quatuor ſunt, in quibus conſiſtit artificium explicandarum æquationum. 87.
Superiùs dicta explicantur. ibid.
Magna induſtria in inuenienda æquatione. ibid.

De æquationis inuentione. Caput VIII. pag. 88.

Quid Analyſta curare debeat. ibid.
Exemplum primum. ibid.
Æquationis inuentio. ibid.
Exemplum ſecundum. ibid.
Exemplum tertium. ibid.
Exemplum quartum. ibid.
Exemplum quintum. ibid.
Exemplum ſextum. 89.
Exemplum ſeptimum. ibid.
Exemplum octauum. ibid.
Exemplum nonum. ibid.
Exemplum Decimum. ibid.
Exemplum decimumprimum. 90.
Exemplum decimumſecundum. ibid.
Æquationis indagatio. ibid.
Eiuſdem inuentio. ibid.
Exemplum decimumtertium. ibid.
Exemplum decimumquartum. ibid.
Æquationis indagatio. 91.
Eiuſdem inuentio. ibid.
Exemplum decimumquintum. ibid.
Æquationis inuentio. ibid.
Exemplum decimumſextum. ibid.
Exemplum decimumſeptimum. ibid.
Monitum. ibid.

De reductione, vel tranſpoſitione æquationis, quæ Ἀντίθεσις, conſueuit appellari. Caput IX. pag. 92.

Antitheſis quid ſit. ibid.
Ad quid ſit opus antitheſi. ibid.
Exempla. ibid.
Vieta ponit omnes dignitates ex vna æquationis parte. 93.
Antitheſis fundamentum, quid. ibid.
Quid aduertendum circa antitheſin. ibid.
Reductio ſigni —, reſtauratio nuncupatur.

patur. ibid.
Reductio ſigni †, fit ſubtractione, vt ſigni —, fit additione. ibid.
Antithesis artificium duobus præceptis continetur. ibid.
Declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Reductionis ratio. ibid.
Præceptum. ibid.
Idem præceptum alijs verbis conceptum. ibid.
Eiuſdem præcepti ſenſus. 94.
Quando eſt æquatio cum ſigno —. ibid.
Exempla ad ſuperiorem doctrinam illuſtrandam. ibid.
In quo demum Antitheſis conſiſtat explicatur. ibid.
Reductio æquationum inter fractiones fit multiplicatione per crucem. ibid.
Numerorum abſolutorum exemplo ſuperior operatio illuſtratur. ibid.
Numeris abſolutis explicatur ſuperior operatio. 95.
Declaratur ſuperior doctrina de reductione. ibid.
Declarantur ſuperiùs dicta in minutijs vulgaribus. ibid.
Reductionis demonſtratio. ibid.
Explicatur operatio in numeris ſurdis. 96.
Antitheſis declaratur rurſus. ibid.
Cur hæc operatio dicatur antitheſis. 97.
Hypobibaſmus, quid. ibid.
Qua methodo abſoluatur hæc operatio, quæ hypobibaſmus dicitur. ibid.
Exemplis declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Ad maiorem iſtius operationis illuſtrationem aliqua reſoluuntur æquationes. ibid.
Exempla. ibid.
Facto hypobibaſmo, quid ſuperſit. ibid.

De Paraboliſmo, ſeu Diuiſione. Caput X. pag. 98.

Facta reductione debet inſtitui Paraboliſmus, ſiue applicatio, ſeu diuiſio. ibid.
Animaduerſio. ibid.
Paraboliſmus, quid. ibid.
Paraboliſmus eſt compendium regulæ aureæ. ibid.
Explicatur magis ſuperior doctrina. ibid.
Paraboliſmi fundamentum. ibid.
Quid per diuiſionem inquiratur. ibid.
Cùm diuiſor eſt vnitas, non eſt opus diuiſione, & quare. ibid.
Declaratio ſuprà dictorum. ibid.
Non rarò contingit, vt oporteat reducere fractiones. 99.
Iſomæria, quid ſit. ibid.
Methodus, qua hæc operatio abſoluitur. ibid.
Exemplum primum. ibid.
Huius operationis regula declaratur. ibid.
Admonitio maximè neceſſaria. ibid.
Declaratio ſuprà dictorum. ibid.
Declaratur, rectè quidem Iſomæriam inſtitui modo iam explicato. ibid.
Exemplum ſecundum. ibid.
Declaratur doctrina tradita. 100.
Exemplum tertium. ibid.
Exemplum quartum. ibid.
Exemplum quintum. ibid.
Exemplum Sextum. ibid.
Exemplum ſeptimum. ibid.
Altera methodus perficiendæ Iſomæria. ibid.
Exemplum primum. ibid.
Exemplum ſecundum. ibid.
Exemplum tertium. ibid.
Exemplum quartum. 101.
Iſomæria fit etiam, multiplicando ſingulos numeratores per denominatores. ibid.
Exemplum primum. ibid.
Exemplum ſecundum. ibid.
Exemplum tertium, ibid.
Explicantur magis, quæ hactenus dicta ſunt. ibid.
Exemplum ad idem. ibid.

De explicatione æquationum ſimplicium, ſiue purarum. Caput XI. pag. 103.

Simplex æquatio, quid ſit, in memoriam reuocatur. ibid.
Methodus explicandi æquationem inter R, & N. ibid.
Quid agendum, quando ſit æquatio inter R, & N. ibid.
Exemplum. ibid.
Problema. Numerum reperire, qui ductus in 6, producat 60. ibid
Admonitio. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Methodus explicandi æquationem inter Q, & R. ibid.
Declaratur hæc methodus. ibid.
Exemplum. ibid.
Problema ad hanc methodum illuſtrandam. 104.
Methodus explicandi æquationem inter Q, & N. ibid.
Huius methodi præcepta. ibid.
Exemplum. ibid.
Problema. Numerum reperire, cuius quadratum &c. ibid.

Quadrata æqualia habent latera æqualia. ibid.
Methodus explicandi analyſin puri quadrati. ibid.
Pauca ex Specioſa Algebra deprompta præmittuntur. ibid.
Veteres hæc tractarunt, ſed infeliciter. ibid.
Paradigma ad poteſtatum geneſin. 105.
Theorema. Poteſtatem quamcumque ex binomia radice &c. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Theoremata præmittenda ad Numeroſam poteſtatum purarum analyſin. ibid.
Theorema primum. Quadratum à duobus &c. 107.
Poriſma. ibid.
Theorema ſecundum. Cubus à duobus ſingularibus &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Theorema tertium. Quadrato-quadratum à duobus &c. 108.
Poriſma. ibid.
Theorema quartum. Quadrato-cubus à duobus ſingularibus &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Theorema quintum. Cubo-cubus à duobus ſingularibus &c. 109.
Poriſma. ibid.
Ars extrahendarum radicum. ibid.
Explicatio ſuprà dictorum. 110.
Explicatio methodi propoſita. ibid.
Quando radix vna figura conſtat. ibid.
Quando duabus. ibid.
Quando tribus. ibid.
Quando quatuor &c. ibid.
Analyſis poteſtatis, quid. ibid.
Primum obſeruandum ad analyſeos inſtitutionem. ibid.
Secundum. ibid.
Nota primi gradus parodici ad poteſtatem eſt R. ibid.
Tertium. ibid.
Quartum. ibid.
Quintum. 111.
Sextum. ibid.
Septimum. ibid.
Obſeruandum. ibid.
Problema. E dato in numeris quadrato &c. ibid.
Theorema Syntheticum. ibid.
Notandum. ibid.
Exemplum. ibid.
Notandum. ibid.
Aſymmetrum latus quando. 112.
Paradigma analyſeos quadrati puri, iuxta ſuperiorem θεωρίαν elaboratum. ibid.
Paradigma ſecundum analyſeos quadrati puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν, extructum. 113.
E dato in numeris cubo puro. latus analyticè elicere. 114.
Figuræ quomodo ſignari debeant. ibid.
Theorema ſyntheticum. ibid.
Quando plura fuerint puncta. ibid.
Methodus. ibid.
Methodus indagandi ſecundam figuram. ibid.
Numerorum diſpoſitio. 115.
Quando ſolidorum ſumma non eſt æqualis reſiduo. ibid.
Proxima radix quomodo inuenienda. ibid.
Paradigma analyſeos cubi puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν extructum. ibid.
E dato in numeris quadrato-quadrato puro, latus analyticè elicere. 116.
Paradigma analyſeos quadrato-quadrati puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν extructum. ibid.
E dato in numeris quadrato-cubo puro latus analyticè elicere. 117.
Paradigma analyſeos quadrato-cubi puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν extructum. 118.
E dato in numeris cubo-cubo puro latus analyticè elicere. ibid.
Paradigma analyſeos cubo-cubi puri iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν extructum. 119.
Scholion. 120.
Declarantur aliqua neceſſaria ad ſuprà dictorum intelligentiam. ibid.
Nota. ibid.

De explicatione æquationum compoſitarum, ſiue affectarum, & primò de explicandis æquationibus quadraticis affectis ſub latere. Caput. XII. pag. 121.

Tres ſunt æquationis ſpecies. ibid.
Varia, ac diuerſa methodi explicandi æquationem inter Q † R, & N. ibid.
Methodus Diophanti. ibid.
Explicatur methodus Diophanti. ibid.
Illuſtratur exemplis ſuperior doctrina. ibid.
Eadem eſt obſeruanda methodus intercedentibus numeris irrationalibus. 122.
Methodus communis Antiquorum. ibid.
Methodus explicatur. ibid.
Quando occurrunt numeri irrationales. ibid.
Scholion. 123.

Quan-

Quando comparationis homogeneum fuerit numerus compoſitus &c. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Superior doctrina demonſtratur. ibid.
Scholion. 124.
Præmittuntur alia demonſtrationes ad hanc methodum confirmandam. ibid.
Methodus Petri Nonij explicatur. ibid.
Quando intercedunt numeri irrationales. ibid.
Demonſtratio ſupradictorum. 125.
Peculiaris Vieta methodus explicatur. ibid.
Explicantur ſuperiora præcepta. ibid.
Huius methodi demonſtratio in Specioſam Algebram differtur. 126.
Methodus Steuini explicatur. ibid.
Exemplo ſuperior methodus illuſtratur. ibid.
Methodus Coigneti, eiuſdemque præcepta. ibid.
Exemplum ſupradictæ methodi. ibid.
Methodus Girardi traditur. 127.
Exemplis illuſtratur. ibid.
Corollarium. ibid.
Quid in hac prima æquatione compoſita fiat. ibid.
Scholion. ibid.
Modus reuocandi compoſitam æquationem hanc ad ſimplicem. ibid.
Varia, ac diuerſa methodi explicandi æquationem inter Q — R, & N. 128.
Methodus Diophanti. ibid.
Diophantea methodi explicatio. ibid.
Quando occurrunt numeri irrationales. ibid.
Methodus communis Antiquorum, ibid.
Huius methodi præcepta. ibid.
Scholion. 129.
Demonſtratio. 130.
Demonſtratio ſuperioris methodi. ibid.
Demonſtratio alia eiuſdem methodi. ibid.
Methodus Petri Nonij, & eius præcepta. 131.
Superioris methodi demonſtratio. ibid.
Peculiaris methodus Vieta, & eius præcepta. ibid.
Exemplo declarantur præcepta tradita. 132.
Demonſtratio in Specioſam Algebram differtur. ibid.
Methodus Steuini traditur. ibid.
Exemplo declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Declaratur methodus Coigneti. ibid.
Girardi methodus explicatur. ibid.
Exemplum ad ſuperiorem methodum illuſtrandam. 133.
Corollarium. ibid.
Scholion. ibid.
Æquationis compoſita tam explicata ad ſimplicem reuocatio. ibid.
Varia, ac diuerſa methodi explicandi æquationem inter R — Q, & N. ibid.
Methodus Diophanti. ibid.
Diophantea methodi explicatio. ibid.
Hæc æquatio duplicem habet radicem. 134.
Methodus communis Antiquorum declaratur. ibid.
Exemplum ad ſuperiorem doctrinam explicandam. ibid.
Nota. 135.
Demonſtratio. ibid.
Corollarium. 136.
Quid ex hactenus explicatis colligendum ſit. ibid.
Explicatur methodus Petri Nonij. ibid.
Quando quadruplum numeri abſoluti æquale fuerit quadrato dimidij numeri radicum, vnicum eſt latus. 137.
Methodus ſuperius aſſignata demonſtratur. ibid.
Demonſtratur, quando numeri abſoluti quadruplum æquale fuerit quadrato numeri radicum, dimidium numeri radicum fore latus. ibid.
Peculiaris methodus Vieta. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Huius methodi demonſtratio. 138.
Coigneti methodus declaratur. ibid.
Methodus Girardi. ibid.
Corollarium. 139.
Quid colligendum ex dictis. ibid.
Problema. Numerum reperire, qui ſi ducatur &c. ibid.
Eiuſdem enodatio. ibid.
Scholion. ibid.
Nonnulla aduertenda. ibid.

De explicandis æquationibus cæteris, in quibus terminorum exponentes ſeruant Arithmeticam proportionem. Caput XIII. pag. 140.

Quando in æquationibus terminorum exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionem, qua arte procedendum ſit, declaratur. ibid.
Hæc æquatio non indiget particulari explicatione. ibid.
Doctrina tradita exemplis illuſtratur. ibid.
Operationis examen. 142.
Monitum. ibid.

Theoremata præmittenda ad Numeroſam affectarum æquationum Analyſin. Capur XIV. pag. 143.

Sequitur agendum de æquationibus diſficilioribus. ibid.
Viata hoc argumentum accuratè tractauit, ſed multa prætermiſit. ibid.
Multa ſuperſunt ad perfectionem Analytices. ibid.
Vnde plurimum ſplendoris affulſit Matheſi. ibid.
Auctoris munus. ibid.
Sectio prima. 144.
Lemma primum. Quadratum à binomio latere &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Lemma ſecundum. Quadratum à binomio latere, ſeu &c. 145.
Theorema ſecundum. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Lemma tertium. Planum ſub coefficiente longitudine &c. 146.
Theorema tertium. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Sectio ſecunda. 147.
Lemma primum. Cubus à binomio latere &c. ibid.
Theorema Primum. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Poriſma. 148.
Lemma ſecundum. Cubus à binomio latere, ſiue &c. ibid.
Theorema ſecundum. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Poriſma. 149.
Lemma Tertium. Solidum ſub coefficiente plano &c. ibid.
Theorema tertium. Si fuerit æquatio, in qua ſolidum &c. ibid.
Poriſma. 150.
Sectio tertia. ibid.
Lemma primum. Cubus à binomio latere, ſiue &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua cubus &c. 151.
Poriſma. ibid.
Lemma ſecundum. Cubus à binomio latere, ſiue &c. ibid.
Theorema ſecundum. Si fuerit æquatio, in qua cubus &c. 152.
Poriſma. ibid.
Lemma tertium. Solidum ſub coefficiente longitudine &c. 153.
Theorema tertium. Si fuerit æquatio, in qua ſolidum &c. ibid.
Poriſma. ibid.
Sectio quarta. 154.
Lemma primum. Quadrato-quadratum à binomio latere &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua quadrato-quadratum &c. ibid.
Poriſma. 155.
Lemma ſecundum. Quadrato-quadratum à binomio latere &c. ibid.
Theorema ſecundum. Si ſit æquatio, in qua quadrato quadratum &c. ibid.
Poriſma. 156.
Lemma tertium. Plano-planum ſub coefficiente ſolido &c. ibid.
Theorema tertium. Si ſit æquatio, in qua plano planum &c. ibid.
Poriſma. 157.
Sectio quinta. ibid.
Lemma primum. Quadrato-cubus à binomio latere &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua quadrato cubus &c. ibid.
Poriſma. 158.
Lemma ſecundum. Quadrato cubus à binomio latere &c. ibid.
Theorema ſecundum. Si fuerit æquatio, in qua quadrato-cubus &c. ibid.
Poriſma. 159.
Lemma tertium. Solidum ſub coefficiente plano plano &c. ibid.
Theorema tertium. Si fuerit æquatio, in qua quadrato cubus &c. ibid.
Poriſma. 160.
Sectio ſexta. ibid.
Lemma primum. Cubo-cubus à binomio latere &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua cubo-cubus &c. 161.
Poriſma. ibid.
Scholion. ibid.
Ad ſectionem quartam Appendix. 162.
Lemma primum. Quadrato-quadratum à binomio latere &c. ibid.
Theorema primum. Si fuerit æquatio, in qua quadrato-quadratum &c. ibid.
Poriſma. 163.
Lemma ſecundum. Quadrato-quadratum à binomio latere &c. ibid.
Theorema ſecundum. Si fuerit æquatio, in qua quadrato-quadratum &c. ibid.
Poriſma. 164.

Lemma

Lemma tertium. Plano-planum ſub cubo à binomio latere &c. ibid.
Theorema Tertium. Si fuerit plano-planum ſub cubo &c. ibid.
Poriſma. 165.
Scholion. ibid.

Numeroſa æquationum affectarum Analyſis. Caput XV. pag. 166.

Numeroſa Analyſis æquationis, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine. Sectio prima. ibid.
Iſomæria præſidium eſt Analyſta adverſus fractionis vitium ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio explicatur. ibid.
Huius methodi demonſtratio Geometrica. 167
Geometricè oſtenditur, quàm benè hanc methodum cum Veteri conuenire. ibid.
Analyſis iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν, ordinata. 168.
Præcepta ad hanc æquationem explicandam. 169.
Quando coefficiens pluribus, quam vna figura conſtat. 170.
Quomodo ſingularia ſint eligenda latera. ibid.
Coëfficiens longitudo in ſuccedentia loca ordine ſubycienda. ibid.
Scholion. ibid.
Breuiùs eadem reſolutio traditur. ibid.
Ad habendam primam figuram. ibid.
Ad habendam ſecundam figuram. ibid.
Ad habendam tertiam figuram. ibid.
Quando fiat deuolutio. 172.
Scholion. 173.
Numeroſa Analyſis, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio explicatur. ibid.
Demonſtratio Geometrica. 174.
Oſtenditur, hanc apprimè cum veteri methodo conſentire. ibid.
Analyſis iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν, ordinata. 175.
Scholion. 176.
Breuiùs tractatur methodus. ibid.
Ad indagandam primam figuram. ibid.
Ad indagandam ſecundam figuram. ibid.
Ad indagandam tertiam figuram. ibid.
Cùm eſt quadratum acephalum. 177.
Præcepta ad hanc æquationem explicandam. ibid.
Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν ordinata. 178.
Numeroſa Analyſis æquationis affectæ, in qua planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati. 179.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio explicatur. ibid.
Demonſtratio Geometrica, quando coefficiens longitudo maior eſt duplo latere ſingulari primo. 180.
Demonſtratio Geometrica, quando duplum latus ſingulare primum maius eſt coefficiente longitudine. ibid.
Breuiùs oſtenditur idem, quando coefficiens longitudo maior fuerit duplo ſingulari latere primo. 181.
Hanc apprimè conuenire cum veteri methodo demonſtratur. ibid.
Quando duplum latus primum eſt maius coefficiente in æquationibus quadraticis amphibolis. 182.
Quando duplum latus primum eſt minus coefficiente in iiſdem æquationibus. ibid.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν ordinata ad indagandam radicem minorem, 183.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν ordinata ad indagandam radicem maiorem. 184.
Alia quædam traduntur ad ſupra poſitas æquationes attinentia. Sectio ſecunda. 185.
Habita radice minori, quomodo maior indagatur in æquatione amphibola. ibid.
Idem aliter. ibid.
Quælibet ex his æquationibus duas habet radices. ibid.
Geometricè oſtenditur indagatio radicis maioris habita minori. ibid.
Scholion. 186.
Quadraticarum æquationum ad ſimplices reductio. ibid.
AEquatio Cataphatica. ibid.
AEquatio Apophatica. ibid.
AEquatio Amphibola. ibid.
Sæpe contingit, vt duplum latus ſingulare primum ſit minus coefficiente, ſiue radix ſit minor, ſiue maior. ibid.
Sedes congruentes, quæ debentur numeris, comparantur analyſi. ibid.

De

De explic andis æquationibus affectis, in quibus terminorum exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionem, & primò de æquationibus Cubicis. Caput XVI. pag. 187.

Auctor ſe abſtinet à recenſendis quorundam aliorum methodis. ibid.
Gherardi methodus explicatur. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Auctor ſe abſtinet à recenſendis quorundam aliorum methodis. ibid.
Gherardi methodus explicatur. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. ibid.
Numeroſa Analyſis æquationis, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano. Sectio prima: 188.
Specioſa reſolutio. ibid.
Ordinabitur autem æquationis Analyſis, vt infrà. ibid.
Numeroſa analyſis explicatur. ibid.
Nota diligenter circa electionem diuiſoris. ibid.
AEquationis Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. 189.
Explicatur reſolutio æquationis, cuius radix trium ſingularium eſt laterum. 190.
Analyſis iuxta eam, quæ præmiſſa eſt, θεωρίαν, inſtituta. ibid.
Nota circa diuiſores. 192.
Scholion. ibid.
Breuiùs idem perficitur. ibid.
Primi lateris inuentio. ibid.
Secundi lateris inquiſitio. ibid.
Indagatio tertiæ figuræ. 193.
Quando contingit, vt numerus abſolutus plura habeat puncta, quàm figuras eius latus. 194.
Proponitur æquatiò, in qua cubus eſt minor afficiente ſolido. ibid.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Quando fiat deuolutio. ibid.
Superiùs dicta explicantur. 195.
Quo pacto lateris, ſiue radicis poteſtas dicatur diuiſor. ibid.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. 196.
Scholion. 197.
Nihil refert, num priùs ſubtrahatur cubus lateris primi, an ſolidum à latere primo in datum planum coefficiens. ibid.
Girardi methodus. 198.
AEquatio proponitur. ibid.
Numeroſa Analyſis æquationis, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio. 199.
Explicatur ipſa reſolutio. ibid.
AEquationis Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Scholion. 200.
Compendioſiori modo idem perficitur. ibid.
Indagatio primæ figuræ. ibid.
Inquiſitio ſecundæ figuræ. ibid.
Inuentio tertiæ figuræ. 201.
AEquationis Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Quando coefficiens planum pluribus abundat binis figuris, quàm cubus negatè affectus ſub latere ternis &c. 203.
Cubus acephalus. ibid.
Declaratur ſuperior doctrina. 204.
Methodus Girardi. ibid.
Numeroſa Analyſis æquationis, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano afficitur multa cubi. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Notandum. 205.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν ordinata, ad indagandam radicem minorem, ibid.
AEquationis Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. 207.
AEquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν ordinata, ad indagandam radicem maiorem. 209.
Scholion. 211.
Radicis maioris indagatio. ibid.
Alia proponitur æquatio. ibid
Scholion. 213.
Numeroſa Analyſis æquationis, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Huius methodi explicatio. ibid.
Quid interſit inter geneſin cubi puri, & affecti per adiunctionem ſolidi ſub lateris quadrato &c. ibid.
Quo pacto procedendum in hac analyſi. ibid.
Explicatur analyſis. 214.
AEquationis Analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Scholion. 216.
Quando cubus potiùs afficit, quàm afficiatur. ibid.
Solidum, cùm per longitudinem diuiditur, quotiens non intelligitur radix,

ſed

Digitized by Google

ſed quadratum. 217.
Hoc eſt legem homogeneorum obſeruare, prout ad præſens attinet. ibid.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Scholion. 220.
Futuræ ſubtractionis gratia. ibid.
Futuræ diuiſionis gratia. ibid.
Numeri intelligantur ſcribi ſuis ſedibus, prout analyſeos leges requirunt. ibid.
Numeroſa analyſis æquationis, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio explicatur. 221.
Æquationos analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Quando coefficiens pluribus abundat ſimplicibus figuris, quàm cubus ternis. 222.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. 223.
Aduerſe, cùm eſt cubus negatè affectus &c. 225.
Alia æquatio proponitur, in qua cubus eſt acephalus. ibid.
Aliæ æquationes ad idem. ibid.
Numeroſa Analyſis æquationis, in qua ſolidum ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio explicatur. ibid.
Proponitur æquatio anceps. ibid.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata, ad indagandam radicem minorem. 226.
Lateris minoris inquiſitio. ibid.
Analyſis cubi auulſi à ſolido ſub quadrato, ad inueniendam radicem minorem. 227.
Ad indagandam radicem maiorem. ibid.
Ad habendum latus maius, habito minori. 228.
Radix maior vt indagetur alia via. 229.
Secundus terminus indagatur. 230.
Cùm primò habetur latus maius, qua arte minus indagetur. ibid.
Quommodo ordinetur æquationis analyſis. ibid.
Scholion. 232.
Numeroſa analyſis æquationis, in qua quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido. Sectio ſecunda. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio. ibid.
Explicatur ſuperior doctrina. 233.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. ibid.
Scholion. 234.
Collocentur numeri ad eum modum, quem analyſis requirit. 235.
Aduerte quædam circa ſuperiorem reſolutionem. ibid.
Nota. ibid.
Animaduerſio. ibid.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata; cùm plano-planum maius eſt quadrato-quadrato. 236.
Numeroſa analyſis æquationis, in qua quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido. 237.
Specioſa reſolutio. ibid.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. 238.
Numeroſa analyſis æquationis, in qua plano-planum ſub latere, datoque coefficiente ſolido afficitur multa quadrato-quadrati. 240.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeroſa reſolutio. ibid.
Æquationis analyſis iuxta ſuperiorem θεωρίαν, ordinata. Ad indagandam radicem minorem. ibid.
Analyſis quadrato-quadrati auulſi à plano-plano ſub latere. Ad inueniendam radicem maiorem. 241.
Ad huiuſmodi æquationis radicem indagandam inſeruit æquatio multiplipliciter affecta, 242.
Huius æquationis explicatio difficilis. 243.
Reſoluuntur ſuperiùs poſitæ duæ æquationes, ibid.
Reſolutio æquationis prioris ſuperiùs poſitæ. ibid.
Secunda æquationis explicatio. ibid.
Ex ſuprà poſitis præceptis omnes æquationes in infinitum abeuntes explicari poſſe, omnemque aliam methodum ab ea, quæ ſuprà poſita eſt, deduci. Sectio tertia. 244.
Epilogus ſuprà dictorum. ibid.
Quæ dicta ſunt de poteſtatibus puris. ibid.
De affectis. ibid.
Proponuntur ea, de quibus eſt differendum. ibid.
Analyſis quadrati puri. 245.
Proponitur æquatio pura quadrati. ibid.
Declarantur ſuperiùs dicta. ibid.

Analyſis

Digitized by Google

Analyſis cubi puri. *ibid.*
Proponitur æquatio pura cubi. *ibid.*
Declarantur ſuperiùs dicta. *ibid.*
Analyſis quadrati affecti affirmatè ſub latere. 246.
Analyſis quadrati affecti ſub latere qua arte breuiter inſtitui poſſit. *ibid.*
Declaratio inſtituta reſolutionis. *ibid.*
Analyſis cubi affecti affirmatè ſub latere. 247.
Proponitur æquatio. *ibid.*
Declarantur ſuperiùs dicta. *ibid.*
Æquatio affecta tàm ſub latere, quàm ſub quadrato. *ibid.*
Aduerte quædam. *ibid.*
Specioſa reſolutio 248.
Numeroſa reſolutio. *ibid.*
Analyſis æquationis cubicæ dupliciter affectæ. *ibid.*
Aduertenda quædam. 250.

De æquationibus explicandis, quæ fractionum vitio laborant. Caput XVII. pag. 251.

Superioribus præceptis inſtructus Artifex, quid poſſit. *ibid.*
Plus affert moleſtiæ aſymmetria, quàm fractio numerorum. *ibid.*
Quando in æquationibus fractiones, & aſymmetria contingant. *ibid.*
Decem, & quinque exempla circa æquationes, quæ fractionum vitio laborant. *ibid.*

De æxplicandis æquationibus, quæ numeris irrationalibus ſunt implicatæ. Caput XVIII pag. 255.

Numerorum aſymmetria plurimum difficultatis affert Analyſi. *ibid.*
Multifariam numeri irrationales æquationibus admiſcentur. *ibid.*
Proponitur æquatio, cùm numeri contingunt irrationales. *ibid.*
Methodus ad huiuſmodi æquationes explicandas. *ibid.*
Methodus explicatur. *ibid.*
Expurgatio æquationis à numeris irrationalibus. 257.
Non vna eſt methodus ad æquationes explicandas. *ibid.*

Deteguntur errata Veterum, ſimulque oſtenditur, ipſorum quidem nemini benè perſpectam fuiſſe Binomij cubici naturam. Caput XIX. pag. 258.

Antiquorum error circa Binomij cubici naturam. *ibid.*
Primo exemplis; deinde demonſtrationibus oſtenditur eorum error. *ibid.*
Primus modus extrahendi cubicam radicem ex Binomio. 259.
Secundus ad idem, & eſt vniuerſalis, quando pars rationalis maior fuerit alia Binomij parte. *ibid.*
Quando pars rationalis fuerit minor. *ibid.*
Exemplo declaratur ſuperior doctrina. *ibid.*
Notanda quædam circa Binomium. *ibid.*
Quædam declarantur de Binomio cubico. *ibid.*
Concluditur dicendum in re, de qua agitur. 260.
Theorema primum. Numerus cubus diuiſibilis &c. *ibid.*
Theorema ſecundum. Differentia quadratorum vtriuſque &c. *ibid.*
Theorema tertium. Differentia nominum propoſiti &c. 261.
Theorema quartum. In Binomio cubo &c. *ibid.*
Theorema quintum. In Binomio cubo &c. 262.
Theorema ſextum. Exiſtente cubo differentia &c. *ibid.*
Theorema ſeptimum. Exiſtente cubo differentia &c. 263.
Theorema octauum. Binomio exiſtente cubo &c. *ibid.*

Qua Arte ex Binomio propoſito radix, præſertim cubica erui poſſit. Caput XX. pag. 264.

Ars, qua radicem cubicam ex Binomio poſito aliqui extrahunt. *ibid.*
Exemplum. *ibid.*
Præceptum alterum ad idem perficiendum. *ibid.*
Tria Exempla ad idem explicandum. *ibid.*
Cùm in Binomio eſt fractio. 265.
Qua Arte cognoſcatur ſine multiplicatione, Binomium aliquod eſſe alterius radicem cubicam. *ibid.*
Eruitur radix cubica ex Binomio propoſito, adhibita parte rationali. *ibid.*

Item eadem rationali parte adhibita. ibid.
Item adhibita parte irrationali. ibid.
Vnde Auctor hanc regulam, alioquin vulgatam deduxerit, & quomodo analyticè oſtendatur. ibid.
Reſolutio Binomij in ſua membra. 266.
Fit reſolutio mediante parte rationali. ibid.
Mediante parte irrationali idem perficitur. ibid.
Eruitur radix cubica ex Binomio propoſito. 267.
Qua arte cognoſcamus, Binomium vnum eſſe radicem cubicam alterius Binomij, ſine multiplicatione. ibid.
Binomij nominibus reſpondent radicis Binomia nomina. ibid.
Radicis cubica extractio ex Binomio, cuius vtrumque nomen eſt fractio. ibid.
Quadam conſideranda. 268.
Methodus ex ſuprà dictis deducta, ad extrahendam radicem ex Binomio propoſito. 269.
Ex Binomio propoſito radix eruitur. ibid.
Canon ex ſuperioribus deductus. ibid.
Extractio cubica radicis. 270.
In quo conſiſtat radicis quadrata extractio ex Binomio. ibid.
In quo conſiſtat cubica radicis extractio ex Binomio. 271.
In quo inuentio radicis quadrato-quadratica ex propoſito Binomio poſita ſit. ibid.
Sternitur via ad generalem methodum extractionis. ibid.
Non omne Binomium habet radicem cubicam. ibid.
Tria pramittenda. ibid.
Praceptum, ſiue Canon. ibid.
Quatuor pracepti partes. ibid.
Error multorum in generali methodo decernenda. 272.
Sex exempla ad id confirmandum. ibid.
Pramiſſorum demonſtratio. 273.
Principale intentum ex dictis conſtat. 274.
Quando nomen rationale eſt maius. 275.
Error multorum. ibid.
Radix quadrata ex propoſito Binomio eruitur. ibid.
Quando Binomium eſt fractionibus implicatum. ibid.
Quando pars rationalis maior fuerit parte irrationali. ibid.
Quando minor. ibid.
Quando vtraque pars eſt irrationalis. ibid.
Exemplum. ibid.
Per multiplicationem. 276.
Per diuiſionem. ibid.
Extractio radicis cubica ex Binomio propoſito. ibid.
Exemplum. ibid.
Explicatur, cur fieri debeat additio &c. ibid.
Exemplum alterum. ibid.
Explicatur, cur debeat fieri ſubtractio. ibid.
Exemplum alterum. 277.
Radix quadrato-quadrata ex propoſito Binomio. ibid.
Quo Arte cognoſcatur, cuiuſnam Binomij, propoſitum Binomium ſit radix quadrato-quadratica. 278.
Cùm Binomium diuiditur. 279.
Aliorum demonſtratio inſinuatur. ibid.
℞ Significat plus, vel minus. ibid.
Alia extrahenda radicis ratio ex ſuperioribus deducta, affertur. ibid.
Quo ſenſu intelligenda ſint ſuperiora. 280.
Notanda quadam circa ſuperius dicta. ibid.
Excuſatio. ibid.
Rerum difficilium tractatione laus comparatur. ibid.

De explicandis æquationibus Cubicis, affectis tantùm ſub latere, in quibus nimirum ſecundus terminus deeſt. Caput XXI. pag. 281.

Suprà dictorum commemoratio. ibid.
Harum aquationum Geometrica explicatio magis fieri debet. ibid.
De explicanda aquatione, in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.
Canon. ibid.
Praceptum. ibid.
Exemplum. 282.
Pracepti explicatio. ibid.
Aliter idem. ibid.
Praceptum, & eius explicatio. ibid.
Quinque exempla ad idem. ibid.
Suprà dictorum comprobatio. 283.
Hac methodus maximè Arithmetica conſentanea. 284.
Quadam adnotantur. ibid.
Specioſa reſolutio. ibid.
Numeris explicatur. ibid.
Huius methodi demonſtratio. 285.
Aſſumpti demonſtratio. 286.
Propoſitio. Si ſint quatuor quantitates &c. ibid.
Zeteticum. Data prima, & aggregato &c. ibid.
Propoſitionis probatio, ſiue demonſtratio. ibid.

*** Zeteti-

Zeteticum. Data prima è ſerie &c. 287.
Proponitur æquatio explicanda. ibid.
Supràdictorum explicatio. ibid.
Zeteticum. Data differentia cuborum &c. 288.
Zeteticum. Data differentia cuborum &c. ibid.
Lemma. Inter duos numeros datos &c. 289.
Præceptum. ibid.
Zeteticum. Data differentia extremarum &c. 290.
Propoſitio. Si fuerint quatuor quantitates &c. ibid.
Propoſitio. Cubus differentia laterum &c. ibid.
Propoſitio. Si quatuor quantitates &c. ibid.
Propoſitio. Si fuerint quatuor quantitates &c. ibid.
De explicanda æquatione, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano. Canon. 291.
Exemplum. ibid.
Quatuor alia exempla ad idem explicandum. 292.
Aliter idem æquationis genus explicatur. 294.
Propoſitio. Si ſint quatuor quantitates &c. ibid.
Zeteticum. Data prima minori &c. ibid.
Zeteticum. Data prima minori inter extremas &c. 295.
Aliter idem æquationis genus explicatur. ibid.
Septem exempla ad idem confirmandum. ibid.
Propoſitæ æquationis radix exhibetur. 297.
Zeteticum. Dato aggregato extremarum &c. 298.
Propoſitio. Si fuerint quatuor quantitates &c. ibid.
Explicatio. ibid.
Demonſtratio ſupràdictorum. ibid.
Altera demonſtratio. ibid.
Duo exempla. 299.
Quid alij hac de re ſenſerint. ibid.
Supràdictorum explicatio. ibid.
Diuiſionis prædictæ inſtitutio parum eſt, vtpote ambigua ad conſequendum, quod intenditur. 300.
Propoſitio. Si duo ſint latera &c. ibid.
Demonſtratio primi. ibid.
Demonſtratio ſecundi. ibid.
Vtiliſſima methodus ad hæc perficienda, eſt per inſcriptas circulo, atque arcuum ſubtenſas. 301.
Problema. Circulo quidem exiſtente &c. ibid.
Hæc omnia meliùs explicantur. 302.
Exemplum. ibid.
Nota quædam in Arte maximè neceſſaria. ibid.
Quid primò curandum in æquatione explicanda. ibid.
Problema. In ſemicirculo ſupra diametrum &c. 303.
Schooten de æquationum cubicarum reſolutione. ibid.
Hæc omnia numeris illuſtrantur. 304.
Cùm æquatio diuiſibilis non fuerit, vt ſuperiùs dictum eſt. ibid.
Ad explicationem ſupràdictorum proponitur æquatio explicanda. ibid.
Quo pacto propoſitæ æquationis radix explicetur. ibid.
Specioſa demonſtrantur. ibid.
Elegans explicandi ratio. 305.
Cum ſubtenſæ fuerint inter ſe æquales. ibid.
Superiora explicantur. ibid.
Carteſiana explicationis ratio pro ſupra poſita æquatione. 306.
Exemplo ſuperiora illuſtrantur. ibid.
De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano afficitur multa cubi. Canon. ibid.
Quatuor exempla ad hoc declarandum. 307.
Præceptum oſtenditur. ibid.
Sex exempla ad idem comprobandum. 308.
Problema. In circulo, cuius diameter &c. 309.
Quando Problema ſolidum eſt. 310.
Quando æquatio ad quadraticam reduci poſſit. ibid.
Quando tres illæ lineæ in circulo fuerint æquales. ibid.
Numeris eadem perficiuntur. ibid.
Quando æquatio cubica non patitur diuiſionem per R †, vel — &c. ibid.
Æquationis prima explicatio. ibid.
Secundò aliter idem perficitur. ibid.
Vieta methodus. 311.
Alia explicationis ratio. ibid.
Quid in primis curandum. ibid.
Quommodo æquationis explicatio, ſine reductione perficiatur. ibid.
Aliter idem æquationis genus explicatur. 312.
Propoſitio. Quoniam ſi ſint quatuor &c. ibid.
Zeteticum. Data prima maiori &c. ibid.
Propoſitionis demonſtratio. ibid.
Docet confugere ad arcuum partitionem. 313.
Hæc æquatio tres admittit valores. ibid.
Superiorum commemoratio. ibid.

De

De ijs, quæ ſuperiùs allata fuerunt circa Præceptorum Demonſtrationes. Cap. XXII. pag. 314.

Præceptum. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Propoſitio. Si recta fuerit vtcumque &c. 315.
Demonſtratio. ibid.
Præceptum. ibid.
Demonſtratio. 316.
Præceptum. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Cum radix minor fuerit. 317.
Demonſtratio. ibid.
Cubicarum æquationum demonſtrationes. ibid.
Præceptum. ibid.
Demonſtratio. 318.
Præceptum. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Præceptum. 319.
Explicatio. ibid.
Demonſtratio. 320.

Rurſus demonſtrantur, quæ ſuperiùs allata fuerunt. Caput XXIII. pag. 321.

Opera pretium eſt, inire quandam generalem rationem demonſtrandi præcepta æquationum explicandarum. ibid.
Præceptum. ibid.
Theorema. Sint numeri A, B &c. ibid.
Præceptum. 322.
Theorema. Sint numeri A, B &c. ibid.
Præceptum. 323.
Theorema. Sint numeri A, B &c. ibid.
Præceptum. ibid.
Theorema. Sint numeri A, B &c. 324.
Tria præmittenda, & duo explicanda. ibid.
Geometricè etiam hæc oſtendi poſſunt Vnitatis vſu. 325.
Lemma primum. Cubus differentiæ laterum &c. ibid.
Lemma ſecundum. In æquatione, in qua cubus &c. 326.
Lemma tertium. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Demonſtratur principale intentum. ibid.
Alia autem Arithmetica demonſtratio, ſic ſe habet. 327.
Theorema. Sint duo numeri A B &c. ibid.
Tria præmittenda. 328.
Lemma primum. Cubus aggregati laterum &c. ibid.
Lemma ſecundum. In æquatione, in qua cubus &c. 329.
Lemma tertium. Si fuerit æquatio, in qua &c. ibid.
Demonſtratur principale intentum. ibid.
Alia autem Arithmetica demonſtratio ſic ſe habet. 330.
Præceptum. ibid.
Suppoſitionis declaratio. ibid.
Exemplum. ibid.
Rurſus exemplo propoſitum declaratur. ibid.
Præcepti comprobatio. 331.
Quædam adnotatione digna. ibid.
Quatuor exemplis res illuſtratur. ibid.
Comprobatio adinuentæ radicis. 332.
Theorema. Si fuerit numerus A &c. ibid.
Præparatio ad demonſtrationem. 333.
Supràdictorum noua declaratio. ibid.
De æquatione tranſmutata iterum agitur. 334.
Duobus exemplis ſuperiùs tradita iterum declarantur. ibid.
Lemma. Si duo ſint numeri &c. 335.
Lemma Geometricè enunciatum. ibid.
Nota pro intelligentia characterum. ibid.
Explicatio. ibid.
Præſtat, hæc exemplis illuſtrare numerorum. 337.
Numerorum tractatio maximè ad Specioſa cognitionem conducit. ibid.
Monitum. ibid.
Secunda, & primæ partis Demonſtratio. 338.

De explicandis æquationibus, affectis ſub quadrato. Caput XXIV. pag. 339.

Opus laborioſum eſt, explicare huiuſmodi æquationes. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Præceptum. ibid.
Exempla, & explicationes. 340.
Theorema. Sit numerus A &c. ibid.
Lemma. Si fuerit Binomium &c. 341.
Reſolutio Specioſa. ibid.
Concluſio. ibid.
Demonſtratur principale intentum. ibid.
Aliјs exemplis, cum eorum explicationibus præceptum illuſtratur. 342.
Quando duplum cubi è triente coefficientis eſt maius comparationis homogeneo. ibid.
Quando duplum prædictum eſt æquale comparationis homogeneo. ibid.

*** 2 *Præce-*

Præcepta, & Exempla. 343.
Methodus hæc Arithmeticæ conſentanea. 344.
Theorema. Sint numeri A, B &c. ibid.
Aliter idem æquationis genus explicatur. ibid.
Zeteticum. Data prima minori &c. 345.
Propoſitio ſuperior oſtendenda aſſumitur. Sint quatuor continuè &c. ibid.
Explicatio. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Præcepta, & Exempla. 346.
Theorema. Sit numerus A &c. 347.
Lemma. Si fuerit reſiduum &c. ibid.
Specioſa demonſtratio. 348.
Concluſio. ibid.
Demonſtratur principale intentum. ibid.
Aliter idem æquotionis genus explicatur. ibid.
Propoſitio. Si ſint quatuor quantitates &c. ibid.
Zeteticum. Data prima, & aggregato &c. 349.
Superior propoſitio aſſumitur oſtendenda. ibid.
Explicatio. ibid.
De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi. ibid.
Præceptum. ibid.
Exemplo declaratur præceptum. ibid.
Præceptum alterum. 350.
Decem, & octo exempla, cum nonnullis obſeruationibus, ad idem præceptum explicandum. ibid.
Explicatio ſuprà dictorum. 354.
Obſeruatio. ibid.
Theorema. Sit numerus A &c. ibid.
Lemma. Si fuerit reſiduum; ita vt &c. 355.
Suprà dictorum demonſtratio. ibid.
Demonſtratur principale intentum. ibid.
Aliter idem æquationis genus explicatur. 356.
Propoſitio. Si ſint quatuor quantitates &c. ibid.
Zeteticum. Data prima maiori &c. ibid.
Demonſtratio ſuperioris propoſitionis. ibid.
Explicatio, & ſupradictorum collectio. ibid.
Scholion. 357.
Suprà dictorum commemoratio. ibid.
Aduerte nonnulla circa ſuperiores demonſtrationes. ibid.
Iuuat maximè Analyſtam ſe exercere in numeris tractandis. ibid.

De æquationibus Cubicis explicandis, in quibus omnes termini extant. Caput XXV. pag. 358.

Tractandorum argumentum. ibid.
Duplex via ad has explicandas æquationes. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur tàm adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, quàm adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Præceptum ibid.
Præceptum vniuerſim enunciatum. ibid.
Duo exempla ad idem præceptum illuſtrandum. 359.
Scholion. 360.
Docet, quo ſenſu intelligendum ſit præceptum ſuprà poſitum, ſimulque vniuerſale præceptum inſinuatur. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur abiunctione tàm ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, quàm ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Adnotatio. 361.
Exempla cum eorum explicationibus. ibid.
De explicanda æquatione, in qua de ſolido ſub latere, & coefficiente plano, addito ad ſolidum ſub lateris quadrato, & coefficiente longitudine, negatur cubus. 362.
Supradictorum comprobatio. 364.
Epilogiſmus vniuerſi præcepti. ibid.
Peculiaris methodus ad eadem præſtanda traditur, ac aperitur. ibid.
Cardani propoſitum. ibid.
Eiuſdem Regulæ ſeptem. 365.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur tàm adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, quàm adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. 367.
Præceptum. ibid.
Quatuor exemplis præceptum illuſtratur. ibid.
Theorema. Sit numerus A &c. 368.
Lemma. Si fuerit Binomium &c. 369.
Theorematis demonſtratio. 370.
Scholion. ibid.
Ex ſuprà demonſtratis quiſque intelliget, quo pacto, quæ ſequuntur oſtendi

di poſſint. ibid.
Nota circa prædicta. ibid.
Exemplum poſitum vlteriùs Auctor proſequitur. ibid.
Obſeruatio. 371.
Duo exempla ad ſuprà dictorum maiorem declarationem. ibid.
Obſeruatio. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, & adiunctione ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Præceptum. ibid.
Exemplis præceptum explicatur. ibid.
Præceptum ſuprà poſitum oſtendi poteſt imitatione ſuperioris. 372.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, & multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. 373.
Præceptum. ibid.
Nouem exemplis, & quibuſdam obſeruandis idem præceptum illuſtratur. ibid.
De explicanda æquatione, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, itemque multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine. 375.
Præceptum. ibid.
Exemplis declaratur. ibid.
De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub latere, datoque coefficiente plano, afficitur multa ſolidi ſub lateris quadrato, dataque coefficiente longitudine; itemque multa cubi. 376.
Præceptum. ibid.
Exemplo præceptum explicatur. ibid.
De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, & præterea multa cubi. 377.
Præceptum. ibid.
Quatuor exempla ad idem. ibid.
De explicanda æquatione, in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente; itemque multa cubi. 378.
Præceptum. ibid.
Exemplum ad idem comprobandum. ibid.

Proponuntur cætera, quibus inſtructus Analyſta, difficultates implicatiores in æquationibus explicandis facilè de medio tollit. Caput XXVI. pag. 380.

Nonnulla ſuperſunt ad æquationum explicationem. ibid.
Obſeruanda quædam. ibid.
Exempla, & eorum explicationes. ibid.
Quando homogeneum comparationis fuerit in ſoliditate irrationale. 381.
Exemplum ad æquationem quadrato-quadraticam. ibid.
Quando homogeneum comparationis eſt in ſua plano-planitie irrationale, facultate tamen rationale. ibid.
Præceptum in quatuor partes diſtributum. ibid.
Exemplum de æquatione quadratica. ibid.
Explicatio propoſiti. 382.
Exemplum alterum, & eius explicatio. ibid.
Obſeruatio. ibid.
Demonſtratio Geometrica, quantum ad quadraticas æquationes. ibid.
Theorema. Si fuerit numerus &c. 383.
Sex exempla ad cubicas æquationes attinentia. ibid.
Theorema. Si fuerit numerus, cuius &c. 384.
Explicantur æquationes quadrato-quadratica. 385.
Cum æquatio eſt, in qua quadrato-quadratum afficitur ſub quadrato, & cubo. ibid.
Rurſus explicatur. ibid.
Cum in huiuſmodi æquationibus irrationales numeri intercesſerint. 386.
Climacticus deſcenſus, eſt idem, quod ſcalaris. ibid.
Præceptum. ibid.
Exemplis res illuſtratur. ibid.
Suprà dictorum vberior explicatio. 387.
Animaduerſio. ibid.
Cum affectio eſt ſub quadrato. ibid.
Theorema. Si b a — a &c. ibid.
Numeris eadem explicantur. ibid.
Recentiorum methodo idem abſoluitur. ibid.
Animaduerſio. ibid.
Cum æquatio fuerit quadrato-cubica, & affectio ſub latere. 388.
Exemplum. ibid.
Numeris idem tractatur. ibid.
Cum proponitur æquatio inuerſa negationis, fit æquatio negationis directæ. ibid.

Quom-

Quommodo hæc pragmatia inſtituatur. ibid.
Illa æquatio deprimi poteſt ad quadraticam per medium cubicarum. 389.
Quid agendum, tractatur. ibid.
Numeris idem tractatur. ibid.
Explicatio. ibid.
Alia ſuperſunt tractanda. ibid.
Cubus affectus ſub latere affirmatè ad quadratum, radicem habens ſolidam, idemque affectum, reducitur. ibid.
Exemplum. 390.
Auctor ſe copioſius acturum alibi pollicetur. ibid.
Quando cubus eſt affectus ſub latere negatè. ibid.
Exemplum. ibid.

Affectæ multipliciter, quæ ſunt æquationes explicantur. Cap. XXVII. pag. 391.

Explicatio æquationum multiplicis affectionis arduum eſt opus. ibid.
Recenſentur ea, de quibus futurus eſt ſermo. ibid.
Interpunctionis Analyticæ ratio magnum in Arte momentum habet. ibid.
Duplex reſolutionis ratio. ibid.
Paradigma analyſeos quadrato-quadrati affecti tàm ſub latere, quàm quadrato. 392.
Paradigma analyſeos quadrato quadrati dupliciter affecti, ſub latere per affirmationem, & cubo per negationem. 394.
Paradigma analyſeos quadrato-quadrati dupliciter affecti, ſub cubo per affirmationem, & latere per negationem. 396.
Ad ſequentia duo Paradigmata. Hæc ſunt præmittenda. 398.
Præparatio Specioſa. ibid.
Ad indagandum ſingulare latus ſecundum, quo pacto ſit inueſtigandus diuiſor. ibid.
Diuiſores in vnum colligendi, vt inſtitui diuiſio poſſit, ad indagandum ſingulare latus ſecundum. ibid.
Paradigma analyſeos Quadrato quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris. 399.
Paradigma item aliud analyſeos Quadrato-quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris. 400.
Epilogiſmus. 401.
Scholion. ibid.
Methodorum demonſtrationes prætermittuntur, quas animaduerſione ſyntheſeos quiſque facilè poteſt conijcere. ibid.
Notanda quædam. ibid.
Iterum aſſumitur opus aduerſus nimiam affectionem, quàm Græci, polipathian appellant. ibid.
Proponitur explicanda quædam æquatio. 402.
Tollendus eſt ſecundus æquationis terminus. ibid.
Vſus Signorum †, & —, *ſæpe vexat Artificem.* ibid.
Æquatio per diuiſionem ad duas dimenſiones redacta, vulgaribus præceptis explicatur. ibid.
Præparationis continuatio ad æquationis propoſitæ explicationem. 403.
Obſeruanda quædam circa notas †, & —. ibid.
Obſeruanda iterum circa ſigna †, & —. ibid.
Diligenter obſerua. ibid.
Radicis quæſita exhibitio. ibid.
Explicatur æquatio, quæ iam ſuprà habita eſt. Pagina 388. 404.
Reductio æquationum quatuor dimenſionum. ibid.
Tollendus eſt ſecundus æquationis terminus. 405.
Proponitur æquatio explicanda. ibid.
Radix æquationis propoſitæ. ibid.
Diuina huius Artis myſteria. ibid.
Quando æquatio quadrato-quadratica ad æquationem trium dimenſionum reuocata fuerit. ibid.
Quædam obſeruatu digna. ibid.
Æquatio trium dimenſionum explicatur. 406.
Explicatur diuiſio æquationis per Binomium ex ignota, notaque quantitate, ad æquationis radicem indagandam. ibid.
Pragmatia diuiſionis. ibid.
Nota, quando in hac pragmatia ſint adhibenda ſigna †, & —. ibid.
Quotiens exhibitus. ibid.
Elicitur radix ſuperioris æquationis transformatæ in æquationem duarum dimenſionum. 407.
Suprà dictorum confirmatio. ibid.
Contingit hic radicem æquationis duarum dimenſionum, eandem eſſe cum quantitate cognita faciente Binomium. ibid.
Elicitur affectæ poteſtatis radix. ibid.
Eruitur æquationis per diuiſionem habita radix. ibid.

Cum

Cum æquatio fuerit quatuor dimenſionum. ibid.
Duæ proponuntur explicandæ æquationes. ibid.
Varia, & multiplex diuiſio penes diuiſorem quoad †, & —. 408.
Dignitas argumenti exigit, vt vlteriùs Analyſta proſequatur. ibid.
Superiorum explicatio. ibid.
Animaduerſio circa ſigna †, & —. ibid.
Elicitur æquationis radix. 409.
Proponitur alia æquatio quadrato-quadratica. ibid.
Nota diligenter. ibid.
Explicatur natura ſuprà poſitarum æquationum. ibid.
Transmutatur ſuperior æquatio quadrato-quadratica in illam, quæ trium eſt dimenſionum. ibid.
Elicitur ſuperioris æquationis quadrato-quadraticæ radix. 410.
Plerumque contingit, commemoratas æquationes per Binomium diuidi non poſſe. ibid.
Æquationes, quæ per Binomium diuidi non poſſunt, proficiunt Geometræ. ibid.
Arithmeticus nihil inde lucratur. ibid.
Quorundam defectus. ibid.
Pro eligendis diuiſoribus. ibid.
Declaratur tradita doctrina de explicandis æquationibus cubicis per ſubtendentes arcuum circuli, cum fuerit æquatio negatiua directè. 411.
Traditur doctrina eadem de æquatione cubica negatiua inuersè. ibid.
Superiora exemplis illuſtrantur ad maiorem explicationem. ibid.
Notanda quædam. ibid.
Quando cubus è triente numeri radicum minor eſt quadrato à dimidio termini vltimi. 412.
Cum cubus è triente &c. æqualis eſt quadrato à dimidio termini vltimi. ibid.
Proponitur æquatio, & extrahitur radix. ibid.
Superior æquatio nequit per ſubtenſas explicari. ibid.
Idem oſtenditur, cum ſemidiameter eſt numerus rationalis. ibid.
Proponitur alia æquatio, in qua ſemidiameter &c. eſt numerus rationalis. ibid.
Quando cubus è triente numeri radicum maior eſt quadrato à dimidio numeri abſoluti &c. ibid.
Methodo per ſubtenſas arcuum explicantur huiuſmodi æquationes. ibid.
Cum cubus è triente &c. minor eſt quadrato à dimidio. ibid.
Quando cubus è triente penultimi termini fuerit æqualis quadrato à dimidio vltimi. 413.
Proponitur æquatio, & explicatur. ibid.
Per ſubtenſas arcuum huiuſmodi æquationes poſſunt etiam explicari. ibid.
Notanda quædam, vnde maximè innoteſcit harum explicandarum æquationum ratio. ibid.
Præceptum pro efformandis æquationibus, in quibus &c. ibid.
Tria exempla ad hoc præceptum explicandum. ibid.
Theorema. Si fuerit numerus quiſpiam &c. ibid.
Theorema ſtudioſo Lectori demonſtrandum relinquitur. 414.
Epilogiſmus præcepti de explicanda radice quadrato-quadratica. ibid.
Quando æquatio trium dimenſionum non patitur diuiſionem per Binomium ex incognita, & cognita quantitate. ibid.
Quid ſit radix vera, quid falſa &c. ibid.
Declaratur, quid ſit radix vera, quid falſa exemplis ad id idoneis. ibid.
Aduerte nonnulla. 415.
Quommodo radices omnes falſæ, euadant veræ. ibid.
Proponitur æquatio quadrato-quadratica, quæ per ablationem ſecundi termini, deſtituitur vltimo. ibid.
Quando id contingat. ibid.
Duo exempla ad idem. ibid.
Vera exhibetur radix. ibid.

De Analytica Interpunctione. Caput. XXVIII. pag. 416.

Magni refert Analyſtam nouiſſe rationem interpunctionis Analyticæ. ibid.
Proponitur inquirenda interpunctio quadrati puri. ibid.
Exemplum affertur. ibid.
Explicantur ſuperiùs dicta. ibid.
Notantur ſedes, in quibus ſingulariæ cadunt quadrata, & plana ſub lateribus. ibid.
Ad Analyſin quadrati puri, interpunctionis ratio explicata. 417.
Geometricè oſtenditur intentum. 418.
Puri Quadrati Analyſis. ibid.
Analyſis quadrati affecti adiunctione plani

plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine. ibid.
Puri cubi interpunctionis ratio explicatur. ibid.
Analyſeos explicatio. ibid.
Ratio figurarum notandarum. 419.
Numerorum diſpoſitio declarat, quod intenditur. ibid.
Sufficit, explicaſſe interpunctionem puri quadrati, purique cubi; etenim Analyſta edoctus ijs, quæ ſuperiùs allata fuerunt, cognoſcet, & aſſequetur, quæ deinceps tractanda forent. ibid.
Reſolutio poteſtatis in ſua, quibus conſtat, membra. ibid.
Ad Analyſin Cubi puri, interpunctionis ratio explicata. 420.
De Poteſtatibus affectis, earumque legibus. 421.
Quid poteſtas affecta ſuperaddat puræ. ibid.
Quommodo ſe habeat quadratum affectum. ibid.
Magnopere iuuat Analyſtam, hæc addiſcere. ibid.
In quo præſertim Ars Analytica poſita ſit. ibid.
Nota. ibid.
Ad Analyſin Quadrati affecti, interpunctionis ratio explicata. 422.
Aduerte quædam circa ſedem coefficientis magnitudinis. 423.
De cubo affecto ſub latere, & eius Analyſis. ibid.
Ad Analyſin Cubi affecti, interpunctionis ratio explicata. 424.
Notanda quædam pro ſede coefficientium magnitudinum. 425.
De Cubo affecto ſub quadrato. ibid.
Ad Analyſin Cubi affecti ſub quadrato, interpunctionis ratio explicata. 426.
Nota quædam circa coefficientes, earumque ſedes. 427.
De Cubo bifariam affecto. ibid.
Ad Analyſin Cubi affirmatè affecti ſub latere, negatè autem ſub quadrato, interpunctionis ratio explicata. 428.
Nonnulla notatu digna afferuntur. 430.
Ad ſedes coefficientium quod ſpectat. ibid.
Aduertenda quædam circa cifras ſupra lineolam. ibid.
Diligenter eſt aduertendum, quo pacto ſit procedendum, cùm irrationales numeri intercesserint. ibid.
Idem ex Veterum Doctrina. ibid.
Alio exemplo ſuperior illuſtratur doctrina. ibid.
Eadem æquatio Veterum præceptis explicatur. 431.
Specioſæ artificio inquiritur latus æquationis, intercedentibus numeris irrationalibus. ibid.
Exemplum æquationis, cuius radix Binomium eſt, ſiue quantitas duobus nominibus conſtans. ibid.
Methodus ad huiuſmodi æquationes explicandas, in quibus nimirum irrationales numeri intercedunt, cognitu difficilis eſt. ibid.
Hæc methodus generalis eſt ad quoduis æquationis genus. ibid.

Algorithmus Signorum †, & —, denuo perpenditur, & hac de re multa tractantur in ſupràdictorum gratiam, nouæque demonſtrationes contexuntur. Caput XXIX. pag. 432.

Dicendorum propoſitio. Si duo ſint numeri inæquales &c. ibid.
Notanda quædam. ibid.
Quo pacto ſupràdicta propoſitio intelligi debeat. 433.
Explicatio vlterior. ibid.
Exemplis declarantur ſupràdicta. ibid.
Epilogiſmus ſupràdictorum. ibid.
Bonauentura, Cauallerius Mediolanenſis laudatur; & Ioannes Antonius Rocca Regienſis commendatur, eiuſque virtutes laudibus efferuntur. ibid.
Algorithmus Signorum †, & —. 434.
Decem Suppoſitiones. ibid.
Additionis †, ad †, Demonſtratio. Theorema peimum. 435.
Additionis —, ad —. Theorema ſecundum. ibid.
Additionis †, ad —. Theorema tertium. 436.
Additionis —, ad †. Theorema quartum. 437.
Prædictorum Signorum Subtractio. 438.
Subtractionis †, à †, Demonſtratio. Theorema primum. ibid.
Subtractionis —, à —. Theorema ſecundum. 439.
Subtractionis †, à —. Theorema tertium. 441.
Subtractionis —, à †. Theorema quartum. 442.
Eorundem Signorum multiplicatio. 443.
Multiplicationis †, in †, Demonſtratio. Theorema primum. ibid.
Multiplicationis —, in —. Theorema

ma

ma ſecundum. 444.
Multiplicationis †, in —. Theorema tertium. ibid.
Multiplicationis —, in †. Theorema quartum. 445.
Prædictorum Signorum Diuiſio. ibid.
Nihil de Diuiſione dicendum ſupereſt, & quare. ibid.
Exercitatio, atque vſus ad facilitatem comparandam requiritur. ibid.
Non eſt huius loci de duplici habitu, nempe vtente, docenteque differere. ibid.

De ijs, quæ multùm ad ænigmata reſoluenda conducunt. Cap.XXX. pag.446.

Poſitio maximè ad reſoluenda Problemata conducit. ibid.
Viginti quinque Regulæ, ad ipſam poſitionem inſtituendam conducentes, quas vnuſquiſque poterit illas explicare, imò & demonſtrare. ibid.
Plutarchi dictum. 452.

Varia Exemplorum genera proponuntur, ad Artem Analyticam illuſtrandam. Caput XXXI. pag. 453.

Primum Exemplorum Genus. ibid.
Problema I. Numerum inuenire, cui ſi addantur 10, & ab eodem auferantur 20, ſumma ad reſiduum habeat rationem, vt 2, ad 1. ibid.
Problema II. Reperire numeros duos inæquales, quorum differentia ſit 10, ea tamen lege, vt ſi minor ducatur in 2, & producto addantur 5, maior autem in 3, & producto addantur 6, fiat maior duplus minoris. 454.
Problema III. Numerum reperire, ex cuius $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ſi tollantur 60, remaneant 80. ibid.
Problema IV. Numerum reperire, qui additus numero 60, faciat 130. ibid.
Problema V. Numerum inuenire, ex cuius $\frac{1}{3}$, ſi ſubtrahantur 15, reſiduum ducatur in 3, proueniat 70. 455.
Problema VI. Propoſiti ſint duo numeri 30, & 40; ſintq; reperiendi duo alij in ratione quadrupla, vt ſi minor addatur ad 30, & maior ad 40, numeri conflati rationem habeant triplam. ibid.
Problema VII. Numerum reperire, ex quo ſi tollantur 6, & reſiduo $\frac{1}{3}$, addantur, ſumma verò hæc ducatur in 3, & rurſus ex producto tollantur 24, remaneant 60. ibid.
Problema VIII. Numerum reperire, cui ſi addantur 10, & ex eodem auferantur 14, & ex conflati, reſiduique ſumma tollatur ipſe numerus, atque reſiduo addantur 4, fiant 35. ibid.
Problema IX. Duos numeros reperire, quorum differentia ſit 36, ea lege, vt ſi quartam partem ſummæ illorum ducam in 2, ex producto verò tollam 18, remaneat 10. 456.
Scholion. ibid.
Secundum Exemplorum Genus. ibid.
Problema I. Propoſitum numerum in duas partes diuidere, quarum data ſit differentia. ibid.
Problema II. Propoſitum numerum in duas partes diuidere, vt quædam determinatæ partes maioris, æquales ſint parti minori, aſſumpto aliquo determinato numero. ibid.
Problema III. Propoſitum numerum in duas partiri in data ratione. 457.
Problema IV. Numeros reperire, qui ſint in proportione vt 5, ad 7, & ſi multiplicetur minor per 4, maior per 3, numeri producti ſimul additi faciant 123. ibid.
Problema V. Propoſitum numerum in duos partiri in data ratione, dataque differentia. ibid.
Canon. 458.
Problema VI. Duos numeros reperire, qui, & datam rationem, & datum ferunt interuallum. ibid.
Canon. ibid.
Problema VII. Propoſitum numerum in duos numeros diuidere, vt horum vtriuſque, non tamen eadem datæ partes, ſi coniungantur, datum numerum conficiant. Oportet autem talem hunc dari, qui ſit in medio duorum numerorum, qui fiunt, ſi numeri ab initio propoſiti præſcriptæ partes accipiantur. ibid.
Problema VIII. Propoſitum numerum in duos numeros partiri, vt prioris data pars, poſterioris datam partem, ſuperet dato numero. Hunc autem minorem eſſe oportet eo, qui ſit, ſi propoſiti ab initio numeri pars illa capiatur, qua alteram excedat. 459.
Canon. 460.
Problema IX. Ab eodem numero duos

datos numeros anferre, vt reſidui datam rationem ſeruent. ibid.
Canon. ibid.
Canon alter. 461.
Problema X. Duobus datis numeris, eundem adijcere numerum, vt compoſiti ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem rationem datam minorem ea eſſe, quam habet maior datorum numerorum ad minorem. ibid.
Problema XI. Propoſitum numerum quadratum in duos numeros quadratos diuidere ibid.
Canon. 462.
Problema XII. Duos numeros quadratos reperire in dato interuallo. ibid.
Canon. ibid.
Tertium Genus Exemplorum. 463.
Problema I. Datum numerum in duas partes diuidere, vt earum quadrata ſimul iuncta determinatum numerum efficiant. ibid.
Problema II. Duos numeros reperire, quorum quadrata dato interuallo differant, & inuicem multiplicata producant determinatum numerum. ibid.
Problema III. Duos numeros reperire, quorum differentia ſit data, qui, & inter ſe ducti faciant determinatum numerum. 464.
Problema IV. Propoſitum numerum in duas partes diuidere, ea lege, vt inter ſe ducta, progignant datum numerum. ibid.
Problema V. Numerum reperire, qui auctus dato quodam numero, & diminutus, ſeu mulcatus iisdem alio quodam numero, aggregatum, & reſiduum inuicem multiplicata, producant determinatum numerum. ibid.
Problema VI. Propoſitum numerum in duos diuidere, vt eorum quadrata ad inuicem multiplicata, producant determinatum numerum. 465.
Problema VII. Propoſitum numerum, in quatuor partes diuidere in ratione continua, vt quadrata ſingularum ſimul iuncta, conficiant determinatum numerum. 467.
Problema VIII. Datum numerum diuidere in duas partes, ea lege, vt differentia quadratorum partium, habeat datam rationem ad rectangulum factum, ſeu comprehenſum ſub ipſis partibus. 471.
Problema IX. Reperire numerum, cuius quadratum multiplicatum per 3, productoque additis 80, ex ſumma vero radix cubica extracta ſeruetur; huic ſi addatur ſextuplum numeri inueniendi, faciat 80. 472.
Præmittenda quadam ad Paradigma. 474.
Theoria Speciosa in gratiam æquationis ibi propoſitæ. ibid.
Problema X. Quatuor numeros reperire in continua ratione, vt primus ſit 8, ſecundus ſit cum quarto 39, ſeu conficiat ſecundus iunctus quarto 39; quæruntur ſinguli. 478.
Productum ex duplo primæ figuræ in numerum quadratorum, dicitur planum expletionis. ibid.
Methodus indagandi diuiſorem. 479.
Theoria ſuperioris æquationis. ibid.
Problema XI. Numerum reperire, cuius cubo ducto in datum numerum, & à producto ſubtracto eodem numero quæſito, multiplicato itidem per datum aliquem numerum, remaneat determinatus numerus. ibid.
Problema XII. Propoſitum numerum in duas partes diuidere, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuiſum per partium differentiam, reddat datumnumerum. 480.
Quartum Exemplorum Genus. 481.
Problema I. Tres numeros reperire, quorum primus cum 68, duplus ſit ſecundi, & tertij. Secundus cum 92, triplus ſit primi, & tertij. Tertius autem cum 88, ſit quadruplus primi, & ſecundi. ibid.
Problema II. Duos numeros reperire, ita vt ſi primus ſumpſerit $\frac{1}{3}$, à ſecundo, fiant 220; ſecundus ſi acceperit $\frac{1}{4}$, à primo, fiant 220. 482.
Scholion. ibid.
Problema III. Tres numeros reperire, vt primus accipiens $\frac{1}{3}$, à ſecundo faciat 100; ſecundus accipiens $\frac{1}{4}$, à tertio, faciat 100, tertius demq; accipiens $\frac{1}{5}$, à primo, faciat itidem 100, quæruntur ſinguli. 483.
Problema IV. Tres numeros reperire arithmeticè proportionales, ita vt primo ducto in 1, ſecundo in 2, tertio in 3, fiant 36, ipſorum autem quadrata ſimul addita, faciant 93. ibid.
Problema V. Tres numeros reperire, ita vt quadratum primi additum plano ſub primo in ſecundum, efficiat

ciat 12, idem autem quadratum ſubtractum ex plano ſub primo in tertium, relinquat 8; inſuper quadratum primi plus quadrato tertij ad quadratum ſecundi, rationem habeat, vt 5, ad 8. 484.

Problema VI. Duos numeros reperire, quorum ſumma erit 100, ita vt ſi vnus per alium diuidatur, fiat quotiens $2\frac{1}{3}$. 485.

Scholion. ibid.

Problema VII. Duos numeros reperire, quorum quadrata ſimul addita faciant 100, ipſi verò numeri inter ſe ducti faciant [illegible], quadrati maioris; quæruntur ipſi numeri. ibid.

Quintum Exemplorum Genus. 486.

Problema I. Eſt rectangulum quoddam, cuius latera ſunt in proportione data, & data quoque eſt proportio, quam habet ſumma quadratorum ex yſdem lateribus ad ſummam eorundem laterum. Oportet reperire rectangulum. ibid.

Problema II. Eſt rectangulum, cuius latus maius eſt duplum minoris, minus quatuor vnitatibus; area verò eſt 96; quæruntur latera. ibid.

Problema III. Eſt rectangulum, cuius area eſt 48, diameter autem eſt 10. Quæruntur latera. ibid.

Problema IV. Eſt rectangulum, cuius area eſt 60, & laterum aggregatum eſt 17. Quæruntur latera. 487.

Problema V. Eſt rectangulum, cuius latus vnum eſt 9, productum autem ex altero latere in diametrum eſt 180. Quæritur latus alterum, diameter, ac area. ibid.

Problema VI. Eſt rectangulum, cuius area cum diametro facit 58, & laterum differentia eſt 2. Quæruntur latera, diameter, & area. 488.

Problema VII. Eſt quadratum, cuius diameter cum latere facit 4; quæruntur latera. ibid.

Problema VIII. Eſt figura A B C D, in qua ſcimus A B, eſſe 8, & B C, 20, item C D, 2; ſcimus etiam productum ex A B, in B E, æquale eſſe producto ex E C, in C D, ſunt autem anguli A B C, B C D, recti; quæritur B E, & E C, inſuper A E, & E D. ibid.

Problema IX. Eſt figura A B C D, in qua nota eſt A B, 8, B C, 20, item C D, 2; notum eſt etiam A E, æqualem eſſe ipſi E D; quæro, quanta ſit B E, quanta E C, quanta A E, demum quanta E D, ſuppoſitis angulis A B C, B C D, rectis. Oportet autem &c. 489.

Problema X. Eſt triangulum A B C, rectangulum, in quo ſcimus quadrata ex A C, A B, A D, ſimul iuncta, conficere 84, & ſi 40, diuidatur per ſingula, quotientibuſque multiplicatis, nimirum ducto primo, in ſecundum, & producto ducto in tertium, proueniat 1000; quæruntur latera. ibid.

Problema XI. Eſt triangulum rectangulum, in quo notum eſt ſegmentum minus baſis [illegible], itemque nota eſt differentia, qua baſis ſuperat latus conterminum, cum illo ſegmento, nempe 6. Oportet reperire quantitatem baſis &c. 490.

Problema XII. Eſt triangulum A B C, in quo nota ſunt latera A C, 14, A B, 13, B C, 15, eſt autem punctum D, vel extra, vel intra; iniunctum ſit cognoſcere, quanta ſit A D, quanta D B, quanta demum D C: ſi ad quadratum ex A D, addatur 100, ad quadratum ex D B, addatur 36, ad quadratum ex D C, addatur 64; hac nimirum additione facta, omnia ſint inter ſe æqualia. ibid.

Problema XIII. Eſt figura A B E C, in qua nota ſunt A B, 26, A C, 8, B E, 15, anguli C A B, A B E, ſunt recti; oportet cognoſcere, quanta ſit C D, & D E, cognita ratione ipſius C D, ad D E, nimirum vt 2, ad 5. 491.

Scholion. ibid.

Problema XIV. Datum ſit rectangulum A B F E, conſtet autem latus vnum ipſius, nimirum maius, quale eſt E F, eſſe 10; at verò F P, latus minus eſſe 6, in eoque deſcriptum ſit parallelogrammum rectangulum C G H D, quod ſit quarta pars totius A E F B; adeo vt A C G E, G E F H, H F B D, & C G H D, ſint æqualia, quorum vnumquodque eſt quarta pars totius A E F B; quæritur quanta ſit G H, & quanta H D. 492.

Aliter idem perficitur. 497.

Aliter idem abſoluitur. 498.

Scholion. 499.

Aliter inſtituitur reſolutio. ibid.

Admonitio. ibid.
Problema XV. Data baſe trianguli, datis etiam exceſſibus, quibus crura ſuperant perpendicularem ipſius; oportet reperire trianguli latera, & perpendicularem. 500.
Problema XVI. Propoſitum ſit quadratum A B C D, cuius latus ſit 2, ſitque protractum latus C D; ita vt ſi à puncto A, ducatur recta, quæ occurrat ipſi C D, in E, protracta, triangulum efformet F D E, æquale quadrato iam dicto. Quæritur quanta ſit A E, quanta A F. 502.
Problema XVII. Eſt triangulum, cuius anguli ad baſin, dupli ſunt anguli ad verticem, eiuſque ſuperficies eſt 10; quæruntur latera. 503.
Scholion. 504.
Problema XVIII. Data ſumma laterum alicuius trianguli, dataque ratione ſummæ quadratorum à lateribus ad eiuſdem trianguli ſuperficiem; reperire latera. ibid.
Problema XIX. Data baſe trianguli, dataque ratione ſummæ quadratorum à lateribus ad ſuperficiem trianguli; reperire latera. 508.
Problema XX. Cognitis lateribus alicuius trianguli, latus in eo inſcriptibilis quadrati cognoſcere. 509.
Problema XXI. Triangulum reperire æquale dato triangulo, eiuſdem ambitus, ſiue perimetri, & eiuſdem altitudinis; ita tamen vt perimetrum ad perimetrum habeat datam rationem. ibid.
Scholion. 510.
Lemma I. Quadratum aggregati cuborum æquale eſt quadrato differentiæ eorundem, plus quadruplo cubo rectanguli ſub lateribus. ibid.
Lemma II. Cubus aggregati laterum, minus triplo ſolido ſub aggregato laterum, in rectangulum ſub lateribus, eſt æqualis aggregato cuborum à lateribus. 511.
Problema XXII. Eſt notum rectangulum ſub lateribus, & aggregatum cuborum; quæruntur latera. ibid.
Scholion. ibid.
Lemma. Cubus differentiæ laterum, plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, eſt æqualis differentiæ cuborum à lateribus. 512.
Problema XXIII. Dato rectangulo ſub lateribus, cuborumque differentia; reperire latera. ibid.
Problema XXIV. Eſt triangulum, cuius baſis eſt nota, & nota eſt ſumma laterum; eſt etiam nota proportio quadratorum à lateribus; quæruntur latera. ibid.
Problema XXV. Eſt triangulum, cuius perimetrum eſt notum, eſt etiam nota proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus ad ſuperficiem trianguli; iniunctum ſit reperire latera. 513.
Problema XXVI. Eſt triangulum, cuius perimetrum eſt notum, item nota eſt proportio, quam habet rectangulum ſub cruribus ad ſuperficiem trianguli; quæruntur latera, ſuppoſita notitia baſeos. ibid.
Problema XXVII. Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis eſt nota; eſt etiam nota proportio, quam habet exceſſus quadratorum à cruribus ſupra quadrata ſegmentorum baſeos, ad differentiam quadratorum ſegmentorum eiuſdem. Iniunctum ſit reperire latera. 515.
Problema XXVIII. Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis eſt nota; eſt etiam nota proportio, quam habet productum ab exceſſu quadratorum è cruribus ſuprà quadrata ſegmentorum baſeos, in differentiam quadratorum ſegmentorum ipſius baſeos, ad differentiam quadratorum eorundem ſegmentorum; quæruntur latera. ibid.
Scholion. 516.
Problema XXIX. Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis eſt nota, item eſt nota proportio, quam habet rectangulum ſub cruribus, ad rectangulum ſub ſegmentis baſeos; quæruntur latera. 519.
Problema XXX. Eſt triangulum, cuius latera ſimul ſumpta, conficiunt 18, at vero ſolida, quæ continentur ſub ſingulis lateribus, & rectangulo ſub lateribus, ſunt 64, & 512; quæruntur latera. ibid.
Scholion. ibid.
Iſmaelis Bullialdus commendatur. 520.
Problema XXXI. Auctori propoſitum reſoluendum, cùm à nemine reſolutum fuiſſet. Datis baſe, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno

vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex altero latere, & perpendiculo; reperire triangulum. ibid.

Sextum Exemplorum Genus. 526.

Problema I. Quod cùm plurimis propoſitum fuiſſet, à nemine reſolutum fuit, cui tamen Auctor ſatisfacit. Duo mercatores ſocietatem inierunt, hac tamen cautione, vt quiſque lucretur iuxta poſitam à ſe pecuniæ quantitatem. Primus autem poſuit neſcio quid, & permanſit in ſupradicta ſocietate per ſpatium 12, menſium; Secundus verò poſuit aureos 30, & permanſit in ſocietate per ſpatium 17, menſium; repererunt denique lucrum totum eſſe 18 $\frac{1}{6}$, aureos; primus verò pro lucro, & pecunia poſita habuit 26, aureos; quæritur, quantum poſuerit primus. ibid.

Scholion. ibid.

Problema II. Tres ſunt Mercatores ſocietatem ineuntes. Primus autem imponit 40, aureos ampliùs, quàm ſecundus. Secundus verò, ac tertius ſimul impoſuerunt 100, aureos; lucrati ſunt omnes ſimul 80, aureos; ex ipſis verò tertius pro ſuo lucro, ſeu pro lucri parte habuit 20. Quæritur, quantum quiſque impoſuerit, & quantum quiſque lucratus fuerit. 527.

Problema III. Duo ſunt Peregrini proficiſcentes eadem die à duabus Ciuitatibus, inter quas 300, milliaria intercipiuntur, alter verſus alterum. Notum eſt autem vnum conficere 30, milliaria quolibet die, alterum verò milliaria 20; quæritur, quando ſibi mutuò occurrent, atque conuenient. ibid.

Problema IV. Eſt quidam mercator, qui vendidit 50, libras, partim Sacchari, & partim Cinamomi aureis 130, at verò Sacchari libram vendidit tribus denarijs, ſed Cinamomi libram denarijs duobus. Quæritur, quot vendiderit libras Sacchari, & quot Cinamomi. 528.

Problema V. Decem mercatores cuidam creditori, hoc modo pecuniam debent. Nouem excluſo primo debent 545. Deinde &c. Quæritur totius debiti ſumma, & ſingulorum. ibid.

Problema VI. Quidam moriens, teſtamentum condidit, & reliquit 9000, aureos, diſtribuendos inter Vxorem, Filium, & tres Filias, hac conditione, vt portio Filij ſit quadrupla portionis Matris, & portio Matris ſit tripla portionis vnius Filiæ; quæritur, quanta ſit vniuſcuiuſque portio. 530.

Problema VII. Pintæ 30, Vini Rubri, vnà cum 5 pintis Vini Albi, conſtant aureis 100, atque eodem pretio 15 pintæ Vini Rubri, cum 5 pintis Vini Albi conſtant aureis 55; quæritur pretium vnius pintæ. ibid.

Problema VIII. Eſt Mercator, qui in quatuor Nundinis, eandem aureorum ſummam exponens, lucratus eſt in ſingulis $\frac{1}{10}$, ſuæ ſummæ; deinde ad alias ſe conferens Nundinas, lucratus eſt $\frac{1}{2}$, eiuſdem ſuæ ſummæ priori lucro auctæ; deprehendit autem habere aureos 1600; quæritur aureorum ſumma. ibid.

Problema IX. Tres ſunt mercatores, qui ſummam aureorum æqualiter diuidere volebant, interim contentione ſuborta ad manus ventum eſt, tantum autem quiſque rapuit, quantum per eum potuit; contentione ſedata, ſinguli ſuas pecunias numerarunt, ac demum deprehenderunt, primum acceptis 15, à ſecundo, habere numerum æqualem reſiduo ipſius ſecundi; at verò ſecundum acceptis 18, à tertio habere numerum æqualem reſiduo tertij; tertium autem acceptis 22, à primo, habere numerum triplum illius, qui ſupereſt primo; quæritur ſumma. 531.

Problema X. Eſt Serici magnum pondus, cuius multæ libræ ſunt Serici Anglici, multæ aliæ Mediolanenſis, multæ demum Neapolitani. Sericum Anglicum eſt 5000, at verò multitudo librarum Serici Mediolanenſis, eſt dimidium librarum Serici Anglici, & Neapolitani; item multitudo librarum Serici Neapolitani eſt $\frac{1}{3}$, Serici Anglici, & Mediolanenſis; quæritur multitudo librarum Serici Mediolanenſis, & Neapolitani, & quanta ſit tota multitudo. ibid.

Problema XI. Quidam emit numerum equorum; illud autem conſtat, ſi ſeorſum emiſſet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & inſuper 10, haberet equos 400; quæritur equorum numerus. 532.

Proble-

Problema XII. Eſt quidam qui ſeruo promiſit duodecim menſibus 20, aureos, cum ſex ſextarijs frumenti, & quatuor Vini cadis, tranſactis menſibus octo, illi dedit duos aureos, cum ſextarijs frumenti, & Vini cadis; quæritur pretium Vini &c. cognita proportione vnius ad alterum, nimirum pretij frumenti, ad pretium, Vini, vt 3, ad 4. *ibid.*

Problema XIII. Quidam habet duos equos, & vnum mulum, eius pretium eſt 200, aut: hoc additum ad pretium primi equi facit pretium quadruplum pretij ſecundi equi. Idem autem muli pretium additum ſecundo, facit pretium æquale pretio primi equi. *ibid.*

Quo pacto cognoſcantur Problemata impoſſibilia. Caput XXXII. pag. 533.

Quid ſit Problema impoſſibile traditur. *ibid.*
Exemplis propoſitum explicatur. *ibid.*
Cautè ſunt hæc proponenda Problemata. *ibid.*
Præſtat in his ſe plurimùm exercere. *ibid.*

Qua Arte cognoſcantur Problemata vana, & nugatoria. Caput XXXIII. pag. 534.

Quid ſit Problema vanum, & nugatorium. *ibid.*
Exemplis propoſitum explicatur. *ibid.*

Errata præcipua ſic corrigito.

PAgina 16. linea 25. *oppoſitum*. pag. 30. lin. 4. lege. *ex* ℞ Q 18 *R*. lin. 5. lege. *cum* ℞ Q 18. p. 31. In exemplo. 265. corrige. 256. p. 37. l. 56. lege. *quæ ducta in ſe, & in 7.* p. 45. l. 46. *exiſtente*. p. 88. l. 5. *ponat*. p. 90. l. 10. & 11. lege. 1600 — 80 *R*. p. 91. l. 1. *A C*. p. 100. l. 27. lege. 1 Q — 4 *R*. p. 101. l. 51. *diuiſis*. p. 114. l. 3. *tot*. l. 35. *quot*. p. 117. l. 29. *hunc*. p. 119. l. 14 *reſoluendus*. p. 139. l. 17. *additis*. p. 150. l. 37. lege. *plus ſolido, à coefficiente in planum, ſub duplo latere primo, & latere ſecundo*. p. 157. l. 42. dele. 3. ante 10 a1. p. 160. l. 12. lege. *hoc eſt ad differentiam inter plano-planum coefficiens*. l. 14. lege. *inter plano-ſolidum*. p. 174. In quarta poſtilla. l. 5. 5 Q *R*. p. 180. l. 31. *ducatur*. p. 185. l. 37. *figuram*. l. vlt. *imitatione*. p. 186. l. 11. *coefficientis*. p. 201. l. 29. *mutilus*. p. 222. In ſexta poſtilla. † 3 *a* —. p. 223. In vltima poſtilla. dele. *b*. p. 242. l. 36. *reperta*. p. 243. l. 51. *ſua*. p. 244. l. 3. *abeuntes*. p. 248. l. 17. *iuxta*. p. 279. l. 27. *actum*. p. 281. l. 25. *locupletior*. p. 285. l. 11. lege. *& hunc*. p. 287. l. 30. *addito*. p. 288. l. 28. *manifeſtum*. l. 29. *planum*. p. 292. l. 32. *illumque*. p. 303. l. 5. *hoc*. p. 304. l. 7. *duct*. l. 36. *tertium*. p. 305. l. 4. lege. *ſeu F P*. p. 311. l. 3. *duos*. p. 310. *l*. 18. *æquationi*. p. 325. l. 20. *harum*. p. 335. l. 21. *A H*. corrige. *A B*. l. 22. lege. *relinquat A H*. p. 343. l. 25. *ſubductum*. p. 345. l. 1. *eadem*. l. 29. *quarum*. p. 350. l. 50. *hoc*. p. 352. l. 24. lege. *ſed hoc intereſt diſcriminis*. l. 56. lege. *pro comparationis homogeneo*. p. 355. l. 38. lege. *id quod*. p. 357. l. 27. *aduertent*. l. 29. *inuoluunt*. p. 387. l. 3. lege. *æquari 96*. p. 389. l. 12. *duabus*. p. 390. l. 14. *compoſito*. p. 395. l. 33. *ſuperioribus*. p. 402. l. 6. *diuidatur*. p. 411. l. 32. lege. *qua erit*. p. 412. l. 4. *nimirum*. l. 44. *inſinuato*. p. 414. l. 6. *Theorematum*. l. 23. *inito*. p. 416. l. 9. *pendeat*. l. vlt. *promoueantur*. p. 419. l. 35. *quadam*. p. 421. l. 29. *effloreſcit*. p. 423. l. 17. *meminimus*. p. 430. l. 4. *interpunctionis*. p. 433. l. 51. *præditus*. p. 440. l. 44. dele. *A E*. p. 445. l. 17. *diuque*. l. 20. *exercere*. p. 455. l. 20. *reſiduo*. p. 463. l. 30. *fractio*. p. 369. l. 19. *alÿ*. l. 20. dele. *pro*. p. 470. l. 11. *aſſequemur*. p. 479 l. 23. *ſubtractione*. p. 486. l. 31. *æris*. corrige. *area*. p. 488. l. 10. *laterum*. p. 500. l. 6. lege. *Logiſtices ope*. l. 15. *minus*. p. 501. l. 33. *perpendicalari*. p. 508. l. 49. lege. *aliud erit 16*. p. 519. l. 27. *habebitur*. l. 34. *didicimus*. p. 521. l. 47. *remaneat*. p. 526. l. 5. *Duo*. l. 30. *quodam*. p. 529. l. 42. *ſublatis*. p. 533. l. 34. *contigit*. p. 534. l. 37. *indulge*.

Si quæ verò alia occurrunt, Lectoris diligentiæ committuntur.

R E G I S T R V M.

✻ A A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq
Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii Kkk Lll Mmm
Nnn Ooo Ppp Qqq Rrr Sſſ Ttt Vuu * ** *** ****.

Omnes ſunt duerni.

Digitized by Google

A01 1461644

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

F .11.

Digitized by Google